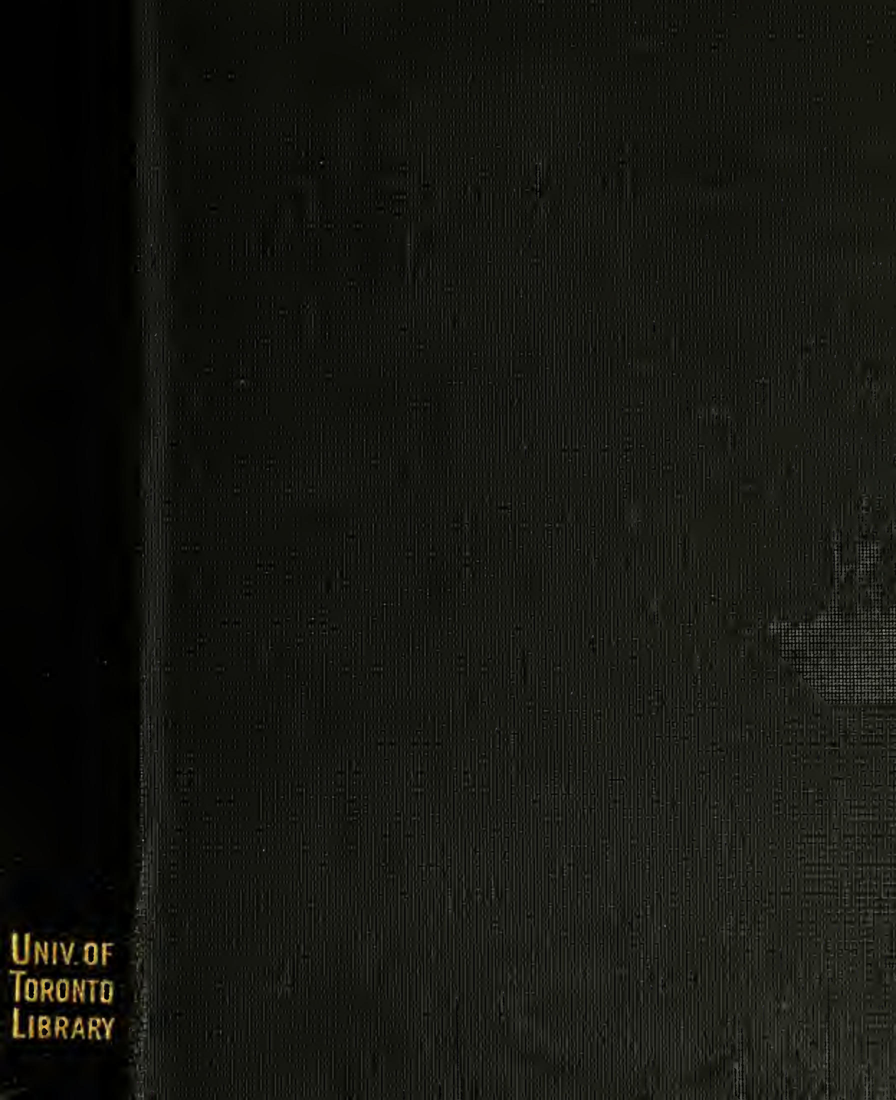

UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.


ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΟΜΕΤΡΕΙ

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE.

PUBLIÉ DE 1875 A 1884

PAR H. RESAL.

SIXIÈME SÉRIE,

PUBLIÉE

PAR CAMILLE JORDAN,

AVEC LA COLLABORATION DE

G. HUMBERT, E. PICARD, H. POINCARÉ.

TOME HUITIÈME. — ANNÉE 1912.

(77e Volume de la Collection.)

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1912

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Sur le principe d'Optique géométrique énoncé par Fermat;

Par P. DUHEM.

INTRODUCTION.

1. On lit ce qui suit dans les œuvres de Fermat (¹) : « *Synthèse pour les réfractions.* — Le savant Descartes a proposé pour les réfractions une loi qui est, comme on dit, conforme à l'expérience; mais, pour la démontrer, il a dû s'appuyer sur un postulat absolument indispensable à ses raisonnements, à savoir que le mouvement de la lumière se ferait plus facilement et plus vite dans les milieux denses que dans les rares; or ce postulat semble contraire à la lumière naturelle.

» En cherchant, pour établir la véritable loi des réfractions, à partir du principe contraire, à savoir que le mouvement de la lumière se fait

(¹) *Œuvres de* FERMAT, publiées par Paul Tannery et Ch. Henry, t. III, 1896, pp. 151-152.

plus facilement et plus vite dans les milieux rares que dans les denses, nous sommes retombés précisément sur la loi que Descartes a énoncée...

» Notre démonstration s'appuie sur ce seul postulat que la nature opère par les moyens et les voies les plus faciles et les plus aisées, car c'est ainsi que nous croyons qu'il doit être énoncé et non pas comme on le fait d'ordinaire en disant que la nature opère toujours par les lignes les plus courtes.

» En effet, de même qu'en spéculant sur les mouvements naturels des graves, Galilée en mesure les rapports aussi bien par le temps que par l'espace, de même nous ne considérons par les espaces ou les lignes les plus courtes, mais celles qui peuvent être parcourues le plus facilement, le plus commodément et dans le temps le plus court. »

Ce que Fermat avait démontré, tous les cours d'Optique géométrique le reproduisent : La lumière va d'un point situé dans un premier milieu à un point situé dans un second milieu, en se réfractant au passage d'une surface plane qui sépare ces deux milieux; si l'on veut que le parcours s'accomplisse dans le moindre temps possible, il faut, bien entendu, que le chemin parcouru à l'intérieur de chacun des deux milieux soit rectiligne et que, de plus, le sinus de l'angle d'incidence soit au sinus de l'angle de réfraction comme la vitesse de la lumière dans le premier milieu est à la vitesse de la lumière dans le second milieu.

Il est évident que la propagation rectiligne de la lumière au sein d'un milieu homogène, que la réflexion d'un rayon de lumière sur un miroir plan satisfont également à cette condition : Le passage d'un point à un autre se fait plus vite en suivant le rayon lumineux qu'en suivant n'importe quel autre chemin. Aussi a-t-on pris l'habitude d'énoncer, sous le nom de Principe de Fermat, la proposition suivante : *Lorsque la lumière va d'un point à un autre en traversant un certain nombre de milieux homogènes, en se réfléchissant sur un certain nombre de miroirs, en se réfractant au travers des surfaces qui séparent ces milieux les uns des autres, elle emploie moins de temps à ce parcours que n'en exigerait tout trajet, infiniment voisin de celui qu'elle adopte, établi entre les deux mêmes points et assujetti à subir les mêmes réflexions et les mêmes réfractions.*

Il s'en faut bien, cependant, que ce principe soit justifié.

Ce qui est établi en un grand nombre de Traités d'Optique, c'est la proposition suivante : *Lorsqu'on remplace le trajet suivi par la lumière par un trajet infiniment voisin, la variation première de la durée du parcours est égale à zéro.* Mais en l'absence de tout enseignement sur le signe de la variation seconde, cette proposition ne permet pas de décider si la durée de parcours du rayon lumineux est ou non un minimum. C'est une remarque que H. von Helmholtz ([1]), G. Kirchhoff ([2]) et M. S. Czapski ([3]) ont eu soin de faire.

En la *première Partie* de ce travail, nous nous proposons de déterminer avec précision certaines conditions où l'on peut affirmer que le trajet dont nous venons de parler correspond à une durée minimum; nous indiquerons également certaines autres conditions où cette durée n'est pas un minimum, en sorte qu'en ces conditions-là, le principe énoncé par Fermat est assurément faux. Ce principe n'a donc pas la généralité que lui attribuait son auteur.

Il est clair que nos démonstrations pourront toujours, sans perdre aucunement de leur force, supposer que toute partie d'un rayon lumineux qui n'éprouve ni réflexion ni réfraction est rectiligne.

En une *seconde Partie*, nous étendrons notre analyse au trajet que suit un rayon de lumière au sein d'un milieu isotrope, mais continuement hétérogène.

Un *appendice à la seconde Partie* transportera à quelques problèmes de Mécanique les résultats obtenus en cette Partie.

2. Toute notre analyse repose sur quelques LEMMES très simples que nous allons établir tout d'abord.

Soit

$$\Psi(x, y, z) = 0 \qquad (1)$$

([1]) H. VON HELMHOLTZ, *Mathematisch-physikalische Excurse* (*Handbuch der physiologischen Optik*, Leipzig, 1867, p. 241). — HELMHOLTZ, *Wissenschaftliche Abhandlungen*, Bd. II, pp. 152-153.

([2]) Gustav KIRCHHOFF, *Vorlesungen über die mathematische Optik*, Leipzig, 1891, p. 65.

([3]) Siegfried CZAPSKI, *Theorie der optischen Instrumente nach Abbe*, Breslau, 1893, pp. 14-15.

l'équation d'une surface; au voisinage d'un point $M(x, y, z)$ qui lui appartient, cette surface partage l'espace en deux régions, l'une où la fonction $\Psi(x, y, z)$ est positive, l'autre où la fonction $\Psi(x, y, z)$ est négative.

Par le point M, menons un segment MM' dont A, B, C soient les cosinus directeurs et dont l soit la longueur; au point $M'(x', y', z')$, la fonction $\Psi(x, y, z)$ prend une valeur :

$$(2)\qquad \Psi(x', y', z') = \left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}A + \frac{\partial\Psi}{\partial y}B + \frac{\partial\Psi}{\partial z}C\right)l + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}A + \frac{\partial\Psi}{\partial y}B + \frac{\partial\Psi}{\partial z}C\right)^{(2)}\frac{l^2}{2} + \theta l^3.$$

Dans cette égalité, (2) désigne un carré symbolique formé suivant des règles bien connues; θ est une quantité qui ne croît pas au delà de toute limite lorsqu'on fait tendre l vers zéro en gardant à A, B, C des valeurs invariables.

Supposons maintenant que les cosinus directeurs A, B, C vérifient l'égalité

$$(3)\qquad \frac{\partial\Psi}{\partial x}A + \frac{\partial\Psi}{\partial y}B + \frac{\partial\Psi}{\partial z}C = 0,$$

en sorte que la droite MM' soit tangente au point M à la surface représentée par l'égalité (1). L'égalité (2) se réduira à la forme

$$(4)\qquad \Psi(x', y', z') = \left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}A + \frac{\partial\Psi}{\partial y}B + \frac{\partial\Psi}{\partial z}C\right)^{(2)}\frac{l^2}{2} + \theta l^3.$$

On en déduira sans peine les propositions suivantes :

Considérons la tangente, de cosinus directeurs A, B, C, *menée à la surface* $\Psi(x, y, z) = 0$ *par un point* M *de cette surface, et la section normale de cette surface menée par ladite tangente.*

Si, au voisinage du point M, *cette section n'est pas concave du côté où* $\Psi(x, y, z)$ *est positif, on a sûrement*

$$(5)\qquad \left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}A + \frac{\partial\Psi}{\partial y}B + \frac{\partial\Psi}{\partial z}C\right)^{(2)} \leq 0.$$

Si, au contraire, elle n'est pas convexe de ce même côté, on a

sûrement

$$\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}A + \frac{\partial\Psi}{\partial y}B + \frac{\partial\Psi}{\partial z}C\right)^{(2)} = 0. \tag{5 bis}$$

Supposons maintenant que la section normale en question ait, correspondant au point M, un centre de courbure à distance finie. Soit $\mathcal{R}$ le rayon de courbure. Soit n la normale menée en M à la surface $\Psi(x, y, z) = 0$, et dirigée du côté de cette surface où $\Psi(x, y, z)$ est positif. *Nous aurons l'égalité*

$$\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}A + \frac{\partial\Psi}{\partial y}B + \frac{\partial\Psi}{\partial z}C\right)^{(2)} = \frac{1}{\mathcal{R}}\frac{d\Psi}{dn}, \tag{6}$$

si la section normale est convexe du côté où $\Psi(x, y, z)$ est positif, et l'égalité

$$\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}A + \frac{\partial\Psi}{\partial y}B + \frac{\partial\Psi}{\partial z}C\right)^{(2)} = -\frac{1}{\mathcal{R}}\frac{d\Psi}{dn}, \tag{6 bis}$$

si la section normale est concave du côté où $\Psi(x, y, z)$ est positif.

PREMIÈRE PARTIE.

LA LUMIÈRE TRAVERSE UN NOMBRE FINI DE MILIEUX HOMOGÈNES ET ÉPROUVE UN NOMBRE FINI DE RÉFLEXIONS ET DE RÉFRACTIONS.

5. *Rappel des lois de la réflexion et de la réfraction.* — Nous commencerons par mettre les lois de la réflexion et de la réfraction sous la forme la plus propre à l'analyse que nous voulons développer.

Soit

$$\psi(x, y, z) = 0 \tag{7}$$

l'équation d'un miroir; supposons, ce qui est toujours permis, que l'on ait choisi la fonction $\psi(x, y, z)$ de telle sorte qu'elle soit positive du côté par où vient la lumière.

En (x, y, z), ce miroir reçoit un rayon incident qui, suivi dans le sens où marche la lumière, admet les cosinus directeurs α_0, β_0, γ_0; le rayon réfléchi, suivi également dans le sens de parcours de la lumière,

a pour cosinus directeurs α_1, β_1, γ_1. Il est facile de voir que *les lois de la réflexion sont exactement équivalentes aux trois égalités*

$$(8) \qquad \alpha_1 - \alpha_0 = k\frac{\partial\psi}{\partial x}, \qquad \beta_1 - \beta_0 = k\frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad \gamma_1 - \gamma_0 = k\frac{\partial\psi}{\partial z},$$

où k est un coefficient positif.

Soit maintenant

$$(9) \qquad \Psi(X, Y, Z) = 0$$

l'équation d'une surface qui sépare deux milieux homogènes 1 et 2; la vitesse de la lumière a pour valeur V_1 dans le milieu 1 et V_2 dans le milieu 2. La fonction $\Psi(X, Y, Z)$ a été choisie de telle manière qu'elle soit positive du côté 1 par où la lumière est censée venir. Du côté 1, est un rayon incident dont α_1, β_1, γ_1 sont, lorsqu'on le suit dans le même sens que la lumière, les cosinus directeurs. Ce rayon donne, dans le milieu 2, un rayon réfracté qui, suivi également dans le sens où marche la lumière, a pour cosinus directeurs α_2, β_2, γ_2.

Les lois de la réfraction équivalent aux trois égalités

$$(10) \qquad \left\{ \begin{aligned} V_1\alpha_2 - V_2\alpha_1 &= -K\frac{\partial\Psi}{\partial X}, \\ V_1\beta_2 - V_2\beta_1 &= -K\frac{\partial\Psi}{\partial Y}, \\ V_1\gamma_2 - V_2\gamma_1 &= -K\frac{\partial\Psi}{\partial Z}, \end{aligned} \right.$$

où K *est un coefficient qui a le signe de la différence* $V_1 - V_2$.

4. *Expression de la durée de parcours du rayon lumineux et de la variation première de cette durée.* — Nous supposerons que le rayon lumineux qui joint deux points donnés éprouve une seule réflexion et une seule réfraction. Le lecteur verra sans aucune peine que notre raisonnement, entièrement général, se peut appliquer au cas d'un nombre quelconque de réflexions et de réfractions.

Soit $A(\xi, \eta, \zeta)$ un point situé dans le milieu 1. Du point A faisons partir une droite, de cosinus directeurs α_0, β_0, γ_0, qui, après avoir parcouru dans le milieu 1 un trajet $Am = R_0$, rencontre au

point $m(x, y, z)$ un miroir ψ dont la surface est représentée par l'équation (7).

Du point m part une autre droite, de cosinus directeurs α_1, β_1, γ_1, également tracée dans le milieu 1 ; après avoir parcouru dans ce milieu un trajet $mM = R_1$, elle va rencontrer au point $M(X, Y, Z)$ une surface Ψ, représentée par l'équation (9), qui sépare le milieu 1 du milieu 2.

Du point M part, dans le milieu 2, une droite de cosinus directeurs α_2, β_2, γ_2; après avoir parcouru, au sein du milieu 2, un trajet $MA' = R_2$, cette droite parvient au point $A'(\xi', \eta', \zeta')$.

Si V_1 est la vitesse de la lumière dans le milieu 1 et V_2 la vitesse de la lumière dans le milieu 2, le temps employé par la lumière pour parcourir le trajet $AmMA'$ est

$$(11) \qquad T = \frac{R_0 + R_1}{V_1} + \frac{R_2}{V_2}.$$

Au trajet considéré substituons un trajet infiniment voisin analogue, et calculons la variation δT qu'éprouve cette durée. Si nous observons que l'on a

$$\alpha_0 = -\frac{\partial R_0}{\partial \xi} = \frac{\partial R_0}{\partial x}, \qquad \cdots,$$

$$\alpha_1 = -\frac{\partial R_1}{\partial x} = \frac{\partial R_1}{\partial X}, \qquad \cdots,$$

$$\alpha_2 = -\frac{\partial R_2}{\partial X} = \frac{\partial R_2}{\partial \xi'}, \qquad \cdots$$

on trouve sans peine

$$\begin{aligned}(12) \quad \delta T = &-\frac{1}{V_1}(\alpha_0\,\delta\xi + \beta_0\,\delta\eta + \gamma_0\,\delta\zeta) \\ &+ \frac{1}{V_1}[(\alpha_0 - \alpha_1)\,\delta x + (\beta_0 - \beta_1)\,\delta y + (\gamma_0 - \gamma_1)\,\delta z] \\ &+ \frac{1}{V_1 V_2}[(V_2\alpha_1 - V_1\alpha_2)\,\delta X + (V_2\beta_1 - V_1\beta_2)\,\delta Y + (V_2\gamma_1 - V_1\gamma_2)\,\delta Z] \\ &+ \frac{1}{V_2}(\alpha_2\,\delta\xi' + \beta_2\,\delta\eta' + \gamma_2\,\delta\zeta').\end{aligned}$$

En outre, le déplacement du point m doit se faire sur la surface ψ et le déplacement du point M sur la surface Ψ, ce qu'expriment les conditions

$$(13)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial\psi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\psi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\psi}{\partial z}\delta z = 0, \\ &\frac{\partial\Psi}{\partial X}\delta X + \frac{\partial\Psi}{\partial Y}\delta Y + \frac{\partial\Psi}{\partial Z}\delta Z = 0. \end{aligned} \right.$$

Les deux points A et A' étant, tout d'abord, maintenus fixes, ce qu'expriment les égalités

$$\delta\xi = 0, \qquad \delta\eta = 0, \qquad \delta\zeta = 0,$$
$$\delta\xi' = 0, \qquad \delta\eta' = 0, \qquad \delta\zeta' = 0,$$

cherchons quelles conditions doit remplir le trajet AmMA' pour que toute déformation infiniment petite de ce trajet annule δT.

En vertu de l'expression (12) de δT, cette question revient à celle-ci : Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation

$$\begin{aligned} &V_2[(\alpha_0-\alpha_1)\delta x + (\beta_0-\beta_1)\delta y + (\gamma_0-\gamma_1)\delta z] \\ &\quad + (V_2\alpha_1 - V_1\alpha_2)\delta X + (V_2\beta_1 - V_1\beta_2)\delta Y + (V_2\gamma_1 - V_1\gamma_2)\delta Z = 0, \end{aligned}$$

linéaire et homogène en δx, δy, δz, δX, δY, δZ, résulte des conditions (13)?

La réponse est connue : Il faut et il suffit pour cela qu'il existe deux quantités k, K telles que l'on puisse écrire les égalités (8) et (10). D'où ce théorème démontré depuis longtemps :

Si l'on veut, entre deux points donnés, mener un trajet brisé qui ait un de ses sommets sur un miroir et l'autre à la surface de séparation de deux milieux homogènes; si l'on veut, en outre, que le temps qu'emploierait la lumière à parcourir ce trajet éprouve une variation infiniment petite d'ordre supérieur au premier lorsque le trajet éprouve une déformation infiniment petite quelconque, il faut et il suffit qu'en sa réflexion comme en sa réfraction, le trajet vérifie les lois imposées par l'Optique.

Rendons maintenant aux points A et A′ la faculté de se déplacer, mais imposons au trajet variable $AmMA'$ les conditions de toujours vérifier, au point m, les lois de la réflexion et, au point M, les lois de la réfraction. En vertu des conditions (8), (10) et (13), l'égalité (12) se réduira à

$$\delta T = -\frac{1}{V_1}(\alpha_0\,\delta\xi + \beta_0\,\delta\eta + \gamma_0\,\delta\zeta) + \frac{1}{V_2}(\alpha_2\,\delta\xi' + \beta_2\,\delta\eta' + \gamma_2\,\delta\zeta'). \tag{14}$$

Cette égalité donne immédiatement les théorèmes bien connus de Malus, de Dupin et de Hamilton.

3. *Variation seconde de la durée de parcours.* — Formons maintenant, pour une déformation infiniment petite quelconque du trajet $AmMA'$, l'expression $\delta^2 T$ de la variation seconde de la durée de parcours.

Nous avons évidemment, en vertu de l'égalité (11),

$$\delta^2 T = \frac{1}{V_1}(\delta^2 R_0 + \delta^2 R_1) + \frac{1}{V_2}\delta^2 R_2. \tag{15}$$

D'autre part, l'égalité

$$R_0^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2$$

nous donne aisément

$$\begin{aligned}\delta^2 R_0 = {} & \frac{x-\xi}{R_0}(\delta^2 x - \delta^2\xi) + \frac{y-\eta}{R_0}(\delta^2 y - \delta^2\eta) + \frac{z-\zeta}{R_0}(\delta^2 z - \delta^2\zeta) \\ & + \frac{1}{R_0}[(\delta x - \delta\xi)^2 + (\delta y - \delta\eta)^2 + (\delta z - \delta\zeta)^2] \\ & - \frac{1}{R_0}\left[\frac{x-\xi}{R_0}(\delta x - \delta\xi) + \frac{y-\eta}{R_0}(\delta y - \delta\eta) + \frac{z-\zeta}{R_0}(\delta z - \delta\zeta)\right]^2.\end{aligned}$$

Convenons de désigner par R_0 non seulement la longueur, mais encore la direction du rayon Am; par Δ_0 la grandeur et la direction du segment dont $(\delta x - \delta\xi)$, $(\delta y - \delta\eta)$, $(\delta z - \delta\zeta)$ sont les composantes.

Nous aurons

$$(\delta x - \delta\xi)^2 + (\delta y - \delta\eta)^2 + (\delta z - \delta\zeta)^2 = \Delta_0^2,$$

$$\frac{x - \xi}{R_0}(\delta x - \delta\xi) + \frac{y - \eta}{R_0}(\delta y - \delta\eta) + \frac{z - \zeta}{R_0}(\delta z - \delta\zeta) = \Delta_0 \cos(\Delta_0, R_0),$$

en sorte que l'égalité précédente deviendra

$$\delta^2 R_0 = \alpha_0(\delta^2 x - \delta^2\xi) + \beta_0(\delta^2 y - \delta^2\eta) + \gamma_0(\delta^2 z - \delta^2\zeta) + \frac{\Delta_0^2 \sin^2(\Delta_0, R_0)}{R_0}.$$

Si nous désignons de même par Δ_1 la grandeur et la direction du segment infiniment petit dont $(\delta X - \delta x)$, $(\delta Y - \delta y)$, $(\delta X - \delta z)$ sont les composantes; par Δ_2, la grandeur et la direction du segment infiniment petit dont $(\delta\xi' - \delta x)$, $(\delta\eta' - \delta y)$, $(\delta\zeta' - \delta z)$ sont les composantes, nous pourrons donner de $\delta^2 R_1$, $\delta^2 R_2$ des expressions analogues à celle de $\delta^2 R_0$. L'égalité (15) deviendra alors

$$(16) \qquad \begin{aligned} \delta^2 T = {} & \frac{\alpha_2 \delta^2\xi' + \beta_2 \delta^2\eta' + \gamma_2 \delta^2\zeta'}{V_2} - \frac{\alpha_0 \delta^2\xi + \beta_0 \delta^2\eta + \gamma_0 \delta^2\zeta}{V_1} \\ & + \frac{1}{V_1}[(\alpha_0 - \alpha_1)\delta^2 x + (\beta_0 - \beta_1)\delta^2 y + (\gamma_0 - \gamma_1)\delta^2 z] \\ & + \frac{1}{V_1 V_2}[(V_2\alpha_1 - V_1\alpha_2)\delta^2 X + (V_2\beta_1 - V_1\beta_2)\delta^2 Y \\ & \qquad\qquad + (V_2\gamma_1 - V_1\gamma_2)\delta^2 Z] \\ & + \frac{\Delta_0^2 \sin^2(\Delta_0, R_0)}{V_1 R_0} + \frac{\Delta_1^2 \sin^2(\Delta_1, R_1)}{V_1 R_1} + \frac{\Delta_2^2 \sin^2(\Delta_2, R_2)}{V_2 R_2}. \end{aligned}$$

En outre, le point m est assujetti à demeurer sur la surface ψ, et le point M à demeurer sur la surface Ψ, ce qu'expriment les conditions (13) et les conditions

$$(17) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial\psi}{\partial x}\delta^2 x + \frac{\partial\psi}{\partial y}\delta^2 y + \frac{\partial\psi}{\partial z}\delta^2 z + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\psi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\psi}{\partial z}\delta z\right)^2 = 0, \\ & \frac{\partial\Psi}{\partial X}\delta^2 X + \frac{\partial\Psi}{\partial Y}\delta^2 Y + \frac{\partial\Psi}{\partial Z}\delta^2 Z + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial X}\delta X + \frac{\partial\Psi}{\partial Y}\delta Y + \frac{\partial\Psi}{\partial Z}\delta Z\right)^2 = 0, \end{aligned} \right.$$

qui s'en déduisent.

Ce que nous venons de dire n'impose aucune condition particulière au trajet A m M A' à partir duquel se fait la déformation infinitésimale. Imaginons maintenant que ce trajet soit celui d'un rayon lumineux, en sorte que les égalités (8) soient vérifiées au point m et les égalités (10) au point M. En vertu de ces égalités et des conditions (17),

l'expression (16) de $\partial^2 T$ va devenir

$$(18)\qquad \begin{aligned}\partial^2 T = & -\frac{1}{V_1}(\alpha_0\,\partial^2\xi + \beta_0\,\partial^2\eta + \gamma_0\,\partial^2\zeta) \\ & + \frac{1}{V_2}(\alpha_2\,\partial^2\zeta' + \beta_2\,\partial^2\eta' + \gamma_2\,\partial^2\zeta') \\ & + \frac{k}{V_1}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\,\partial x + \frac{\partial\psi}{\partial y}\,\partial y + \frac{\partial\psi}{\partial z}\,\partial z\right)^{(2)} \\ & - \frac{K}{V_1 V_2}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial X}\,\partial X + \frac{\partial\Psi}{\partial Y}\,\partial Y + \frac{\partial\Psi}{\partial Z}\,\partial Z\right)^{(2)} \\ & + \frac{\Delta_0^2 \sin^2(\Delta_0, R_0)}{V_1 R_0} + \frac{\Delta_1^2 \sin^2(\Delta_1, R_1)}{V_1 R_1} + \frac{\Delta_2^2 \sin^2(\Delta_2, R_2)}{V_2 R_2}.\end{aligned}$$

Dans le cas particulier où les deux points A, A′ sont maintenus immobiles, le segment Δ_0 est identique en grandeur et direction au segment mm' ou d, de composantes ∂x, ∂y, ∂z, que décrit le point m; le segment Δ_2 a même grandeur que le segment MM′ ou D, de composantes ∂X, ∂Y, ∂Z, que décrit le point M, mais ces deux segments Δ_2, D, ont des directions opposées. Dans ce cas, donc, l'égalité (18) se réduit à la forme

$$(19)\qquad \begin{aligned}\partial^2 T = & \frac{k}{V_1}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\,\partial x + \frac{\partial\psi}{\partial y}\,\partial y + \frac{\partial\psi}{\partial z}\,\partial z\right)^{(2)} \\ & - \frac{K}{V_1 V_2}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial X}\,\partial X + \frac{\partial\Psi}{\partial Y}\,\partial Y + \frac{\partial\Psi}{\partial Z}\,\partial Z\right)^{(2)} \\ & + \frac{d^2 \sin^2(d, R_0)}{V_1 R_0} + \frac{\Delta_1^2 \sin^2(\Delta_1, R_1)}{V_1 R_1} + \frac{D^2 \sin^2(D, R_2)}{V_2 R_2}.\end{aligned}$$

6. Théorème. — *Si toutes les surfaces réfléchissantes et réfringentes qui composent le système optique sont des surfaces planes, le principe de Fermat est certainement exact.*

Dans ce cas, en effet, les fonctions $\psi(x, y, z)$, $\Psi(X, Y, Z)$ sont des fonctions linéaires, en sorte qu'on a, quels que soient ∂x, ∂y, ∂z, ∂X, ∂Y, ∂Z,

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\,\partial x + \frac{\partial\psi}{\partial y}\,\partial y + \frac{\partial\psi}{\partial z}\,\partial z\right)^{(2)} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial\Psi}{\partial X}\,\partial X + \frac{\partial\Psi}{\partial Y}\,\partial Y + \frac{\partial\Psi}{\partial Z}\,\partial Z\right)^{(2)} = 0.$$

L'égalité (19) montre alors que $\delta^2 T$ est assurément positif, à moins qu'on n'ait simultanément toutes les égalités

$$(20) \qquad \begin{cases} d \sin(d, R_0) = 0, \\ \Delta_1 \sin(\Delta_1, R_1) = 0, \\ D \sin(D, R_2) = 0. \end{cases}$$

Nous pouvons évidemment exclure de notre analyse le cas où quelqu'une des incidences serait rasante.

La première incidence n'étant pas rasante, $\sin(d, R_0)$ ne peut être nul, en sorte que la première égalité donne nécessairement

$$d = 0.$$

d étant nul, le segment Δ_1 se réduit au segment dont δX, δY, δZ sont les composantes, c'est-à-dire au segment D; d'ailleurs, la seconde incidence n'étant pas rasante, $\sin(D, R_1)$ ne peut être nul, en sorte que la seconde égalité (20) exigerait qu'on eût

$$D = 0.$$

Quel que soit le nombre des incidences successives, on trouverait, en raisonnant ainsi de proche en proche, que les égalités (20) ne peuvent être vérifiées à moins que tous les points d'incidence ne demeurent fixes, ce qui exclut toute déformation du trajet.

Le théorème énoncé est ainsi démontré.

7. Théorème II. — *Si un système ne contient pas plus de deux surfaces qui rompent le rayon; si, d'ailleurs, aucune des deux rencontres avec ces surfaces n'a lieu sous l'incidence rasante; si, enfin, on s'est donné le trajet* A*m*MA′ *d'un rayon lumineux, on pourra toujours prendre, sur la direction donnée* A*m*, *le point* A *assez voisin du premier point d'incidence* m, *et, sur la direction donnée* MA′, *le point* A′ *assez voisin du dernier point d'émergence* M, *pour que le principe de Fermat, appliqué à ces deux points, soit sûrement exact.*

Soient a, b, c les cosinus directeurs du déplacement d, et A, B, C

les cosinus directeurs du déplacement D; nous aurons

$$(21)\quad \begin{cases} \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\psi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\psi}{\partial z}\delta z\right)^{(2)} = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}a + \frac{\partial\psi}{\partial y}b + \frac{\partial\psi}{\partial z}c\right)^{(2)} d^2, \\ \left(\frac{\partial\Psi}{\partial X}\delta X + \frac{\partial\Psi}{\partial Y}\delta Y + \frac{\partial\Psi}{\partial Z}\delta Z\right)^{(2)} = \left(\frac{\partial\Psi}{\partial X}A + \frac{\partial\Psi}{\partial Y}B + \frac{\partial\Psi}{\partial Z}C\right)^{(2)} D^2. \end{cases}$$

Ces égalités donnent à l'égalité (19) la forme suivante :

$$(22)\quad \begin{aligned} \delta^2 T = & \left[\frac{\sin^2(d, R_0)}{R_0} + k\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}a + \frac{\partial\psi}{\partial y}b + \frac{\partial\psi}{\partial z}c\right)^{(2)}\right]\frac{d^2}{V_1} \\ & + \left[\frac{\sin^2(D, R_2)}{R_2} - \frac{K}{V_1}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial X}A + \frac{\partial\Psi}{\partial Y}B + \frac{\partial\Psi}{\partial Z}C\right)^{(2)}\right]\frac{D^2}{V_2^2} \\ & + \frac{\sin^2(\Delta_1, R_1)}{V_1 R_1}\Delta_1^2. \end{aligned}$$

Au point m, la section normale pratiquée dans la surface ψ et dont la tangente en m a pour cosinus directeurs a, b, c, a un rayon de courbure, fini ou infini, que nous désignons par r. Selon les égalités (6) et (6 *bis*), la quantité

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}a + \frac{\partial\psi}{\partial y}b + \frac{\partial\psi}{\partial z}c\right)^{(2)}$$

a même valeur absolue que $\frac{1}{r}\frac{d\psi}{dn}$. Calculée donc pour tous les déplacements infinitésimaux d issus du point m, la valeur absolue de cette quantité admet une limite supérieure. D'autre part, l'incidence en m n'étant pas rasante, $\sin(d, R_0)$ admet une limite inférieure positive. On pourra donc toujours assigner à R_0 une limite supérieure assez petite pour qu'on ait sûrement

$$\frac{\sin^2(d, R_0)}{R_0} + k\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}a + \frac{\partial\psi}{\partial y}b + \frac{\partial\psi}{\partial z}c\right)^{(2)} > 0.$$

On voit de même qu'on pourra assigner à R_2 une limite supérieure assez petite pour qu'on ait sûrement

$$\frac{\sin^2(D, R_2)}{R_2} - \frac{K}{V_1}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial X}A + \frac{\partial\Psi}{\partial Y}B + \frac{\partial\Psi}{\partial Z}C\right)^{(2)} > 0.$$

Cela fait, la quantité $\delta^2 T$ donnée par l'égalité précédente sera assuré-

ment positive, à moins qu'on n'ait

$$d = 0, \qquad D = 0,$$

en sorte que le théorème énoncé se trouve démontré.

Remarque. — *Si le système optique se réduisait à une seule surface réfléchissante ou à une seule surface réfringente, il suffirait, pour que le principe de Fermat fût exact, que l'un des deux points extrêmes du trajet lumineux fût suffisamment voisin de la surface de rupture; l'autre en pourrait être aussi éloigné qu'on voudra.*

8. Théorème III. — *Si aucune des surfaces réfléchissantes n'admet, au point d'incidence, de section normale qui soit concave du côté éclairé; si aucune des surfaces réfringentes n'admet, au point d'incidence, de section normale qui soit concave du côté du milieu le plus réfringent, le rayon considéré vérifie assurément le principe de Fermat. On suppose exclue toute incidence rasante.*

Considérons d'abord un point m où le rayon lumineux rencontre une surface réfléchissante ψ.

La fonction $\psi(x, y, z)$ a été choisie, par hypothèse, de manière à devenir positive du côté éclairé de la surface; dans ces conditions, nous savons (nº 4) que le coefficient k est positif.

D'autre part, aucune section normale de la surface n'est concave du côté éclairé, c'est-à-dire du côté où $\psi(x, y, z)$ est positif, on a donc [condition (5)]

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} a + \frac{\partial\psi}{\partial y} b + \frac{\partial\psi}{\partial z} c\right)^{(2)} \geq 0.$$

Ces deux renseignements réunis donnent

$$(23) \qquad k\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} a + \frac{\partial\psi}{\partial y} b + \frac{\partial\psi}{\partial z} c\right)^{(2)} \geq 0.$$

Considérons maintenant un point M où le rayon rencontre une surface réfringente Ψ. La fonction $\Psi(X, Y, Z)$ a été choisie de manière à devenir positive du côté d'où vient la lumière; soient 1 le milieu qui se trouve de ce côté et 2 le milieu qui se trouve de l'autre côté.

Nous savons (nº 4) que le coefficient K a le signe de $V_1 - V_2$.

Nous savons qu'aucune section normale pratiquée au point M dans la surface Ψ n'est concave du côté du milieu le plus réfringent.

Si donc V_1 est supérieur à V_2, aucune de ces sections n'est concave du côté 2; partant, aucune n'est convexe du côté 1 où la surface Ψ est positive; dès lors, d'après la condition (5 *bis*), on a

$$\left(\frac{\partial\Psi}{\partial X}A + \frac{\partial\Psi}{\partial Y}B + \frac{\partial\Psi}{\partial z}C\right)^{(2)} \leqq 0.$$

Si, au contraire, V_1 est inférieur à V_2, aucune des sections normales n'est concave du côté 1 où la fonction Ψ est positive; on a donc, selon la condition (5),

$$\left(\frac{\partial\Psi}{\partial X}A + \frac{\partial\Psi}{\partial Y}B + \frac{\partial\Psi}{\partial Z}C\right)^{(2)} \geqq 0.$$

Nous pouvons dès lors écrire, en toutes circonstances,

$$(V_1 - V_2)\left(\frac{\partial\Psi}{\partial X}A + \frac{\partial\Psi}{\partial Y}B + \frac{\partial\Psi}{\partial Z}C\right)^{(2)} \leqq 0$$

ou bien encore, puisque K a le signe de $(V_1 - V_2)$,

$$K\left(\frac{\partial\Psi}{\partial X}A + \frac{\partial\Psi}{\partial Y}B + \frac{\partial\Psi}{\partial Z}C\right)^{(2)} \leqq 0. \tag{24}$$

En vertu des conditions (21), (23) et (24), l'égalité (19) permet d'écrire la condition

$$\delta^2 T \geqq \frac{d^2 \sin^2(d, R_0)}{V_1 R_0} + \frac{\Delta_1^2 \sin^2(\Delta_1, R_1)}{V_1 R_1} + \frac{D^2 \sin^2(D, R_2)}{V_2 R_2}. \tag{25}$$

Or, pour que le second membre de cette condition (25) fût égal à o, il faudrait qu'on eût simultanément toutes les égalités (20), ce qui ne peut être, nous l'avons vu, à moins que le rayon ne soit maintenu entièrement invariable. Hors cette hypothèse, donc, $\delta^2 T$ est positif, et le théorème énoncé est démontré.

9. Théorème IV. — *Un rayon subit un certain nombre de réflexions et de réfractions.*

Par le premier côté R_0 *du contour polygonal que forme ce rayon on mène un plan qui, sur le plan tangent en* m *à la première sur-*

face réfléchissante ou réfringente ψ, *trace une ligne droite* θ *de cosinus directeurs* a, b, c : *à cette tangente* θ *correspond, dans la surface* ψ, *une section normale* s.

Par le second côté R_1 *du contour polygonal et la droite* θ, *on mène un plan ; ce plan trace une droite* Θ, *de cosinus directeurs* A, B, C, *sur le plan tangent en* M *à la seconde surface réfléchissante ou réfringente* Ψ : *à cette tangente* Θ *correspond, dans la surface* Ψ, *une section normale* S : *et ainsi de suite.*

Toutes celles des sections s, S, ... *qui sont pratiquées en des surfaces réfléchissantes ont un rayon de courbure fini et tournent leur concavité du côté éclairé.*

Toutes celles des sections s, S, ... *qui sont pratiquées en des surfaces réfringentes ont un rayon de courbure fini et tournent leur concavité du côté du milieu le plus réfringent.*

En ces conditions, sans changer les directions ni du premier rayon incident R_0 *ni du dernier rayon émergent* R_2, *on peut éloigner assez le point* A *sur le premier et le point* A′ *sur le second pour que le principe de Fermat cesse de s'appliquer au rayon qui unit ces deux points.*

Nous allons définir, en effet, une déformation infiniment petite imposée au trajet AmMA′ qui, si l'on éloigne suffisamment les deux points A, A′, assurera à δ^2T une valeur négative.

Au point m nous donnerons un déplacement, de longueur arbitraire d, qui ait pour tangente la ligne θ : ce déplacement amènera le point m en m'.

Du point m', nous mènerons une parallèle au rayon R_1 ; cette parallèle rencontrera en M′ la tangente Θ ; MM′ sera le déplacement D que nous imposerons au point M.

Nous continuerons de même, s'il y a lieu, pour déterminer les déplacements imposés aux divers points d'incidence.

Le segment désigné par Δ_1 est celui qu'il faut composer avec le segment mm' ou d pour obtenir le segment MM′ ou D ; il résulte de la construction précédente qu'il est parallèle au rayon R_1, en sorte qu'on a

$$\sin(\Delta_1, R_1) = 0.$$

Il en serait de même des sinus analogues.

Quel que soit donc le nombre des réflexions et des réfractions subies par le rayon, toutes les quantités analogues à Δ_1, sauf la première d et la dernière D, disparaissent de l'expression (19) de $\delta^2 T$ qui se réduit à

$$\begin{aligned}\delta^2 T = & \quad \frac{k}{V_1}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\psi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\psi}{\partial z}\delta z\right)^{(2)} \\ & - \frac{K}{V_1 V_2}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial X}\delta X + \frac{\partial\Psi}{\partial Y}\delta Y + \frac{\partial\Psi}{\partial Z}\delta Z\right)^{(2)} \\ & + \frac{d^2 \sin^2(d, R_0)}{V_1 R_0} + \frac{D^2 \sin^2(D, R_2)}{V_2 R_2}.\end{aligned}$$

D'ailleurs, les déplacements de chacun des points d'incidence sont, par le procédé qui a servi à les produire, dans un rapport fini et bien déterminé au déplacement d du premier, en sorte qu'on peut écrire :

$$D = \lambda d,$$

λ étant une quantité positive et finie.

Si l'on tient compte, en outre, des égalités (21), l'expression précédente de $\delta^2 T$ deviendra

$$(26) \qquad \begin{aligned}\delta^2 T = \Bigg[& \quad \frac{k}{V_1}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}a + \frac{\partial\psi}{\partial y}b + \frac{\partial\psi}{\partial z}c\right)^{(2)} \\ & - \frac{K\lambda^2}{V_1 V_2}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial X}A + \frac{\partial\Psi}{\partial Y}B + \frac{\partial\Psi}{\partial Z}C\right)^{(2)} \\ & \quad + \frac{\sin^2(d, R_0)}{V_1 R_0} + \frac{\lambda^2 \sin^2(D, R_2)}{V R_2}\Bigg] d^2.\end{aligned}$$

La surface ψ est concave du côté éclairé, qui est aussi le côté où la fonction $\psi(x, y, z)$ est positive. Si nous désignons par r le rayon de courbure, supposé fini, de la section s, l'égalité (6) nous donnera

$$(27) \qquad \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}a + \frac{\partial\psi}{\partial y}b + \frac{\partial\psi}{\partial z}c\right)^{(2)} = -\frac{1}{r}\frac{d\psi}{dn}.$$

Un raisonnement analogue à celui qui nous a fourni la condition (24) nous donnera ici l'inégalité

$$K\left(\frac{\partial\Psi}{\partial X}A + \frac{\partial\Psi}{\partial Y}B + \frac{\partial\Psi}{\partial Z}C\right)^{(2)} > 0.$$

Si N est la normale en M à la surface Ψ, menée du côté où la fonction

$\Psi(X, Y, Z)$ est positive, et si $\mathcal{R}$ est le rayon de courbure de la section S, les égalités (6) et (6 *bis*) nous montrent que la valeur absolue de

$$\left(\frac{\partial\Psi}{\partial X}A + \frac{\partial\Psi}{\partial Y}B + \frac{\partial\Psi}{\partial Z}C\right)^{(2)}$$

est égale à $\frac{1}{\mathcal{R}}\frac{d\Psi}{dN}$. Ce renseignement, joint à l'égalité précédente, permet d'écrire

$$(28)\qquad K\left(\frac{\partial\Psi}{\partial X}A + \frac{\partial\Psi}{\partial Y}B + \frac{\partial\Psi}{\partial Z}C\right)^{(2)} = \frac{|K|}{\mathcal{R}}\frac{d\Psi}{dN}.$$

Les égalités (26), (27) et (28) donnent

$$(29)\qquad \delta^2 T = -\left[\frac{k}{V_1 r}\frac{d\psi}{dn} + \frac{|K|\lambda^2}{V_1 V_2 \mathcal{R}}\frac{d\Psi}{dN} - \frac{\sin^2(d, R_0)}{V_1 R_0} - \frac{\lambda^2 \sin^2(D, R_2)}{V_2 R_2}\right] d^2.$$

Comme k est positif (n° 4), la somme

$$\frac{k}{V_1 r}\frac{d\psi}{dn} + \frac{|K|\lambda^2}{V_1 V_2 \mathcal{R}}\frac{d\Psi}{dN}$$

est une quantité positive bien déterminée; on voit alors qu'on peut toujours choisir les quantités R_0, R_2 assez grandes pour que $\delta^2 T$ soit sûrement négatif, ce qui démontre le théorème énoncé.

Remarque. — Il est trois cas particuliers auxquels ce théorème s'applique d'une manière immédiate :

1° *Le système se compose d'une seule surface réfléchissante ; par le point d'incidence passe une section normale, de rayon de courbure fini, concave du côté éclairé.*

2° *Le système se compose d'une seule surface réfringente; par le point d'incidence passe une section normale, de rayon de courbure fini, concave du côté où se trouve le milieu le plus réfringent.*

3° *Le système se compose d'un nombre quelconque de surfaces réfléchissantes ou réfringentes; toute surface réfléchissante est entièrement concave du côté éclairé; toute surface réfringente est entièrement concave du côté où se trouve le milieu le plus réfringent; en outre, les deux rayons de courbure principaux de chaque surface sont finis.*

En ces trois cas, on peut prendre le point de départ et le point d'arrivée de la lumière assez éloignés des deux surfaces extrêmes du système optique pour que le principe de Fermat soit sûrement en défaut.

SECONDE PARTIE.

LE RAYON LUMINEUX TRAVERSE UN MILIEU ISOTROPE, MAIS CONTINUEMENT HÉTÉROGÈNE.

10. *Établissement des équations qui déterminent la forme du rayon lumineux.* — Considérons un milieu isotrope et continuement hétérogène. Soit $V(x, y, z)$ la valeur qu'aurait la vitesse de la lumière en un milieu homogène dont la constitution serait celle que notre milieu hétérogène présente au point (x, y, z).

Rappelons brièvement, afin que nos raisonnements ne présentent pas, même en apparence, de cercle vicieux, comment on peut établir *directement* les équations que le rayon lumineux doit vérifier en un semblable milieu.

Soient V_0, V la plus petite valeur et la plus grande que $V(x, y, z)$ prenne au sein de ce milieu; divisons la différence $(V - V_0)$ en n parties égales et soit ε la valeur commune de ces parties :

$$V - V_0 = n\varepsilon.$$

Traçons les surfaces d'égal indice

$$\begin{array}{lll}
\Psi_0 & \text{ou} & V(x, y, z) = V_0, \\
\Psi_1 & \text{ou} & V(x, y, z) = V_0 + \varepsilon = V_1, \\
\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Psi_p & \text{ou} & V(x, y, z) = V_0 + p\varepsilon = V_p, \\
\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Psi_n & \text{ou} & V(x, y, z) = V_0 + n\varepsilon = V_n = V.
\end{array}$$

Notre milieu continuement hétérogène est ainsi partagé en n couches; chacune de ces couches est comprise entre deux surfaces d'égal indice consécutives; si l'on fait croître n au delà de toute limite, l'épaisseur de chacune de ces couches tend vers zéro.

A la première couche, comprise entre les surfaces Ψ_0, Ψ_1, nous substituons un corps optiquement homogène où la vitesse de la lumière soit V_1; en général, à la $p^{ième}$ couche, comprise entre les surfaces Ψ_{p-1}, Ψ_p, nous substituons un corps optiquement homogène où la vitesse de la lumière soit V_p. Nous obtenons ainsi un assemblage discontinu de milieux homogènes. Lorsque nous ferons croître n au delà de toute limite, cet assemblage tendra vers le milieu continuement hétérogène que nous voulons étudier.

Un rayon lumineux, au sein de ce milieu discontinu, aura la forme d'une ligne brisée. Lorsque le nombre n croîtra au delà de toute limite, cette ligne brisée tendra vers une certaine courbe. Cette ligne courbe sera la figure qu'affecte le rayon lumineux au sein du milieu isotrope et continuement hétérogène que l'on considère.

Désignons par R_p la partie du rayon brisé qui traverse la $p^{ième}$ couche et par α_p, β_p, γ_p ses cosinus directeurs.

Soit $M_p(x, y, z)$ le point de la surface Ψ_p où le rayon R_p rencontre cette surface et se réfracte pour donner le rayon R_{p+1}. Les cosinus directeurs de la normale en ce point à la surface Ψ_p sont respectivement proportionnels aux valeurs que les quantités

$$(30) \qquad \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial x}, \quad \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial y}, \quad \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial z}$$

prennent en ce même point.

En vertu des lois de la réfraction exprimées par les égalités (10), ces quantités (30) doivent être respectivement proportionnelles aux trois quantités

$$V_{p+1}\alpha_p - V_p\alpha_{p+1}, \quad V_{p+1}\beta_p - V_p\beta_{p+1}, \quad V_{p+1}\gamma_p - V_p\gamma_{p+1}$$

ou encore aux trois rapports

$$(31) \qquad \frac{V_{p+1}\alpha_p - V_p\alpha_{p+1}}{R_p}, \quad \frac{V_{p+1}\beta_p - V_p\beta_{p+1}}{R_p}, \quad \frac{V_{p+1}\gamma_p - V_p\gamma_{p+1}}{R_p}.$$

Lorsqu'on fait croître n indéfiniment, on doit avoir proportionnalité entre les quantités (30) et les valeurs limites des quantités (31).

Déterminons ces valeurs limites.

Soit s la longueur du rayon curviligne, comptée à partir d'une origine arbitraire, jusqu'au point $M(x, y, z)$, position limite du

point M_p. Soient

$$a(s) = \frac{dx}{ds}, \qquad b(s) = \frac{dy}{ds}, \qquad c(s) = \frac{dz}{ds} \tag{32}$$

les cosinus directeurs de la tangente au rayon en ce point; ce sont évidemment les valeurs limites des cosinus α_p, β_p, γ_p.

Les rapports

$$\frac{\alpha_{p+1} - \alpha_p}{R_p}, \quad \frac{\beta_{p+1} - \beta_p}{R_p}, \quad \frac{\gamma_{p+1} - \gamma_p}{R_p}$$

ont pour limites respectives $\frac{da}{ds}$, $\frac{db}{ds}$, $\frac{dc}{ds}$.

Quant au rapport $\frac{V_{p+1} - V_p}{R_p}$, il a évidemment pour limite

$$\frac{dV}{ds} = \frac{\partial V}{\partial x} a + \frac{\partial V}{\partial y} b + \frac{\partial V}{\partial z} c.$$

Il doit donc exister, en chaque point du rayon curviligne, un facteur μ tel qu'on ait les trois égalités

$$\left\{\begin{aligned} V \frac{da}{ds} - \left(\frac{\partial V}{\partial x} a + \frac{\partial V}{\partial y} b + \frac{\partial V}{\partial z} c\right) a - \mu \frac{\partial V}{\partial x} &= 0, \\ V \frac{db}{ds} - \left(\frac{\partial V}{\partial x} a + \frac{\partial V}{\partial y} b + \frac{\partial V}{\partial z} c\right) b - \mu \frac{\partial V}{\partial y} &= 0, \\ V \frac{dc}{ds} - \left(\frac{\partial V}{\partial x} a + \frac{\partial V}{\partial y} b + \frac{\partial V}{\partial z} c\right) c - \mu \frac{\partial V}{\partial z} &= 0. \end{aligned}\right. \tag{33}$$

La valeur du facteur μ s'obtient aisément si l'on tient compte de l'égalité

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

et de l'égalité

$$a \frac{da}{ds} + b \frac{db}{ds} + c \frac{dc}{ds} = 0$$

qui s'en déduit. Si nous multiplions respectivement, en effet, les égalités (33) par a, b, c, et si nous ajoutons membre à membre les résultats obtenus, nous trouvons l'égalité

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x} a + \frac{\partial V}{\partial y} b + \frac{\partial V}{\partial z} c\right)(1 + \mu) = 0.$$

La quantité $\left(\frac{\partial V}{\partial x} a + \frac{\partial V}{\partial y} b + \frac{\partial V}{\partial z} c\right)$ ne peut être égale à 0 qu'aux points

exceptionnels où le rayon touche une surface d'égal indice. Nous devons donc avoir

$$\mu = -1.$$

Dès lors, si nous posons

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned} F &= V\frac{da}{ds} - \left(\frac{\partial V}{\partial x}a + \frac{\partial V}{\partial y}b + \frac{\partial V}{\partial z}c\right)a + \frac{\partial V}{\partial x},\\ G &= V\frac{db}{ds} - \left(\frac{\partial V}{\partial x}a + \frac{\partial V}{\partial y}b + \frac{\partial V}{\partial z}c\right)b + \frac{\partial V}{\partial y},\\ H &= V\frac{dc}{ds} - \left(\frac{\partial V}{\partial x}a + \frac{\partial V}{\partial y}b + \frac{\partial V}{\partial z}c\right)c + \frac{\partial V}{\partial z},\end{aligned}\right.$$

les équations qui définissent le rayon lumineux sont les équations différentielles du second ordre

$$(35)\qquad F = 0, \qquad G = 0, \qquad H = 0.$$

11. *Rappel de quelques théorèmes connus.* — Au moyen de ces équations, établissons rapidement quelques théorèmes, connus depuis fort longtemps, dont nous aurons à faire usage tout à l'heure.

Si nous désignons par l, m, n les cosinus directeurs de la bi-normale ν au rayon en un de ses points, ces cosinus seront, on le sait, déterminés par les deux égalités

$$(36)\quad \left\{\begin{aligned} &al + bm + cn = 0,\\ &\frac{da}{ds}l + \frac{db}{ds}m + \frac{dc}{ds}n = 0.\end{aligned}\right.$$

Multiplions respectivement les égalités (35) par l, m, n, et ajoutons membre à membre les résultats obtenus, en tenant compte des égalités (36). Nous trouvons l'égalité

$$\frac{\partial V}{\partial x}l + \frac{\partial V}{\partial y}m + \frac{\partial V}{\partial z}n = 0,$$

qui équivaut au Théorème I : *En chaque point du rayon, le plan osculateur au rayon est normal à la surface d'égal indice qui passe par ce point.*

Par le point M (x, y, z) du rayon menons à ce rayon la normale principale N dans le sens où se trouve la concavité du rayon ; soient α, β, γ les cosinus directeurs de cette droite ; si, à partir du point M, on

la suit dans ce sens sur une longueur R qui est le rayon de courbure du rayon lumineux, on atteint le centre de courbure C de ce rayon. On sait que l'on a

$$\frac{\alpha}{R} = \frac{da}{ds}, \qquad \frac{\beta}{R} = \frac{db}{ds}, \qquad \frac{\gamma}{R} = \frac{dc}{ds}. \tag{36 bis}$$

Par le même point M passe une surface d'égal indice; de ce point menons une normale n à cette surface; si cette surface ne correspond pas à une valeur maximum ou minimum de l'indice, dirigeons cette normale dans le sens où $V(x, y, z)$ va en croissant et l'indice en décroissant; nous aurons alors

$$\frac{dV}{dn} > 0. \tag{37}$$

Soient λ, μ, ν les cosinus directeurs de cette demi-normale n; nous aurons

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{dV}{dn}\lambda, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{dV}{dn}\mu, \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{dV}{dn}\nu. \tag{38}$$

Si t est la direction, de cosinus directeurs a, b, c, de la tangente au rayon menée dans le sens des arcs croissants, nous aurons

$$\cos(n, t) = \lambda a + \mu b + \nu c. \tag{39}$$

Moyennant les égalités (36 *bis*), (38) et (39), les égalités (35) deviennent

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{V}{R}\alpha + \frac{dV}{dn}[\lambda - a\cos(n, t)] = 0, \\ &\frac{V}{R}\beta + \frac{dV}{dn}[\mu - b\cos(n, t)] = 0, \\ &\frac{V}{R}\gamma + \frac{dV}{dn}[\nu - c\cos(n, t)] = 0. \end{aligned}\right. \tag{40}$$

Si nous multiplions respectivement ces égalités par α, β, γ et si nous ajoutons membre à membre les résultats obtenus, en observant que

$$\alpha a + \beta b + \gamma c = 0$$

et que

$$\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma = \cos(n, N),$$

nous trouvons l'égalité

$$\frac{1}{R} = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dn}\cos(n, N). \tag{41}$$

Cette égalité, jointe à l'inégalité (37), nous donne, en premier lieu, cette inégalité

$$\cos(n, N) < 0, \tag{42}$$

et ce théorème :

Théorème II. — *En chaque point d'un rayon lumineux, la normale principale, menée dans le sens où le rayon tourne sa concavité, fait un angle aigu avec la normale à la surface d'égal indice, menée dans le sens où l'indice va en diminuant.*

L'égalité (41) peut, d'ailleurs, s'énoncer ainsi :

Théorème III. — *Par un point quelconque* M, *du milieu, on mène la normale à la surface d'égal indice qui passe par ce point ; sur cette droite, à partir du point* M, *et dans le sens (opposé à n) où l'indice va en croissant, on porte une longueur*

$$\rho = \frac{N}{\dfrac{dN}{dn}}. \tag{43}$$

On atteint ainsi le point Γ. *Par le point* Γ *on mène un plan parallèle au plan tangent en* M *à la surface d'égal indice. Ce plan contient le centre de courbure* C *de tout rayon lumineux passant au point* M.

A ces théorèmes nous pouvons joindre la Réciproque suivante :

Les théorèmes I et III, qui résultent nécessairement des équations (35), *entraînent à leur tour l'exactitude de ces équations.*

En vertu du théorème III, en effet, la première des équations (35) ou, ce qui revient au même, la première des équations (40), devient

$$\cos(n, N)\alpha + \cos(n, t)a - \lambda = 0$$

ou, plus explicitement

$$\cos(n, N)\cos(x, N) + \cos(n, t)\cos(x, t) - \cos(n, x) = 0.$$

Mais la tangente t au rayon, la normale principale N et la bi-normale ν

forment un trièdre trirectangle, en sorte que l'on a

$$\cos(n, x) = \cos(n, N)\cos(x, N) + \cos(n, t)\cos(x, t) + \cos(n, \nu)\cos(x, \nu).$$

L'équation précédente devient donc

$$\cos(n, \nu)\cos(x, \nu) = 0$$

et elle est vérifiée si le théorème I est exact, puisque ce théorème équivaut à l'égalité

$$\cos(n, \nu) = 0.$$

Les théorèmes I et III sont donc exactement équivalents aux équations différentielles (35) *du rayon lumineux.*

Nous aurons à faire usage de cette proposition.

12. *Remarques sur le cas où le rayon touche la surface d'égal indice.* — La quantité ρ, donnée par l'égalité (43), est le rayon de courbure de tout rayon lumineux qui vient, au point M, toucher la surface d'égal indice qui passe par ce point.

Ce rayon lumineux tourne sa concavité du côté où le milieu est plus réfringent que sur la surface même. Il n'en faut pas nécessairement conclure qu'au voisinage du point considéré, le rayon se trouve nécessairement du côté de la surface où l'indice est plus grand que sur la surface même.

En effet, la courbure du rayon lumineux

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{V}\frac{dV}{dn} \qquad (43\ bis)$$

ne dépend aucunement des dérivées secondes de la fonction $V(x, y, z)$ au point considéré, et ce sont ces dérivées secondes qui déterminent la courbure de la surface au voisinage de ce point. On peut donc, sans changer la courbure du rayon, imaginer qu'on impose toutes les lois qu'on voudra à la courbure de la surface.

Considérons la section pratiquée dans la surface par le plan qui lui est normal et qui est, en même temps, osculateur au rayon. Si cette section n'est pas concave du côté où l'indice est plus grand que sur la surface, le rayon se trouve évidemment de ce côté de la surface; il en est encore de même si la section, tout en étant concave de ce côté, a

une courbure moindre que celle du rayon. Mais si cette section, concave du côté des indices croissants, a une courbure supérieure à $\frac{1}{V}\frac{dV}{dn}$ et, par conséquent, plus forte que celle du rayon lumineux, celui-ci se trouve, au voisinage du point de contact, du côté où l'indice est plus faible que sur la surface. *Il n'y a donc pas analogie entre ce phénomène et celui de la réflexion totale.*

Supposons :

1° Que la surface d'égal indice ait, au point M, au moins un de ses centres principaux de courbure situé du côté des indices croissants;

2° Si elle est à courbures opposées, que le centre de courbure γ qui se trouve du côté des plus forts indices soit compris entre le point M et le point Γ;

3° Si elle est entièrement concave du côté des plus forts indices, qu'elle ait un de ces centres principaux de courbure, γ, compris entre le point M et le point Γ, et l'autre centre principal de courbure, γ', situé au delà du point Γ par rapport au point M.

Nous voyons :

1° Que tout rayon lumineux, tangent à la surface d'égal indice, dont le plan osculateur correspond à une section normale dont le centre de courbure c est au delà du point Γ par rapport au point M (si la surface est à courbures opposées) ou entre les points Γ et γ' (si la surface est entièrement concave du côté des plus forts indices) demeure, au voisinage du point de contact, du côté de la surface où l'indice est plus fort que sur la surface;

2° Que tout rayon lumineux, tangent à la surface, pour lequel le centre de courbure c de la section normale est entre les points γ et Γ, demeure, au voisinage de la surface, du côté où l'indice est plus faible que sur la surface;

3° Au cas où le point c coïncide avec le point Γ, le rayon lumineux a, avec la surface d'égale indice, un contact du second ordre, en sorte qu'*il traverse cette surface à laquelle il est tangent.*

Il y a, en chaque point de la surface d'égal indice, deux sections normales pour lesquelles le centre de courbure c coïncide avec le point Γ;

les plans de ces deux sections forment quatre dièdres ayant pour plans bissecteurs les plans des sections normales principales.

Nous pouvons nommer ces deux sections les *sections de pénétration des rayons lumineux tangents à la surface d'égal indice*.

Sur une surface d'égal indice qui satisfait aux trois conditions précédemment énoncées, on pourra tracer deux familles de lignes telles qu'en chaque point il passe une ligne de chaque famille. Tout rayon lumineux qui vient toucher une de ces lignes traverse, au point de contact, la surface d'égal indice, et aucun autre rayon lumineux tangent ne peut traverser cette surface.

Si, au point M de la surface d'égal indice, la tangente à l'une de ces lignes fait un angle θ avec l'une des deux lignes de courbure qui passent en ce point; si cette ligne de courbure correspond à un rayon de courbure r et l'autre ligne de courbure à un rayon de courbure r', on aura

$$\frac{\cos\theta}{r} + \frac{\sin\theta}{r'} = \frac{1}{V}\frac{dV}{dn}. \tag{44}$$

Ce sera l'équation des lignes en question.

Si la surface ne remplit pas les trois conditions prescrites, ces lignes seront imaginaires.

13. *Formation de la durée de parcours d'un trajet et de la variation première de cette durée.* — Soient A_0, A_1 deux points pris à l'intérieur d'un milieu continuement hétérogène; relions ces deux points par un trajet continu C ou A_0MA_1. Si ds désigne un élément de ce trajet et V la vitesse de la lumière en un point M de l'élément ds, le temps que la lumière emploierait à parcourir ce trajet aurait pour valeur

$$T = \int_C \frac{ds}{V}. \tag{45}$$

Soit C' ou $A'_0M'A'_1$ une autre courbe infiniment voisine de la courbe C. Imaginons que la courbe C' corresponde point par point à la courbe C, de telle sorte que les deux origines A_0, A'_0 se correspondent, et qu'il en soit de même des deux extrémités A_1, A'_1. Soient δx, δy, δz les composantes du segment infiniment petit MM' qui unit deux

points correspondants M et M'; nous admettons que δx, δy, δz sont des fonctions continues de l'arc $A_0 M$ ou s; que ces fonctions admettent, quel que soit s, des dérivées finies; enfin que ces dérivées sont continues, sauf peut-être pour quelques valeurs isolées de s. Désignons, en particulier, par $\delta x_0, \delta y_0, \delta z_0$ les composantes du segment $A_0 A'_0$ et par $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1$ les composantes du segment $A_1 A'_1$.

La substitution de la courbe C' à la courbe C impose à la durée T une variation première

$$(46)\qquad \delta T = \int_C \left[\frac{\delta\, ds}{V} - \frac{1}{V^2}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\delta z \right) ds \right].$$

D'autre part, l'identité

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

donne, en tenant compte des égalités (32),

$$\delta\, ds = a\,\delta\, dx + b\,\delta\, dy + c\,\delta\, dz.$$

Mais on sait que l'on peut écrire

$$(47)\qquad \delta\, dx = \frac{d\,\delta x}{ds}\, ds, \qquad \delta\, dy = \frac{d\,\delta y}{ds}\, ds, \qquad \delta\, dz = \frac{d\,\delta z}{ds}\, ds.$$

On a donc

$$\int_C \frac{\delta\, ds}{V} = \int_C \frac{1}{V}\left(a\frac{d\,\delta x}{ds} + b\frac{d\,\delta y}{ds} + c\frac{d\,\delta z}{ds} \right) ds.$$

Une intégration par parties transforme cette égalité en la suivante :

$$(47)\qquad \int_C \frac{\delta\, ds}{V} = -\frac{a_0\,\delta x_0 + b_0\,\delta y_0 + c_0\,\delta z_0}{V_0} + \frac{a_1\,\delta x_1 + b_1\,\delta y_1 + c_1\,\delta z_1}{V_1}$$
$$- \int_C \frac{1}{V^2}\left[V\left(\frac{da}{ds}\delta x + \frac{db}{ds}\delta y + \frac{dc}{ds}\delta z \right) \right.$$
$$\left. - \left(\frac{\partial V}{\partial x}a + \frac{\partial V}{\partial y}b + \frac{\partial V}{\partial z}c \right)(a\,\delta x + b\,\delta y + c\,\delta z) \right] ds.$$

Les égalités (34), (46) et (47) permettent d'écrire

$$(48)\qquad \delta T = -\frac{a_0\,\delta x_0 + b_0\,\delta y_0 + c_0\,\delta z_0}{V_0} + \frac{a_1\,\delta x_1 + b_1\,\delta y_1 + c_1\,\delta z_1}{V_1}$$
$$- \int_C \frac{1}{V^2}(F\,\delta x + G\,\delta y + H\,\delta z)\, ds.$$

Cette égalité va être le point de départ de notre analyse.

14. *La détermination du rayon lumineux ramenée à un problème de variation.* — Supposons, tout d'abord, que les deux points A_0, A_1 soient maintenus fixes; l'égalité (48) se réduira, en vertu des égalités (34), à

$$\delta T = -\int_C \frac{1}{V^2}(F\,\delta x + G\,\delta y + H\,\delta z)\,ds. \tag{49}$$

Si les équations (35) sont vérifiées en tout point de la courbe C, il est clair que toute déformation imposée à cette courbe, sans déplacement de ses extrémités, annulera δT.

Réciproquement, il est facile de voir que o est la seule valeur, variable d'une manière continue avec s, que puisse prendre chacune des trois quantités F, G, H, si l'on veut que δT s'annule en toute déformation qui change la figure de la courbe C sans en déplacer les extrémités.

Supposons, en effet, que l'une au moins de ces trois quantités, F par exemple, prenne, en un point M de la courbe C, une valeur, différente de o, que nous désignerons par F(M). Puisque, par hypothèse, F varie d'une manière continue le long de la courbe C, on peut, sur cette courbe, marquer un arc fini D, comprenant le point M et excluant les points A_0, A_1, en tout point duquel F diffère de o et ait le signe de F(M).

Cela posé, nous déformerons la courbe C de la manière suivante : Nous donnerons à δy et à δz, tout le long de la courbe, la valeur o; δx sera également nul en dehors de l'arc D et aux deux extrémités de cet arc; la valeur de δx le long de l'arc D, variable d'une manière continue avec s, sera partout différente de o et constamment de signe contraire à F(M).

L'égalité (49) se réduira alors à

$$\delta T = -\int_D \frac{F\,\delta x}{V^2}\,ds.$$

Or il est évident que la valeur du second membre n'est point nulle, mais positive.

Nous obtenons de la sorte le théorème bien connu que voici :

Théorème IX. — *Une courbe est tracée, au sein d'un milieu isotrope et continuement hétérogène, entre deux points fixes; pour que toute déformation infiniment petite de cette courbe imposè une variation première égale à 0 au temps que la lumière mettrait à parcourir la courbe, il faut et il suffit que la figure initiale de celle-ci soit celle d'un rayon lumineux.*

Rendons maintenant aux deux extrémités A_0, A_1 de la courbe C la faculté de se déplacer, mais supposons que cette courbe soit un rayon lumineux le long duquel les équations (35) sont constamment vérifiées. L'égalité (48) prend la forme

$$\delta T = -\frac{a_0\,\delta x_0 + b_0\,\delta y_0 + c_0\,\delta z_0}{V_0} + \frac{a_1\,\delta x_1 + b_1\,\delta y_1 + c_1\,\delta z_1}{V_1}. \tag{50}$$

On en déduit sans peine les théorèmes connus de Malus, de Dupin et de Hamilton.

15. *Variation seconde de la durée de parcours d'un trajet.* — Venons maintenant au principal objet de notre recherche, qui est le suivant : Entre deux points donnés, le trajet du rayon lumineux est-il un trajet dont la durée de parcours soit minimum? Pour répondre à cette question, il nous faut former la variation seconde $\delta^2 T$ de la durée de parcours; si, pour toute déformation qui laisse immobiles les deux extrémités du trajet, cette quantité est positive, la réponse à la question posée est affirmative; elle est négative si certaines déformations font prendre à $\delta^2 T$ une valeur négative.

Nous formerons d'abord l'expression générale de $\delta^2 T$ sans supposer qu'on maintienne immobiles les extrémités de la courbe C.

L'égalité (46) nous donne

$$\begin{aligned} \delta^2 T = \int_C \Bigg[& \frac{\delta^2\,ds}{V} - \frac{2}{V^2}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\,\delta z\right)\delta\,ds \\ & + \frac{2}{V^2}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\,\delta z\right)^2 ds \\ & - \frac{1}{V^2}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\,\delta z\right)^{(2)} ds \\ & - \frac{1}{V^2}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\,\delta^2 x + \frac{\partial V}{\partial y}\,\delta^2 y + \frac{\partial V}{\partial z}\,\delta^2 z\right) ds \Bigg]. \end{aligned} \tag{51}$$

L'égalité

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

nous donne les deux égalités

$$ds\,\delta\,ds = dx\,\delta\,dx + dy\,\delta\,dy + dz\,\delta\,dz,$$
$$ds\,\delta^2\,ds + (\delta\,ds)^2 = dx\,\delta^2\,dx + dy\,\delta^2\,dy + dz\,\delta^2\,dz + (\delta\,dx)^2 + (\delta\,dy)^2 + (\delta\,dz)^2.$$

Si l'on observe qu'on a

$$\frac{dx}{ds} = a, \qquad \frac{dy}{ds} = b, \qquad \frac{dz}{ds} = c,$$
$$\delta\,dx = d\,\delta x, \qquad \delta\,dy = d\,\delta y, \qquad \delta\,dz = d\,\delta z,$$
$$\delta^2\,dx = d\delta^2 x, \qquad \delta^2\,dy = d\delta^2 y, \qquad \delta^2\,dz = d\delta^2 z,$$

les deux égalités précédemment écrites deviennent

$$(52)\qquad \delta\,ds = ad\,\delta x + bd\,\delta y + cd\,\delta z,$$

$$(53)\qquad \delta^2\,ds = ad\delta^2 x + bd\delta^2 y + cd\delta^2 z + \frac{(d\,\delta x)^2 + (d\,\delta y)^2 + (d\,\delta z)^2 - (ad\,\delta x + bd\,\delta y + c\,d\,\delta z)^2}{ds}.$$

En vertu de l'égalité (53), nous pouvons écrire

$$(54)\qquad \int_C \frac{\delta^2\,ds}{V} = \int_C \frac{ad\delta^2 x + bd\delta^2 y + cd\delta^2 z}{V} + \int_C \frac{(d\,\delta x)^2 + (d\,\delta y)^2 + (d\,\delta z)^2 - (ad\,\delta x + bd\,\delta y + cd\,\delta z)^2}{V}.$$

Mais une intégration par parties nous donne

$$(55)\qquad \int_C \frac{ad\delta^2 x + bd\delta^2 y + cd\delta^2 z}{V}$$
$$= -\frac{a_0\delta^2 x_0 + b_0\delta^2 y_0 + c_0\delta^2 z_0}{V_0} + \frac{a_1\delta^2 x_1 + b_1\delta^2 y_1 + c_1\delta^2 z_1}{V_1}$$
$$+ \int_C \frac{1}{V^2}\left\{ \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}a + \frac{\partial V}{\partial y}b + \frac{\partial V}{\partial z}c\right)a - V\frac{da}{ds}\right]\delta^2 x \right.$$
$$+ \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}a + \frac{\partial V}{\partial y}b + \frac{\partial V}{\partial z}c\right)b - V\frac{db}{ds}\right]\delta^2 y$$
$$\left. + \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}a + \frac{\partial V}{\partial y}b + \frac{\partial V}{\partial z}c\right)c - V\frac{dc}{ds}\right]\delta^2 z \right\} ds.$$

D'autre part, désignons par p le segment dont les composantes sont $d\delta x$, $d\delta y$, $d\delta z$. Nous aurons

$$\begin{aligned}(d\,\delta x)^2+(d\,\delta y)^2+(d\,\delta z)^2 &= p^2,\\ a d\,\delta x + b d\,\delta y + c d\,\delta z &= p\cos(p, ds),\end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$(56)\qquad (d\,\delta x)^2+(d\,\delta y)^2+(d\,\delta z)^2-(a d\,\delta x+b d\,\delta y+c d\,\delta z)^2=p^2\sin^2(p, ds).$$

Si nous tenons compte des égalités (34), (54), (55) et (56), l'égalité (51) devient

$$\begin{aligned}(57)\qquad \delta^2 T = {} & \frac{a_1\delta^2 x_1+b_1\delta^2 y_1+c_1\delta^2 z_1}{V_1}-\frac{a_0\delta^2 x_0+b_0\delta^2 y_0+c_0\delta^2 z_0}{V_0} && \text{(I)}\\ & -\int_C \frac{F\delta^2 x+G\delta^2 y+H\delta^2 z}{V^2}\,ds && \text{(II)}\\ & -2\int_C \frac{1}{V^2}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\delta x+\frac{\partial V}{\partial y}\delta y+\frac{\partial V}{\partial z}\delta z\right)\delta\, ds && \text{(III)}\\ & +2\int_C \frac{1}{V^3}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\delta x+\frac{\partial V}{\partial y}\delta y+\frac{\partial V}{\partial z}\delta z\right)^2 ds && \text{(IV)}\\ & -\int_C \frac{1}{V^2}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\delta x+\frac{\partial V}{\partial y}\delta y+\frac{\partial V}{\partial z}\delta z\right)^{(2)} ds && \text{(V)}\\ & +\int_C \frac{p^2\sin^2(p, ds)}{V\,ds}. && \text{(VI)}\end{aligned}$$

Cette expression entièrement générale de $\delta^2 T$ va se simplifier beaucoup dans le cas particulier qui nous intéresse.

En premier lieu, si nous supposons que la figure initiale de la courbe C soit celle d'un rayon lumineux, F, G, H sont nuls en tout point de cette courbe, et, au second membre de l'égalité (57), le terme (II) disparaît.

D'autre part, si l'on maintient immobiles les deux extrémités de la courbe C, le terme (I) est identiquement nul.

Mais, en cette dernière hypothèse, si l'on suppose en outre que la courbe C ne touche aucune surface d'égal indice, on peut assurément établir la correspondance point par point des deux courbes C et C' de telle sorte qu'à tout point M de la courbe C corresponde un point M' de la courbe C', situé sur la même surface d'égal indice que le point M.

Cela revient à dire qu'on peut, sans diminuer en rien la généralité de la déformation imposée à une courbe C d'extrémités immobiles, assujettir δx, δy, δz à vérifier, en tout point de cette courbe C, la condition

$$(58)\qquad \frac{\partial V}{\partial x}\delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\delta z = 0.$$

Cette condition permet d'effacer, au second membre de l'égalité (57), les termes (III) et (IV).

Désignons par Δ la grandeur du déplacement dont δx, δy, δz sont les composantes, et par A, B, C les cosinus directeurs de ce déplacement; en vertu de la condition (58), ce seront les cosinus directeurs d'une tangente menée par le point M à la surface d'égal indice. Nous pourrons évidemment écrire

$$(59)\qquad \left(\frac{\partial V}{\partial x}\delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\delta z\right)^{(2)} = \left(\frac{\partial V}{\partial x}A + \frac{\partial V}{\partial y}B + \frac{\partial V}{\partial z}C\right)^{(2)}\Delta^2.$$

Si nous supposons simultanément remplies toutes les conditions que nous venons d'énumérer et si nous tenons compte de l'égalité (59), l'égalité (57) se réduira à la forme très simple :

$$(60)\qquad \delta^2 T = -\int_C \left(\frac{\partial V}{\partial x}A + \frac{\partial V}{\partial y}B + \frac{\partial V}{\partial z}C\right)^{(2)} \frac{\Delta^2}{V^2}\,ds + \int_C \frac{p^2 \sin^2(p, ds)}{V\,ds}.$$

Cette égalité va nous permettre de justifier les théorèmes que nous avions en vue d'établir.

16. Théorème V. — *Si, entre les deux extrémités d'un rayon lumineux, aucune surface d'égal indice n'est rencontrée deux fois par le rayon; si, en outre, aucune surface d'égal indice ne présente, au point où elle est rencontrée par le rayon, de section normale qui soit concave du côté des indices croissants, le rayon lumineux dessine, entre les deux points fixes donnés, une ligne dont la durée de parcours par la lumière est minimum.*

Pour démontrer ce théorème, il suffit de prouver que, dans ces conditions, le second membre de l'égalité (60) est positif pour toute déformation de la courbe C.

Voyons quel est, en chaque point M du rayon, et pour chaque direction, tangente à la surface d'égal indice, du déplacement Δ, le signe de

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x} A + \frac{\partial V}{\partial y} B + \frac{\partial V}{\partial z} C\right)^{(2)}.$$

La surface d'égal indice qui passe au point M où V est la vitesse de la lumière est représentée par l'équation

$$\Psi(x, y, z) = V(x, y, z) - V = 0.$$

Le premier membre de cette équation devient positif du côté de la surface où $V(x, y, z)$ surpasse V, c'est-à-dire du côté des plus faibles indices. D'après l'hypothèse faite, aucune section normale pratiquée, au point M, dans la surface d'égal indice n'est convexe de ce côté. On a donc assurément, en vertu de l'inégalité (5 *bis*),

$$(61) \qquad \left(\frac{\partial V}{\partial x} A + \frac{\partial V}{\partial y} B + \frac{\partial V}{\partial z} C\right)^{(2)} \geqq 0.$$

De plus, la section normale dont la tangente en M a pour cosinus directeurs A, B, C, a un rayon de courbure, fini ou infini, $\mathcal{R}$. En vertu de l'égalité (6 *bis*), on a

$$(62) \qquad \left(\frac{\partial V}{\partial x} A + \frac{\partial V}{\partial y} B + \frac{\partial V}{\partial z} C\right)^{(2)} = -\frac{1}{\mathcal{R}} \frac{dV}{dn}.$$

La condition (61) et l'égalité (62), jointes à l'expression (60) de $\delta^2 T$, nous permet d'écrire

$$(63) \qquad \delta^2 T \geqq \int_C \frac{p^2 \sin^2(p, ds)}{V\, ds}.$$

Le signe d'égalité est, d'ailleurs, réservé au cas où tout déplacement Δ serait tangent à une section normale de rayon de courbure infini pratiquée dans la surface d'égal indice.

Le théorème que nous voulons établir est donc démontré si, par aucun point d'incidence, on ne peut mener une droite qui ait, avec la surface d'égal indice qui passe au même point, un contact d'ordre supérieur au premier.

Mais il importe de lever la restriction qui pèse encore sur notre théorème, afin de pouvoir l'appliquer, par exemple, au cas où toutes les surfaces d'égal indice seraient des plans. Elle sera levée si nous démontrons la proposition suivante :

17. *Il est impossible d'imposer au rayon lumineux considéré une déformation qui laisse immobiles ses deux extrémités, et qui vérifie en tous points les conditions*

$$\mathcal{R} = x. \tag{64}$$

$$p \sin(p, ds) = 0. \tag{65}$$

Examinons la condition (65). Elle se décompose en deux conditions dont la première est

$$p = 0$$

et équivaut aux trois égalités

$$d\,\delta x = 0, \qquad d\,\delta y = 0, \qquad d\,\delta z = 0, \tag{66}$$

tandis que la seconde est

$$\sin(p, ds) = 0.$$

Cette dernière exprime que les deux segments p et ds sont parallèles entre eux ou, en d'autres termes, que leurs composantes sont respectivement proportionnelles :

$$\frac{d\,\delta x}{dx} = \frac{d\,\delta y}{dy} = \frac{d\,\delta z}{dz}. \tag{67}$$

D'ailleurs, les égalités (66) peuvent être regardées comme des cas particuliers des égalités (67); celles-ci équivalent donc à la condition (65).

Les égalités (67) peuvent encore s'écrire

$$\frac{\delta\,dx}{dx} = \frac{\delta\,dy}{dy} = \frac{\delta\,dz}{dz}. \tag{67 bis}$$

Cette nouvelle forme donnée aux équations (67) met en évidence leur signification géométrique. En effet, les cosinus directeurs de la

tangente en M à la courbe C sont respectivement proportionnels à dx, dy, dz; les cosinus directeurs de la tangente en M' à la courbe C' sont respectivement proportionnels à $dx + \delta dx$, $dy + \delta dy$, $dz + \delta dz$. Les égalités (67 *bis*), équivalentes à la condition (65), expriment donc cette proposition : *En leurs points correspondants* M, M', *les deux courbes* C, C' *ont des tangentes parallèles.*

Il est facile de trouver la valeur commune des trois rapports (67) ou (67 *bis*); l'égalité

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

donne

$$ds \, \delta \, ds = dx \, \delta \, dx + dy \, \delta \, dy + dz \, \delta \, dz.$$

On en déduit immédiatement que la valeur commune des trois rapports (67 *bis*) et, partant, des trois rapports (67) est

$$\frac{\delta \, ds}{ds}. \tag{67 ter}$$

Ces préliminaires posés, voici la proposition que nous allons établir : *Si une portion de la courbe* C' *se déduit d'une portion de la courbe* C *par une déformation telle que les conditions* (64) *et* (65) *soient vérifiées en chaque point, cette portion de la courbe* C' *appartient, comme la courbe* C, *au parcours d'un rayon lumineux.*

Soient M, M_1 deux points infiniment voisins pris sur le rayon C; soient V, V_1 les valeurs respectives de la vitesse de la lumière aux deux points M, M_1 : supposons, pour fixer les idées, V_1 supérieur à V.

Le point M' qui, sur la courbe C', correspond au point M de la courbe C, se trouve, comme ce dernier point, sur la surface Ψ que représente l'équation

$$V(x, y, z) = V.$$

Le point M'_1 qui, sur la courbe C', correspond au point M_1 de la courbe C, appartient, comme ce dernier point, à la surface Ψ_1 dont l'équation est

$$V(x, y, z) = V_1.$$

En vertu de la condition (64), la droite dont MM' est un segment infiniment petit est tangente à une section normale de la surface Ψ,

section dont le centre de courbure est rejeté à l'infini ; la surface Ψ n'étant pas à courbures opposées, il faut ou bien que son indicatrice en M se réduise à deux droites parallèles à MM′ ou bien que ses centres principaux de courbure relatifs au point M soient tous deux rejetés à l'infini ; si donc n et n' sont les normales en M et M′ à la surface Ψ, ces deux normales sont parallèles entre elles.

D'autre part, en vertu de la condition (65), les tangentes en M′ et M'_1 à la courbe C′ sont respectivement parallèles aux tangentes en M et M_1 à la courbe C, en sorte que le plan osculateur en M′ à la courbe C′ est parallèle au plan osculateur en M à la courbe C.

Mais, comme la courbe C est un rayon lumineux, le plan osculateur en M à cette courbe contient (théorème I) la normale n à la surface Ψ. Donc *le plan osculateur en* M′ *à la courbe* C′ *contient la normale* n' *menée par le même point à la surface d'égal indice* Ψ.

Soient C le centre de courbure relatif au point M pour la courbe C, et C′ le centre de courbure relatif au point M′ pour la courbe C′.

Le plan osculateur et la tangente à la courbe C′ en M′ sont, en vertu de la condition (65), respectivement parallèles au plan osculateur et à la tangente à la courbe C au point M. La normale principale M′C′ ou N′ à la courbe C′ en M′ est donc parallèle à la normale MC ou N à la courbe C en M. On a ainsi

$$\cos(N, n) = \cos(N', n'). \tag{68}$$

Pour la même raison, la normale principale M_1C' à la courbe C′ en M_1 est parallèle à la normale principale M_1C à la courbe C en M_1. Les deux triangles MCM_1, $M'C'M_1$ sont donc semblables. Si $R = MC$ et $R' = M'C'$ sont, en M et M′, les rayons de courbure respectifs des courbes C et C′, on a

$$\frac{R'}{R} = \frac{M'M_1}{MM_1}.$$

Soient P, P′ les points où les normales n, n' percent la surface d'égal indice Ψ_1. Les deux triangles M_1MP, $M_1M'P'$ ont leurs côtés parallèles et sont semblables, en sorte que l'égalité précédente peut encore s'écrire

$$\frac{R'}{R} = \frac{M'P'}{MP}.$$

Mais, d'autre part, nous avons

$$\frac{dV}{dn} = \frac{V_1 - V}{MP}, \qquad \frac{dV}{dn'} = \frac{V_1 - V}{M'P'}.$$

Nous voyons donc que les conditions (64) et (65) entraînent l'égalité

(69) $$\frac{R}{\frac{dV}{dn'}} = \frac{R}{\frac{dV}{dn}}.$$

Si nous supposons maintenant que la courbe C soit un rayon lumineux, nous avons l'égalité

(41) $$\frac{1}{R} = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dn}\cos(n, N).$$

Les égalités (68) et (69) nous apprennent alors qu'*en tout point de la portion considérée de la courbe C', on a l'égalité*

$$\frac{1}{R'} = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dn'}\cos(n', N').$$

En vertu de ce que nous avons vu au n° **11**, les deux propriétés de la courbe C' que nous venons de démontrer équivalent à celle-ci : La portion considérée de la courbe C' dessine un trajet de rayon lumineux.

Cette proposition n'est exacte, bien entendu, qu'aux infiniment petits du second ordre près.

Nous allons maintenant demander à l'Algèbre une seconde démonstration de cette même propriété, et cela de la manière suivante :

Si les équations (35) sont vérifiées en tout point d'une certaine courbe C et si, dans le milieu considéré, l'on soumet une portion de cette courbe à une déformation telle que les conditions (64) et (65) soient vérifiées en tout point, les équations (35) sont encore, aux infiniment petits du second ordre près, vérifiées en tout point de la courbe deformée C'.

Soient A, B, C les cosinus directeurs d'une tangente en M à la surface Ψ et supposons, comme l'exige la condition (64), que cette tangente corresponde à une section normale dont le centre de courbure

soit rejeté à l'infini. Nous aurons, en vertu des égalités (58) et (62),

$$(70)\quad \begin{cases} \mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2=1, \\ \dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\mathrm{A}+\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}\mathrm{B}+\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}\mathrm{C}=0, \\ \left(\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\mathrm{A}+\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}\mathrm{B}+\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}\mathrm{C}\right)^{(2)}=0. \end{cases}$$

D'autre part, soit A′, B′, C′ un système quelconque de valeurs vérifiant les deux égalités

$$\mathrm{A}'^2+\mathrm{B}'^2+\mathrm{C}'^2=1,$$

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\mathrm{A}'+\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}\mathrm{B}'+\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}\mathrm{C}'=0.$$

En vertu de la condition (61), on devra avoir

$$\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\mathrm{A}'+\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}\mathrm{B}'+\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}\mathrm{C}'\right)^{(2)}\geq 0.$$

On en tire sans peine cette conclusion: Tout système de valeurs de $\Delta\mathrm{A}$, $\Delta\mathrm{B}$, $\Delta\mathrm{C}$ qui vérifie les deux premières équations

$$(71)\quad \begin{cases} \mathrm{A}\,\Delta\mathrm{A}+\mathrm{B}\,\Delta\mathrm{B}+\mathrm{C}\,\Delta\mathrm{C}=0, \\ \dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\Delta\mathrm{A}+\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}\Delta\mathrm{B}+\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}\Delta\mathrm{C}=0, \\ \left(\dfrac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial x^2}\mathrm{A}+\dfrac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial x\,\partial y}\mathrm{B}+\dfrac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial x\,\partial z}\mathrm{C}\right)\Delta\mathrm{A} \\ +\left(\dfrac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial y\,\partial x}\mathrm{A}+\dfrac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial y^2}\mathrm{B}+\dfrac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial y\,\partial z}\mathrm{C}\right)\Delta\mathrm{B} \\ +\left(\dfrac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial z\,\partial x}\mathrm{A}+\dfrac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial z\,\partial y}\mathrm{B}+\dfrac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial z^2}\mathrm{C}\right)\Delta\mathrm{C}=0, \end{cases}$$

vérifie aussi la troisième.

En d'autres termes, il doit exister deux quantités L et L′ telles qu'on ait

$$(72)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial x^2}\mathrm{A}+\dfrac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial x\,\partial y}\mathrm{B}+\dfrac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial x\,\partial z}\mathrm{C}+\mathrm{L}\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}+\mathrm{L}'\mathrm{A}=0, \\ \dfrac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial y\,\partial x}\mathrm{A}+\dfrac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial y^2}\mathrm{B}+\dfrac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial y\,\partial z}\mathrm{C}+\mathrm{L}\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}+\mathrm{L}'\mathrm{B}=0, \\ \dfrac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial z\,\partial x}\mathrm{A}+\dfrac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial z\,\partial y}\mathrm{B}+\dfrac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial z^2}\mathrm{C}+\mathrm{L}\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}+\mathrm{L}'\mathrm{C}=0. \end{cases}$$

Si, d'ailleurs, on multiplie respectivement ces équations par A, B, C et si l'on ajoute membre à membre les résultats, en tenant compte des égalités (70), on trouve

$$L' = 0. \tag{73}$$

Les composantes δx, δy, δz du déplacement MM' ou Δ du point M sont respectivement proportionnelles à A, B, C; les égalités (72) et (73) nous apprennent donc qu'il existe une quantité Λ telle que l'on ait les trois égalités

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\,\delta x + \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\,\delta y + \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial z}\,\delta z = \Lambda\frac{\partial V}{\partial x},\\ &\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial x}\,\delta x + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\,\delta y + \frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z}\,\delta z = \Lambda\frac{\partial V}{\partial y},\\ &\frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial x}\,\delta x + \frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial y}\,\delta y + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\,\delta z = \Lambda\frac{\partial V}{\partial z}. \end{aligned}\right. \tag{74}$$

Nous allons déterminer la valeur de Λ.

Exprimons, à cet effet, que $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\,\delta z\right)$ doit être nul en tout point de la courbe C soumise à la déformation; nous en conclurons que l'on a aussi, en tout point de cette courbe,

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\,\delta z\right) = 0$$

ou bien

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\,\delta x + \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\,\delta y + \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial z}\,\delta z\right) a\\ &+\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial x}\,\delta x + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\,\delta y + \frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z}\,\delta z\right) b\\ &+\left(\frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial x}\,\delta x + \frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial y}\,\delta y + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\,\delta z\right) c\\ &+\frac{\partial V}{\partial x}\,\frac{d\,\delta x}{ds} + \frac{\partial V}{\partial y}\,\frac{d\,\delta y}{ds} + \frac{\partial V}{\partial z}\,\frac{d\,\delta z}{ds} = 0. \end{aligned} \tag{75}$$

Mais les égalités (67), (67 *ter*) peuvent s'écrire

$$\frac{d\,\delta x}{ds} = a\,\frac{\delta\,ds}{ds}, \qquad \frac{d\,\delta y}{ds} = b\,\frac{\delta\,ds}{ds}, \qquad \frac{d\,\delta z}{ds} = c\,\frac{\delta\,ds}{ds}.$$

En vertu de ces égalités et des égalités (74), l'égalité (75) devient

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}a + \frac{\partial V}{\partial y}b + \frac{\partial V}{\partial z}c\right)\left(\Lambda + \frac{\delta\, ds}{ds}\right) = 0.$$

Le facteur $\left(\frac{\partial V}{\partial x}a + \frac{\partial V}{\partial y}b + \frac{\partial V}{\partial z}c\right)$ n'est pas nul, car nous avons supposé que le rayon ne touchait jamais une surface d'égal indice. Nous avons donc

$$(76)\qquad \Lambda + \frac{\delta\, ds}{ds} = 0.$$

Considérons maintenant la quantité F donnée par la première égalité (34), et calculons la variation δF qu'elle éprouve lorsqu'on passe du point M de la courbe C au point correspondant M' de la courbe C'.

En vertu de la condition (65), que nous supposons imposée à la déformation, la tangente en M' à la courbe C' est parallèle à la tangente en M à la courbe C, en sorte que les variations de a, b, c sont nulles; V a aussi même valeur au point M et au point M'. On a donc

$$(77)\qquad \begin{aligned}\delta F = V\delta\frac{da}{ds} &- \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\delta x + \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\delta y + \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial z}\delta z\right)(a^2 - 1)\\ &- \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial x}\delta x + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\delta y + \frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z}\delta z\right)ab\\ &- \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial x}\delta x + \frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial y}\delta y + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\delta z\right)ac.\end{aligned}$$

La quantité a ayant même valeur en deux points correspondants quelconques des courbes C et C', on a évidemment

$$\delta\frac{da}{ds} = \frac{da}{ds'} - \frac{da}{ds} = -\frac{da}{ds}\frac{ds' - ds}{ds}$$

ou encore

$$(78)\qquad \delta\frac{da}{ds} = -\frac{da}{ds}\frac{\delta\, ds}{ds}.$$

En vertu des égalités (34), (76) et (78), l'égalité (77) devient la première des égalités

$$(79)\qquad \delta F = -F\frac{\delta\, ds}{ds},\qquad \delta G = -G\frac{\delta\, ds}{ds},\qquad \delta H = -H\frac{\delta\, ds}{ds}.$$

Ces égalités ne supposent pas que la courbe C que l'on soumet à la

déformation soit le tracé d'un rayon lumineux. Si l'on introduit maintenant cette supposition, les égalités

$$(35) \qquad F = 0, \qquad G = 0, \qquad H = 0$$

seront vérifiées en tout point de la courbe C, et alors les égalités (79) deviendront les égalités

$$(80) \qquad \delta F = 0, \qquad \delta G = 0, \qquad \delta H = 0$$

que nous avions annoncées.

La courbe C' doit avoir, en commun avec la courbe C, au moins les deux extrémités A_0, A_1 : elle peut avoir d'autres points communs avec la courbe C; elle peut même avoir certains arcs communs avec cette dernière courbe que l'on a pu ne pas déformer en son entier.

Soit donc un arc de la courbe C', distinct de la courbe C, et rejoignant la courbe C en ses deux extrémités B_0, B_1.

Entre les deux points B_0, B_1, chacune des deux courbes C, C' trace la marche d'un rayon lumineux en tout point duquel les équations (35) sont vérifiées.

Mais au point B_0 de la courbe C correspond le même point sur la courbe C'; au point B_1 sur la courbe C correspond le même point B_1 sur la courbe C'. Les deux courbes C et C' auraient donc même tangente au point B_0 et même tangente au point B_1.

Je dis, dès lors, que les deux courbes C et C' ne peuvent être distinctes, *du moins si les coordonnées x, y, z d'un point* M *de l'arc* B_0B_1 *de la courbe* C *s'expriment en fonctions analytiques de l'arc s compté sur cette courbe, et si les coordonnées d'un point* M' *de l'arc* B_0B_1 *de la courbe* C' *s'expriment en fonctions analytiques de l'arc s' compté sur cette courbe.*

En effet, en tout point de l'arc B_0 et B_1 de la courbe C, nous devons avoir les égalités (80); nous devons donc avoir aussi, en tout point de cet arc, la triple suite d'équations

$$(80') \qquad \frac{d}{ds}\delta F = 0, \qquad \frac{d}{ds}\delta G = 0, \qquad \frac{d}{ds}\delta H = 0,$$

$$(80'') \qquad \frac{d^2}{ds^2}\delta F = 0, \qquad \frac{d^2}{ds^2}\delta G = 0, \qquad \frac{d^2}{ds^2}\delta H = 0,$$

$$\dots\dots \qquad \dots\dots \qquad \dots\dots \qquad \dots\dots$$

Appliquons les équations (80) au point B_0, en remarquant qu'en ce point

$$(81) \qquad \begin{cases} x' = x, & y' = y, & z' = z, \\ a' = a, & b' = b, & c' = c. \end{cases}$$

Les équations (80) nous donneront

$$(81') \qquad \frac{da'}{ds'} = \frac{da}{ds}, \qquad \frac{db'}{ds'} = \frac{db}{ds'}, \qquad \frac{dc'}{ds'} = \frac{dc}{ds}.$$

Si nous tenons compte des égalités (81) et (81'), les équations (80) nous donneront

$$(81'') \qquad \frac{d^2 a'}{ds'^2} = \frac{d^2 a}{ds^2}, \qquad \frac{d^2 b'}{ds'^2} = \frac{d^2 b}{ds^2}, \qquad \frac{d^2 c'}{ds'^2} = \frac{d^2 c}{ds^2}.$$

En vertu des égalités (81), (81'), (81''), les égalités (80'') deviendront

$$(81''') \qquad \frac{d^3 a'}{ds'^3} = \frac{d^3 a}{ds^3}, \qquad \frac{d^3 b'}{ds'^3} = \frac{d^3 a}{ds^3}, \qquad \frac{d^3 c'}{ds'^3} = \frac{d^3 a}{ds^3}.$$

Et ainsi de suite.

Au point B_0, donc, la fonction $x'(s)$ et toutes ses dérivées prennent les mêmes valeurs que la fonction $x(s)$ et toutes ses dérivées. Les deux fonctions sont donc identiques si elles sont analytiques. On en peut dire autant des deux fonctions $y(s)$, $y'(s)$ et des deux fonctions $z(s)$, $z'(s)$.

On remarquera que cette démonstration est rendue légitime par ce fait que la vitesse V de la lumière n'est pas nulle au point B_0.

Il est ainsi prouvé qu'on ne peut, à la courbe C, imposer une déformation qui vérifie en tout point les conditions (64) et (65); cela achève de démontrer le théorème qui a été énoncé au début du n° **16**.

18. Théorème VI. — *En un milieu continuement hétérogène et illimité est tracé un rayon lumineux plan, indéfini dans les deux sens, le long duquel la vitesse de la lumière a un sens unique de variation; lorsqu'on s'éloigne indéfiniment, dans un sens donné, suivant ce rayon, la vitesse de la lumière tend vers une limite déterminée non nulle; elle tend vers une limite déterminée, nécessairement différente, et non nulle, lorsqu'on s'éloigne indéfiniment suivant le rayon, mais en sens contraire.*

Au point où le rayon rencontre une surface d'égal indice quelconque, la section normale pratiquée dans cette surface par un plan perpendiculaire à celui du rayon tourne sa concavité du côté des indices croissants; en outre, le rayon de courbure de cette section est, en général, fini.

Dans ces conditions, on peut, sur le rayon, prendre deux points tels que le principe de Fermat ne puisse être exact pour la partie du rayon qui est comprise entre ces deux points.

Soit M un point où le rayon rencontre la surface d'égal indice Ψ; le plan du rayon est normal à la surface Ψ, en sorte que la normale ν à ce plan est tangente à la surface Ψ. Nous pouvons donc imposer au rayon une déformation telle que le déplacement Δ ou MM′ de chaque point M soit normal au plan du rayon. Ce déplacement est tangent à une section normale de la surface Ψ; cette section est concave du côté des plus forts indices et son rayon de courbure $\mathcal{R}$ est, en général, fini. Si A, B, C sont les cosinus directeurs de la normale au plan du rayon, nous avons,

$$\delta x = \mathrm{A}\Delta, \qquad \delta y = \mathrm{B}\Delta, \qquad \delta z = \mathrm{C}\Delta.$$

A, B, C ayant même valeur en tout point du rayon, on a

$$d\,\delta x = \mathrm{A}\frac{d\Delta}{ds}ds, \qquad d\,\delta y = \mathrm{B}\frac{d\Delta}{ds}ds, \qquad d\,\delta z = \mathrm{C}\frac{d\Delta}{ds}ds.$$

En vertu de ces égalités, de l'égalité

$$\mathrm{A}a + \mathrm{B}b + \mathrm{C}c = 0$$

et de l'égalité (56), on peut écrire

$$p^2 \sin^2(p, ds) = \left(\frac{d\Delta}{ds}\right)^2 ds^2. \tag{82}$$

D'autre part, un raisonnement semblable à celui qui a fourni l'égalité (62) donne ici l'égalité

$$\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\mathrm{A} + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}\mathrm{B} + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}\mathrm{C}\right)^{(2)} = \frac{1}{\mathcal{R}}\frac{d\mathrm{V}}{dn} \tag{83}$$

où $\frac{d\mathrm{V}}{dn}$ est positif.

En vertu des égalités (82) et (83), l'égalité (60) va devenir

$$(84)\qquad \delta^2 T = -\int_C \frac{1}{V^2 \mathcal{R}} \frac{dV}{dn} \Delta^2 \, ds + \int_C \frac{1}{V} \left(\frac{d\Delta}{ds}\right)^2 ds.$$

Sur le rayon indéfini marquons, arbitrairement d'ailleurs, deux points fixes B_0, B_1. Soient A_0, A_1 deux points pris hors du segment $B_0 B_1$, l'un en deçà de B_0, l'autre au delà de B_1.

Choisissons la fonction $\Delta(s)$ de la manière suivante : Nulle en A_0, elle croît sans cesse lorsqu'on s'approche du point B_0 pour atteindre, en ce point, une certaine valeur D; $\frac{d\Delta}{ds}$ n'est, d'ailleurs, infini en aucun point de l'arc $A_0 B_0$; $\Delta(s)$ garde invariablement cette valeur D tout le long de l'arc $B_0 B_1$: de B_1 en A_1, $\Delta(s)$ diminue sans cesse pour atteindre, en A_1, la valeur 0; en cette diminution, $\frac{d\Delta}{ds}$ n'est jamais infini.

Nous voyons alors :

1° Que l'on a

$$\int_{B_0 B_1} \frac{1}{V^2 \mathcal{R}} \frac{dV}{dn} \Delta^2 \, ds = D^2 P,$$

P étant une certaine quantité positive qui demeure invariable si les deux points B_0, B_1 demeurent fixes sur le rayon considéré;

2° Que l'on a

$$\int_{B_0 B_1} \frac{1}{V} \left(\frac{d\Delta}{ds}\right)^2 ds = 0;$$

3° Que l'on a

$$\int_{A_0 B_0} \frac{1}{V^2 \mathcal{R}} \frac{dV}{dn} \Delta^2 \, ds > 0, \qquad \int_{B_1 A_1} \frac{1}{V^2 \mathcal{R}} \frac{dV}{dn} \Delta^2 \, ds < 0.$$

Dès lors, l'égalité (84) donne l'inégalité

$$(85)\qquad \delta^2 T < \int_{A_0 B_0} \frac{1}{V} \left(\frac{d\Delta}{ds}\right)^2 ds + \int_{B_1 A_1} \frac{1}{V} \left(\frac{d\Delta}{ds}\right)^2 ds - PD^2.$$

Soit U la limite inférieure des valeurs de V le long du rayon indéfini dans les deux sens.

Nous pourrons, *a fortiori*, remplacer l'inégalité (85) par l'inégalité

$$(86)\qquad \delta^2 T < \frac{1}{U} \left| \int_{A_0 B_0} \left(\frac{d\Delta}{ds}\right)^2 ds + \int_{B_1 A_1} \left(\frac{d\Delta}{ds}\right)^2 ds \right| - PD^2.$$

Éloignons maintenant le point A_0 du point B_0, suivant le rayon, et amenons-le ainsi à une nouvelle position α_0, de telle sorte que le rapport de l'arc $\alpha_0 B_0$ à l'arc $A_0 B_0$ ait une certaine valeur λ supérieure à 1.

A tout point M, de l'arc $A_0 B_0$, faisons correspondre un point μ, de l'arc $\alpha_0 B_0$, tel que l'arc μB_0 soit λ fois l'arc MB_0.

A deux points infiniment voisins M, M', séparés par une distance ds, de l'arc $A_0 B_0$ correspondront deux points infiniment voisins μ, μ' de l'arc $\alpha_0 B_0$, et la distance $d\sigma$ de ces deux points aura pour valeur λds.

Pour définir la déformation de l'arc $\alpha_0 B_0$, nous donnerons au point μ un déplacement ω, normal au plan du rayon, et égal au déplacement Δ du point correspondant M de l'arc $A_0 B_0$. Visiblement, en ces deux points correspondants μ et M, nous aurons

$$\frac{d\omega}{d\sigma} = \frac{1}{\lambda}\frac{d\Delta}{ds}.$$

Nous aurons donc

$$(87) \qquad \int_{\alpha_0 B_0} \left(\frac{d\omega}{d\sigma}\right)^2 d\sigma = \frac{1}{\lambda}\int_{A_0 B_0} \left(\frac{d\Delta}{ds}\right)^2 ds.$$

En substituant de même à l'arc $B_1 A_1$ un arc $B_1 \alpha_1$ qui soit λ fois plus grand, nous aurons

$$(87\ bis) \qquad \int_{B_1 \alpha_1} \left(\frac{d\omega}{d\sigma}\right)^2 d\sigma = \frac{1}{\lambda}\int_{B_1 A_1} \left(\frac{d\Delta}{ds}\right)^2 ds.$$

Si Θ est la durée de parcours de la partie $\alpha_0 \alpha_1$ du rayon, on aura, en la déformation considérée, l'inégalité suivante, analogue à l'inégalité (86), et où U, P, D auront les même valeurs qu'en l'égalité (86) :

$$\delta^2\Theta < \frac{1}{U}\left[\int_{\alpha_0 B_0} \left(\frac{d\omega}{d\sigma}\right)^2 d\sigma + \int_{B_1 \alpha_1} \left(\frac{d\omega}{d\sigma}\right)^2 d\sigma\right] - PD^2.$$

En vertu des égalités (87) et (87 *bis*), cette inégalité peut s'écrire

$$(88) \qquad \delta^2\Theta < \frac{1}{\lambda U}\left[\int_{A_0 B_0} \left(\frac{d\Delta}{ds}\right)^2 ds + \int_{B_1 A_1} \left(\frac{d\Delta}{ds}\right)^2 ds\right] - PD^2.$$

Au second membre de cette inégalité (88), toutes les quantités, sauf λ, demeurent invariables lorsqu'on fait varier λ. Or, on peut prendre λ assez grand pour que l'inégalité suivante soit vérifiée :

$$\lambda > \frac{1}{UPD^2}\left[\int_{A_0 B_0} \left(\frac{d\Delta}{ds}\right)^2 ds + \int_{B_1 A_1} \left(\frac{d\Delta}{ds}\right)^2 ds\right].$$

Dès lors, on aura

$$\delta^2 \Theta < 0.$$

et le rayon lumineux ne tracera pas, entre les deux points α_0, α_1, un trajet que la lumière parcourre en un temps minimum. C'est le théorème que nous avions énoncé.

Remarquons, en vue d'une proposition que nous démontrerons tout à l'heure, une particularité de la déformation qui vient d'être imposée au rayon lumineux.

On a, en général,

$$(52) \qquad \delta\, ds = a\, d\, \delta x + b\, d\, \delta y + c\, d\, \delta z.$$

Ici, les égalités

$$d\, \delta x = A \frac{d\Delta}{ds} ds, \qquad d\, \delta y = B \frac{d\Delta}{ds} ds, \qquad d\, \delta z = C \frac{d\Delta}{ds} ds,$$

$$A a + B b + C c = 0$$

donnent

$$(89) \qquad \delta\, ds = 0.$$

La déformation considérée laisse invariable la longueur de chacun des éléments du rayon.

APPENDICE A LA SECONDE PARTIE.

APPLICATION DES THÉORÈMES PRÉCÉDENTS A QUELQUES PROBLÈMES DE MÉCANIQUE.

19. *Application aux brachistochrones.* — Les théorèmes démontrés dans la seconde Partie de ce travail s'appliquent immédiatement à la détermination des lignes brachistochrones dans une région de l'espace où les forces agissantes admettent une fonction potentielle Ω. Si l'on désigne par Ω_0 la valeur de Ω au point de départ A_0 de la trajectoire, la vitesse V en un point quelconque est donnée par la loi de la force vive :

$$(90) \qquad V^2 + \Omega = \Omega_0.$$

Les surfaces d'égale vitesse sont les surfaces d'égal niveau poten-

tiel ; une section normale, pratiquée dans une surface d'égal niveau potentiel est concave ou convexe dans le sens où la vitesse du mobile augmente, selon qu'elle est concave ou convexe dans le sens où la fonction potentielle diminue, ou encore selon qu'elle est concave ou convexe dans le sens où le champ est dirigé.

Il n'y a pas de difficulté à étendre au problème des brachistochrones le théorème X, démontré aux n^{os} **16** et **17**. A la vérité, le raisonnement donné à la fin du n^o **17** suppose que la vitesse n'est pas nulle au point désigné par B_0 ; or ce point pourrait coïncider avec le point A_0, et ici, la vitesse est nulle en A_0 ; mais, pour démontrer le théorème en question, on pourrait reprendre la même démonstration à partir du point B_1, qui ne peut se confondre avec le point A_0 ; or, on suppose que la ligne C ne touche aucune surface d'égale vitesse ou d'égale fonction potentielle ; elle ne rencontre donc pas deux fois la même surface d'égal niveau potentiel ; en aucun point, la vitesse ne peut reprendre une valeur déjà prise, en particulier la valeur o prise au point A_0 ; nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Théorème XII. — *Une ligne joignant deux points et ne touchant aucune surface équipotentielle vérifie les équations différentielles des brachistochrones. Aucune surface équipotentielle ne présente, au point où elle est rencontrée par cette ligne, de section normale qui soit convexe dans le sens où le champ est dirigé. Dans ces conditions, la ligne considérée est vraiment, entre les deux points donnés, une brachistochrone.*

L'extension du théorème XI au cas actuel ne semble pas pouvoir être justifiée d'une manière générale, parce que la vitesse V est nulle au point A_0, en sorte que la quantité U qui figure aux inégalités (86) et (88) devrait être remplacée par o.

20. *Application à l'équilibre des fils flexibles et inextensibles. Conditions d'équilibre du fil.* — La théorie de l'équilibre des fils flexibles et inextensibles prête à des considérations fort semblables à celles que nous avons appliquées aux rayons lumineux. Indiquons sommairement ces considérations.

Soit Ω, comme au numéro précédent, la fonction potentielle des

forces agissantes, et considérons la quantité

$$\text{(91)} \qquad W = \int_C \Omega\, ds,$$

où l'intégrale s'étend à une courbe C reliant deux points donnés A_0, A_1.

La Mécanique nous enseigne, par le principe des déplacements virtuels, qu'entre les deux points donnés A_0, A_1, la courbe C dessinera la figure d'équilibre d'un fil flexible et inextensible si toute déformation infiniment petite de cette courbe, qui laisse immobiles les extrémités A_0, A_1, et invariable la longueur $\int_C ds$ de la courbe, vérifie l'équation

$$\text{(92)} \qquad \delta W = 0.$$

En vertu de l'égalité

$$\delta\, ds = a\, d\,\delta x + b\, d\,\delta y + c\, d\,\delta z,$$

cette égalité (92) peut s'écrire

$$\text{(93)} \quad \int_C \left(\frac{\partial\Omega}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\Omega}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\Omega}{\partial z}\delta z\right) ds + \int_C \Omega(a\, d\,\delta x + b\, d\,\delta y + c\, d\,\delta z) = 0.$$

Elle ne doit pas avoir lieu quels que soient δx, δy, δz, mais seulement toutes les fois que ces quantités vérifient l'équation

$$\text{(94)} \qquad \int_C \delta\, ds = \int_C (a\, d\,\delta x + b\, d\,\delta y + c\, d\,\delta z) = 0.$$

Il doit donc exister une constante K telle qu'en ajoutant membre à membre l'équation (93) et l'équation (94), après avoir multiplié celle-ci par K, on obtienne une équation vérifiée quels que soient δx, δy, δz.

Cette équation est

$$\text{(95)} \quad \int_C \left(\frac{\partial\Omega}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\Omega}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\Omega}{\partial z}\delta z\right) ds + \int_C (\Omega + K)(a\, d\,\delta x + b\, d\,\delta y + c\, d\,\delta z) = 0.$$

Désignons par $\varpi(x, y, z)$ la somme

$$\text{(96)} \qquad \varpi(x, y, z) = \Omega(x, y, z) + K,$$

et posons

$$(97)\quad \begin{cases} f = \mathfrak{T}\dfrac{da}{ds} + \left(\dfrac{\partial\mathfrak{T}}{\partial x}a + \dfrac{\partial\mathfrak{T}}{\partial y}b + \dfrac{\partial\mathfrak{T}}{\partial z}c\right)a - \dfrac{\partial\mathfrak{T}}{\partial x}, \\ g = \mathfrak{T}\dfrac{db}{ds} + \left(\dfrac{\partial\mathfrak{T}}{\partial x}a + \dfrac{\partial\mathfrak{T}}{\partial y}b + \dfrac{\partial\mathfrak{T}}{\partial z}c\right)b - \dfrac{\partial\mathfrak{T}}{\partial y}, \\ h = \mathfrak{T}\dfrac{dc}{ds} + \left(\dfrac{\partial\mathfrak{T}}{\partial x}a + \dfrac{\partial\mathfrak{T}}{\partial y}b + \dfrac{\partial\mathfrak{T}}{\partial z}c\right)c - \dfrac{\partial\mathfrak{T}}{\partial z}. \end{cases}$$

Des intégrations par parties donneront aisément à l'équation (95) la forme

$$(98)\quad \int_C (f\,\delta x + g\,\delta y + h\,\delta z)\,ds = 0.$$

Pour l'équilibre du fil, il faut et il suffit que cette équation (98) soit vérifiée quels que soient δx, δy, δz. Selon une démonstration semblable à celle qui a été donnée au n° **14**, cela revient à dire que, pour l'équilibre du fil, il faut et il suffit que l'on ait, en chaque point de ce fil, les trois équations

$$(99)\quad f = 0, \qquad g = 0, \qquad h = 0.$$

On démontre, en outre, ou, mieux, ON ADMET *qu'en chaque point du fil, la tension* $\mathfrak{T}(x, y, z)$ *doit être positive :*

$$(100)\quad \mathfrak{T}(x, y, z) > 0.$$

La comparaison des formules (97) aux formules (34) et des équations (99) aux équations (35) montre que l'on passe du problème qui consiste à déterminer la figure d'un rayon lumineux reliant deux points donnés au problème qui consiste à déterminer la figure d'un fil flexible et inextensible reliant ces deux mêmes points, en substituant la fonction $\mathfrak{T}(x, y, z)$ à la fonction $\dfrac{1}{V(x, y, z)}$. L'analogie est complétée par ce fait que ces fonctions doivent être toutes deux positives. Tous les théorèmes établis aux n^{os} **11** et **12** pour les rayons lumineux s'étendent aux fils flexibles et inextensibles.

Tout ce que nous venons de rappeler en ce numéro **20** est bien connu.

21. *Stabilité de l'équilibre du fil. Cas où cette stabilité est assurée.* — Le théorème connu de Lagrange et de Lejeune-Dirichlet nous permet de formuler la proposition suivante :

L'équilibre du fil qui relie deux points donnés est assurément stable si la ligne qu'il dessine est, *parmi toutes les lignes de même longueur qu'on peut tracer entre les mêmes points*, une de celles qui rendent minimum la quantité W donnée par l'égalité (91).

Si, dans cette grandeur W, on remplace la fonction $\Omega(x, y, z)$ par la fonction $\varpi(x, y, z)$ que définit l'égalité (96), on y ajoute simplement la quantité

$$K\int_C ds,$$

qui demeure constante toutes les fois que la courbe C se déforme sans changer de longueur. La figure d'équilibre du fil sera donc stable si, parmi *toutes les lignes de même longueur* reliant les deux points A_0, A_1, elle rend minimun la quantité

$$Z = \int_C \varpi(x, y, z)\, ds. \tag{101}$$

A fortiori, cet équilibre sera stable si la figure d'équilibre du fil est telle que, parmi *toutes les lignes* reliant les deux points A_0, A_1, elle rende minimum la quantité Z.

Il suffit alors de se souvenir que l'on passe du problème du rayon lumineux au problème du fil flexible et inextensible en substituant la fonction $\varpi(x, y, z)$ à la fonction $\frac{1}{V(x, y, z)}$ pour pouvoir aussitôt étendre au second problème le théorème V démontré au n° **16**.

Quelques remarques préliminaires :

La formule de correspondance

$$\varpi(x, y, z) = \frac{1}{V(x, y, z)}$$

nous montre que ϖ augmente en tout déplacement où V diminue, et inversement. Dire qu'en un point M la surface

$$V(x, y, z) = \text{const.}$$

qui passe par ce point ne présente aucune section normale qui soit

convexe du côté où V augmente, c'est dire qu'en ce point la surface

$$\mathfrak{T}(x, y, z) = \text{const.}$$

ne présente aucune section normale qui soit convexe du côté où $\mathfrak{T}$ diminue; c'est dire aussi, en vertu de l'égalité (96), que la surface d'égal niveau potentiel

$$\Omega(x, y, z) = \text{const.}$$

ne présente aucune section normale qui soit convexe du côté où Ω diminue, c'est-à-dire dans le sens où le champ est dirigé.

Sous le bénéfice de ces remarques, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème VIII. — *Un fil flexible et inextensible en équilibre relie deux points; entre ces deux points, il rencontre une seule fois chacune des surfaces d'égal niveau potentiel; au point où elle est rencontrée par le fil, aucune de ces surfaces ne présente de section normale qui soit convexe dans le sens où le champ se dirige. Ce fil est assurément en équilibre stable.*

22. *Cas où l'équilibre du fil est instable.* — La réciproque du théorème de Lagrange et de Lejeune-Dirichlet n'a pas été démontrée pour les fils. Il n'est pas établi que l'équilibre du fil soit instable lorsque la figure du fil n'est pas, parmi toutes les lignes de mêmes extrémités et de même longueur, telle qu'elle rende W minimum. Pour la commodité du langage, nous nous exprimerons comme si cette proposition avait été démontrée; en d'autres termes, lorsque la figure du fil ne sera pas, parmi toutes les lignes de mêmes extrémités et de même longueur, tellement tracée que W soit minimum, *nous conviendrons de dire* que l'équilibre du fil est instable.

La figure du fil en équilibre est déjà telle, nous le savons, que toute déformation qui laisse les extrémités du fil immobile et vérifie la condition

$$(94) \qquad \int_C \delta\, ds = 0,$$

vérifie aussi la condition

$$(92) \qquad \delta W = 0.$$

Dès lors, nous pouvons énoncer la proposition suivante :

Si une déformation qui laisse immobiles les extrémités du fil et vérifie les deux conditions

$$(94) \qquad \int \delta\, ds = 0,$$

$$(102) \qquad \int_C \delta^2\, ds = 0,$$

vérifie aussi la condition

$$(103) \qquad \delta^2 W < 0,$$

l'équilibre du fil est instable.

Considérons la quantité Z définie par l'égalité (101); en vertu de l'égalité (96), qui définit la fonction $\varpi(x, y, z)$, et de l'égalité (91), qui définit la fonction W, on a

$$Z = W + K \int_C ds$$

et, par conséquent,

$$\delta^2 Z = \delta^2 W + K \int_C \delta^2\, ds.$$

En toute déformation qui vérifie la condition (102), $\delta^2 Z$ est identique à $\delta^2 W$; on peut donc répéter la proposition précédente en substituant, dans l'inégalité (103), $\delta^2 Z$ à $\delta^2 W$.

Cette proposition, d'ailleurs, ne peut être exacte sans que la suivante le soit :

Si une déformation, imposée au fil à partir de sa position d'équilibre, laisse les extrémités immobiles, vérifie, en tout point du fil, les conditions

$$(89) \qquad \delta\, ds = 0,$$

$$(104) \qquad \delta^2\, ds = 0,$$

et donne l'inégalité

$$(105) \qquad \int_C \delta^2 \varpi\, ds < 0,$$

l'équilibre du fil est instable.

Or on a

$$(106) \quad \delta^2 \varpi = \left(\frac{\partial \varpi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \varpi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \varpi}{\partial z} \delta z \right)^{(2)} + \frac{\partial \varpi}{\partial x} \delta^2 x + \frac{\partial \varpi}{\partial y} \delta^2 y + \frac{\partial \varpi}{\partial z} \delta^2 z.$$

D'autre part, l'égalité (104), en vertu des égalités (53) et (56), donne

$$(107)\qquad 0 = a\,d\,\delta^2 x + b\,d\,\delta^2 y + c\,d\,\delta^2 z + \frac{p^2 \sin^2(p, ds)}{ds}.$$

Les égalités (106) et (107) permettent d'écrire

$$(108)\quad \delta^2\mathfrak{T} = \left(\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial z}\delta z\right)^{(2)} + \mathfrak{T}\,\frac{p^2 \sin^2(p, ds)}{ds^2}$$
$$+ \frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial x}\delta^2 x + \frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial y}\delta^2 y + \frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial z}\delta^2 z + \mathfrak{T}\left(a\,\frac{d\,\delta^2 x}{ds} + b\,\frac{d\,\delta^2 y}{ds} + c\,\frac{d\,\delta^2 z}{ds}\right).$$

Mais la première des égalités (97) permet aisément d'écrire

$$\mathfrak{T}\,a\,\frac{d\,\delta^2 x}{ds} + \frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial x}\delta^2 x = \frac{d}{ds}(\mathfrak{T}\,a\,\delta^2 x) - f\,\delta^2 x$$

ou bien, puisque les égalités (99) sont vérifiées en tout point de la courbe C, position d'équilibre du fil,

$$\mathfrak{T}\,a\,\frac{d\,\delta^2 x}{ds} + \frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial x}\delta^2 x = \frac{d}{ds}(\mathfrak{T}\,a\,\delta^2 x).$$

Cette égalité et deux égalités analogues, jointes à la remarque que $\delta^2 x$, $\delta^2 y$, $\delta^2 z$ s'annulent aux deux extrémités du fil, donne l'égalité

$$(109)\quad \int_C \left[\left(\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial x}\delta^2 x + \frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial y}\delta^2 y + \frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial z}\delta^2 z\right)ds + \mathfrak{T}(a\,d\,\delta^2 x + b\,d\,\delta^2 y + c\,d\,\delta^2 z)\right] = 0.$$

Si l'on use des égalités (108) et (109) pour transformer l'inégalité (105), on parvient au théorème suivant :

Si l'on peut imposer à la courbe C une déformation qui en laisse les extrémités invariables, qui vérifie en tout point les deux conditions

$$(89)\qquad \delta\,ds = 0,$$
$$(104)\qquad \delta^2\,ds = 0$$

et qui donne l'inégalité

$$(109)\quad \int_C \left(\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial z}\delta z\right)^{(2)} ds + \int_C \mathfrak{T}\,\frac{p^2 \sin^2(p, ds)}{ds} < 0,$$

l'équilibre du fil est assurément instable.

Le premier membre de l'égalité (109) dépend de $\delta x, \delta y, \delta z$, mais nullement de $\delta^2 x, \delta^2 y, \delta^2 z$.

Dès lors, imaginons qu'on ait, tout le long de la courbe C, choisi des valeurs de $\delta x, \delta y, \delta z$ qui vérifient l'égalité (89) et l'inégalité (109). Ce choix laisse entièrement arbitraires les valeurs de $\delta^2 x, \delta^2 y, \delta^2 z$ en tout point de la courbe. On pourra évidemment choisir ces dernières valeurs de telle sorte qu'elles s'annulent aux deux extrémités de la courbe C et qu'elles vérifient, en tout point de cette courbe, l'égalité

$$a\,d\,\delta^2 x + b\,d\,\delta^2 y + c\,d\,\delta^2 z = -\frac{\sin^2(p, ds)}{ds}. \tag{110}$$

Il suffira, par exemple, d'opérer de la manière suivante :

1° On prend pour $\delta^2 x(s)$ une fonction assujettie seulement à s'annuler aux deux extrémités de la courbe C et à vérifier l'équation

$$\int_C \frac{a}{c} \frac{d\,\delta^2 x}{ds} ds = -\int_C \frac{p^2 \sin^2(p, ds)}{c\,ds}. \tag{111}$$

Cela est évidemment possible d'une infinité de manières.

2° On prend pour $\delta^2 y(s)$ une fonction assujettie seulement à s'annuler aux deux extrémités de la courbe C et à vérifier l'équation

$$\int_C \frac{b}{c} \frac{d\,\delta^2 y}{ds} ds = 0. \tag{112}$$

Cela est encore possible d'une infinité de manières.

3° Une quadrature détermine la fonction $\delta^2 z(s)$ assujettie à s'annuler à l'origine A_0 de cette courbe C et à vérifier en tout point l'égalité

$$\frac{d\,\delta^2 z}{ds} = -\frac{a}{c} \frac{d\,\delta^2 x}{ds} - \frac{b}{c} \frac{d\,\delta^2 y}{ds} - \frac{p^2 \sin^2(p, ds)}{c\,ds^2} \tag{113}$$

dont le second membre est une fonction connue de s.

A l'extrémité A_1 de la courbe, $\delta^2 z$ aura alors pour valeur

$$\delta^2 z_1 = -\int_C \frac{a}{c} \frac{d\,\delta^2 x}{ds} ds - \int_C \frac{b}{c} \frac{d\,\delta^2 y}{ds} ds - \int_C \frac{p^2 \sin^2(p, ds)}{ds},$$

et selon les égalités (111) et (112), cette valeur est égale à zéro.

Si aux valeurs précédemment choisies de δx, δy, δz nous associons, par ce procédé ou par tout autre procédé équivalent, un système de valeurs de $\delta^2 x$, $\delta^2 y$, $\delta^2 z$ qui, en chaque point de la courbe C, vérifie l'équation (110), nous aurons imposé à la courbe C une déformation qui vérifiera les conditions (89) et (104), et pour laquelle l'inégalité (109) sera exacte.

D'où le théorème suivant :

Si l'on peut imposer à la courbe C une déformation qui en laisse immobiles les extrémités, qui vérifie en tout point la condition

(89) $$\delta\, ds = 0.$$

et qui donne l'inégalité

(109) $$\int_C \left(\frac{\partial \varpi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \varpi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \varpi}{\partial z} \delta z \right)^{(2)} ds + \int_C \varpi \frac{p^2 \sin^2(p, ds)}{ds} < 0,$$

l'équilibre du fil est instable.

A la fonction $\varpi(x, y, z)$ substituons la fonction $V(x, y, z)$ donnée par l'égalité

(114) $$\varpi(x, y, z) = \frac{1}{V(x, y, z)}.$$

Nous aurons

(115) $$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \varpi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \varpi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \varpi}{\partial z} \delta z \right)^2 = &- \frac{1}{V^2} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \delta x + \frac{\partial V}{\partial y} \delta y + \frac{\partial V}{\partial z} \delta z \right)^{(2)} \\ &+ \frac{2}{V^3} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \delta x + \frac{\partial V}{\partial y} \delta y + \frac{\partial V}{\partial z} \delta z \right)^2. \end{aligned}$$

Cette égalité (115), jointe au théorème précédent, permet d'énoncer la proposition suivante :

Si l'on peut imposer à la courbe C une déformation qui en laisse les extrémités immobiles, qui vérifie, en son point de la courbe, les deux conditions

(89) $$\delta\, ds = 0,$$

(116) $$\frac{\partial V}{\partial x} \delta x + \frac{\partial V}{\partial y} \delta y + \frac{\partial V}{\partial z} \delta z = 0.$$

et qui donne l'inégalité

$$(117)\qquad \int_C \frac{p^2 \sin^2(p, ds)}{V\,ds} - \int_C \frac{1}{V^2}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\delta z\right)^{(2)} ds < 0,$$

l'équilibre du fil est instable.

La condition (116) peut encore, en vertu de l'égalité (114), s'écrire

$$(116\ bis)\qquad \frac{\partial \varpi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \varpi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \varpi}{\partial z}\delta z = 0.$$

Celle-ci, à son tour, en vertu de l'égalité (96), peut s'écrire

$$(116\ ter)\qquad \frac{\partial \Omega}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \Omega}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \Omega}{\partial z}\delta z = 0.$$

Ces conditions équivalentes (116), (116 *bis*) et (117 *ter*) expriment que le déplacement δx, δy, δz est, en chaque point, tangent à la surface d'égale tension ou d'égal niveau potentiel qui passe par ce point.

La dernière proposition établie va nous permettre de transformer, en vue de l'appliquer au problème du fil flexible et inextensible, ce qui a été démontré au n° **18** pour un rayon de lumière; la déformation imposée à ce rayon de lumière vérifie en effet, comme nous nous en sommes alors assuré, la condition (89).

Pour faire cette transformation, nous considérerons un espace indéfini où s'exerce une force qui dépend d'une fonction potentielle $\Omega(x, y, z)$. Nous devrons supposer, en premier lieu, que cette fonction, si loin qu'on aille en l'espace considéré, demeure toujours finie. Nous pourrons donc choisir une constante K de telle sorte que la fonction

$$(96)\qquad \varpi(x, y, z) = \Omega(x, y, z) + K$$

demeure comprise, dans tout l'espace, entre deux valeurs positives; il en sera alors de même de son inverse $V(x, y, z)$.

Il nous faudra, en second lieu, admettre que l'on peut tracer, dans ce champ, une ligne plane, infinie dans les deux sens, qui ne rencontre pas deux fois une même surface équipotentielle, et qui vérifie, en tout point, les équations (99) de l'équilibre des fils.

En troisième lieu, nous devrons admettre qu'au point de rencontre de la courbe avec une surface équipotentielle, celle-ci est coupée, par

un plan normal à celui de la courbe, suivant une section dont le rayon de courbure est fini et dont la concavité est tournée du côté où V diminue. C'est dire que la convexité de cette courbe est tournée dans le sens où ϖ et Ω diminuent, c'est-à-dire dans le sens où le champ se dirige.

Dès lors, notre théorème VI se transformera en la proposition suivante :

Théorème IX. — *En un espace illimité s'exerce une force dont la fonction potentielle demeure limitée même en un point qui s'éloigne indéfiniment. En cet espace, est tracée une courbe plane C, infinie dans les deux sens, qui ne rencontre pas deux fois la même surface de niveau, et qui vérifie en tout point les conditions d'équilibre d'un fil flexible, inextensible, de tension positive. A l'intersection de la courbe C avec une surface d'égal niveau potentiel, la section de celle-ci par un plan normal à la courbe C est une ligne de rayon de courbure généralement fini, et qui tourne sa convexité dans le sens où le champ se dirige. Sur une telle courbe C, on peut marquer deux points* A_0, A_1 *assez éloignés l'un de l'autre pour qu'un fil flexible et inextensible, placé suivant l'arc de courbe que terminent ces deux points, soit en équilibre instable.*

Note.

Le précédent travail était achevé d'imprimer lorsque nous avons eu connaissance d'un Mémoire publié, en 1867, par A. Lévistal. En ce Mémoire, Lévistal démontre [1], par un élégant emploi de la surface aplanétique et pour le cas d'une seule réflexion ou d'une seule réfraction, que le temps de parcours employé par la lumière pour aller d'un point à un autre n'est pas toujours un minimum. Lévistal a rappelé ce théorème en une Note de son édition des *Leçons d'Optique physique* de Verdet [2].

---

(1) A. Lévistal, *Recherches d'Optique géométrique*. Premier Mémoire, n° 43 (*Annales de l'École Normale supér.*, 1re série, t. IV, 1867, p. 250-251).

(2) E. Verdet, *Leçons d'Optique physique*, t. I, 1869, p. 27; Paris (Publié par A. Lévistal).

Sur les équations entre trois variables représentables par des nomogrammes à points alignés;

Par T.-H. GRONWALL,

à Chicago.

INTRODUCTION.

Soit donnée une équation

$$F(x, y, z) = 0, \tag{1}$$

où F est une fonction analytique des trois variables, et supposons-la ramenée, par des moyens quelconques, à la forme

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & g_1(x) & h_1(x) \\ f_2(y) & g_2(y) & h_2(y) \\ f_3(z) & g_3(z) & h_3(z) \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

Désignons par ξ, η des coordonnées cartésiennes; alors (2) exprime qu'en prenant, sur les trois courbes

$$\xi = \frac{f_i(t)}{h_i(t)}, \qquad \eta = \frac{g_i(t)}{h_i(t)} \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{3}$$

les points correspondant à $t = x$, $t = y$ et $t = z$ respectivement, ces trois points se trouvent en ligne droite. En marquant, sur chacune des courbes (3), les points correspondant à des valeurs rondes de t, on obtient trois *échelles* et en joignant par une droite les points correspondants à des valeurs données de x et y, par exemple, et lisant

la valeur de z au point où cette droite coupe l'échelle des z, on a une résolution graphique de l'équation (1).

C'est là le principe des nomogrammes à points alignés de M. d'Ocagne, qui en a développé une théorie également remarquable par son élégance analytique et par son importance pratique, surtout pour l'art de l'ingénieur [1].

Le problème fondamental de cette théorie est évidemment de reconnaître si une équation donnée (1) peut être ramenée à la forme (2) ou non. Pour des classes particulières d'équations (1) qui embrassent, il est vrai, la plupart des équations rencontrées dans la pratique, on sait effectuer la réduction à la forme (2); mais dans le cas général, les conditions de réduction sont restées inconnues jusqu'ici [2].

Au paragraphe 1 du présent travail, je fais voir que la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (1) puisse se ramener à la forme (2) consiste dans l'existence d'une intégrale commune à deux équations aux dérivées partielles. Dans le paragraphe 2, je donne les conditions additionnelles pour qu'une ou plusieurs des échelles soient rectilignes, cas important dans la pratique, et au paragraphe 3, on trouve une méthode pour tirer effectivement les fonctions f_i, g_i, h_i de l'intégrale du paragraphe 1 supposée connue. Cette méthode devient illusoire si deux des échelles sont rectilignes. Nous supposerons d'abord, au paragraphe 4, toutes les trois échelles rectilignes; il faut traiter ce cas séparément pour deux raisons : d'une part, l'équation donnée admet alors des représentations nomographiques essentiellement distinctes que je détermine toutes, et d'autre part, les formules des paragraphes suivants contiennent en dénominateur une expression qui s'annule dans le cas actuel. Il reste alors, comme échappant à la méthode du paragraphe 3, le cas de deux échelles rectilignes et la troisième courbe, qui fait l'objet du paragraphe 5. Au paragraphe 6 et dernier, je fais une étude spéciale des nomogrammes

---

(1) M. d'Ocagne, *Traité de Nomographie*. Paris, Gauthier-Villars, 1899; *Calcul graphique et Nomographie*. Paris, Doin, 1908.

(2) Seulement M. Duporcq avait obtenu, sous la forme d'équations fonctionnelles, quelques conditions suffisantes (*Voir* d'Ocagne, *Traité de Nomographie*, p. 427-431).

si remarquables de M. Clark où deux des échelles sont supportées par la même conique, la troisième étant quelconque.

Dans un travail ultérieur, je formerai explicitement l'intégrale commune des équations aux dérivées partielles du paragraphe I, et je ferai voir que le cas du paragraphe 4 est le seul où l'équation donnée admette des représentations nomographiques essentiellement distinctes.

1. — Les conditions nécessaires et suffisantes.

En permutant, s'il y a lieu, les colonnes dans (2), nous pouvons faire de sorte que $h_1(x)$, $h_2(y)$, $h_3(z)$ ne s'annulent pas identiquement; en divisant alors chaque ligne par la fonction h correspondante, nous pouvons supposer $h_1 = h_2 = h_3 = 1$ et (2) devient

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & g_1(x) & 1 \\ f_2(y) & g_2(y) & 1 \\ f_3(z) & g_3(z) & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Multiplions, avec M. d'Ocagne, l'équation (4) par un déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0;$$

après division par les éléments de la troisième colonne, il vient

$$\begin{vmatrix} \bar{f}_1(x) & \bar{g}_1(x) & 1 \\ \bar{f}_2(y) & \bar{g}_2(y) & 1 \\ \bar{f}_3(z) & \bar{g}_3(z) & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{5}$$

où

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{f}_i &= \frac{a_1 f_i + b_1 g_i + c_1}{a_3 f_i + b_3 g_i + c_3} \\ \bar{g}_i &= \frac{a_2 f_i + b_2 g_i + c_2}{a_3 f_i + b_3 g_i + c_3} \end{aligned} \right. \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{6}$$

On obtient donc une équation équivalente à (4) en faisant sur les f_i, g_i la transformation homographique la plus générale.

Après cette remarque dont on verra dans la suite l'importance, nous développons (4) suivant la dernière ligne et obtenons

$$g_3(z) = u f_3(z) + v, \tag{7}$$

où

$$(8)\qquad \begin{cases} u = \dfrac{g_1(x) - g_2(y)}{f_1(x) - f_2(y)}, \\ v = \dfrac{f_1(x)\,g_2(y) - f_2(y)\,g_1(x)}{f_1(x) - f_2(y)}, \end{cases}$$

et l'on a évidemment

$$(9)\qquad \begin{cases} g_1(x) = u f_1(x) + v, \\ g_2(y) = u f_2(y) + v. \end{cases}$$

D'après (7) et (9), une transformation homographique (6) des f_i, g_i transforme u et v par l'homographie associée, et inversement, propriété capitale pour ce qui va suivre.

Nous allons obtenir d'abord une condition nécessaire pour que l'équation (1) puisse se ramener à la forme (4); pour cela, différentions la première équation (9) par rapport à y, et la deuxième par rapport à x :

$$(10)\qquad \begin{cases} 0 = \dfrac{\partial u}{\partial y} f_1(x) + \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ 0 = \dfrac{\partial u}{\partial x} f_2(y) + \dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

Supposons d'abord $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$; alors, d'après (10), $\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$, c'est-à-dire $u = u(x)$, $v = v(x)$ et (9) et (7) donnent

$$g_2(y) = u(x) f_2(y) + v(x),$$
$$g_3(z) = u(x) f_3(z) + v(x),$$

d'où, en faisant $x = \text{const.} = x_0$, $u(x_0) = u_0$, $v(x_0) = v_0$,

$$g_2(y) = u_0 f_2(y) + v_0,$$
$$g_3(z) = u_0 f_3(z) + v_0.$$

Par soustraction, on obtient

$$[u(x) - u_0] f_2(y) + v(x) - v_0 = 0,$$
$$[u(x) - u_0] f_3(z) + v(x) - v_0 = 0.$$

Si $u(x) = u_0$, $v(x) = v_0$, on a aussi $g_1(x) = u_0 f_1(x) + v_0$ et (4) se réduit à une identité; sinon, on aurait $f_2(y) = f_3(z) = \text{const.}$, $g_2(y) = g_3(z) = \text{const.}$, et (4) se réduirait encore à une identité. La même remarque s'applique au cas de $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$.

En laissant de côté ces cas triviaux, (10) donne

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} f_1(x) &= -\frac{\dfrac{\partial v}{\partial y}}{\dfrac{\partial u}{\partial y}},\\ f_2(y) &= -\frac{\dfrac{\partial v}{\partial x}}{\dfrac{\partial u}{\partial x}}.\end{aligned}\right.$$

Différentiant la première de ces équations par rapport à y, et la deuxième par rapport à x, il vient

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial v}{\partial y} &= 0,\\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial v}{\partial x} &= 0.\end{aligned}\right.$$

Nous avons évidemment

$$\frac{\partial[g_3(z), z]}{\partial(x, y)} = 0;$$

en y substituant l'expression (7) et observant que

$$\frac{\partial[f_3(z), z]}{\partial(x, y)} = 0,$$

il vient

$$(13)\qquad f_3(z)\frac{\partial(u, z)}{\partial(x, y)} + \frac{\partial(v, z)}{\partial(x, y)} = 0.$$

L'hypothèse $\dfrac{\partial(u, z)}{\partial(x, y)} = 0$ donne $u = u(z)$ et, d'après (7), $v = v(z)$; le raisonnement que nous venons de faire nous apprend donc que (4) se réduit à une identité. Ce cas écarté, posons

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} M &= -\frac{\dfrac{\partial z}{\partial y}}{\dfrac{\partial z}{\partial x}},\\ N = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{1}{M}\frac{\partial M}{\partial y} &= \frac{\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}}{\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2\dfrac{\partial z}{\partial y}};\end{aligned}\right.$$

l'équation (13) donne alors

$$(15)\qquad f_1(z) = -\frac{M\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y}}{M\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}}.$$

Supposons que $\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 0$; alors (10) donne

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}[f_1(x) - f_2(y)] = 0.$$

et (4) se réduirait à une identité. Nous pouvons donc poser

$$(16)\qquad \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} = e^{\theta}.$$

Nous introduirons encore les notations

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned}
A &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial x}\right)e^{-\theta},\\
B &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\frac{\partial u}{\partial y}\right)e^{-\theta},\\
C &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial y} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} - 2\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}\right)e^{-\theta},\\
D &= \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial v}{\partial x} + 2\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right)e^{-\theta}.
\end{aligned}\right.$$

Les expressions A, B, C et D sont invariantes pour une transformation homographique quelconque de u et v [1], c'est-à-dire pour une transformation quelconque (6) des f_i et g_i.

Reprenons maintenant l'équation

$$\frac{\partial[f_3(z), z]}{\partial(x, y)} = 0,$$

et substituons-y l'expression (15); il vient, tous calculs faits,

$$M^3 A + B + M^2 C - MD + MN = 0,$$

---

[1] E. Goursat, *Sur un système d'équations aux dérivées partielles* (*Comptes rendus*, t. CIV, 16 mai 1887, p. 1361-1363). — P. Painlevé, *Sur les équations linéaires simultanées aux dérivées partielles* (*Comptes rendus*, t. CIV, 31 mai 1887, p. 1497-1501).

ou bien, comme $A = B = 0$ en vertu de (12),

$$D = MC + N. \tag{18}$$

En différentiant (16) par rapport à x et y, nous obtenons

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial y} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}\right) = e^\theta \frac{\partial \theta}{\partial x},\\ &\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial v}{\partial x} - \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right) = e^\theta \frac{\partial \theta}{\partial y},\end{aligned}\right.$$

et ces équations, jointes aux deux dernières de (17), donnent

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{3}\left(C + 2\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)e^\theta,\\ &\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{3}\left(C - \frac{\partial \theta}{\partial x}\right)e^\theta,\\ &\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{3}\left(D + 2\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)e^\theta,\\ &\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{3}\left(D - \frac{\partial \theta}{\partial y}\right)e^\theta.\end{aligned}\right.$$

Résolvant les équations (12) et (20) par rapport aux six dérivées du second ordre qui y figurent, nous obtenons, en ayant égard à (16),

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{3}\left(2\frac{\partial \theta}{\partial x} + C\right)\frac{\partial u}{\partial x},\\ &\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{1}{3}\left(\frac{\partial \theta}{\partial y} - D\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{3}\left(\frac{\partial \theta}{\partial x} - C\right)\frac{\partial u}{\partial y},\\ &\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{3}\left(2\frac{\partial \theta}{\partial y} + D\right)\frac{\partial u}{\partial y}\end{aligned}\right.$$

et précisément le même système d'équations pour v.

Formons ensuite les conditions d'intégrabilité de ce système, savoir

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2};$$

en remplaçant les dérivées du second ordre par leurs valeurs tirées

de (21), il vient

$$\left[3\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y}+3\frac{\partial C}{\partial y}+3\frac{\partial D}{\partial x}-\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}-C\right)\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}-D\right)\right]\frac{\partial u}{\partial x}$$
$$-\left[3\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}-3\frac{\partial C}{\partial x}-\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}-C\right)\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}+2C\right)\right]\frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

$$\left[3\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}-3\frac{\partial D}{\partial y}-\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}-D\right)\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}+2D\right)\right]\frac{\partial u}{\partial x}$$
$$-\left[3\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y}+3\frac{\partial C}{\partial y}+3\frac{\partial D}{\partial x}-\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}-C\right)\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}-D\right)\right]\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

Les mêmes équations étant satisfaites par v, et le déterminant fonctionnel de u et v étant différent de zéro, il s'ensuit que les coefficients de $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$ s'annulent dans les équations précédentes, de sorte que

$$(22)\qquad\left\{\begin{aligned}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}&=\frac{1}{3}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}-C\right)\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}+2C\right)+\frac{\partial C}{\partial x},\\ \frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y}&=\frac{1}{3}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}-C\right)\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}-D\right)-\frac{\partial C}{\partial y}-\frac{\partial D}{\partial x},\\ \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}&=\frac{1}{3}\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}-D\right)\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}+2D\right)+\frac{\partial D}{\partial y}.\end{aligned}\right.$$

Formons encore les conditions d'intégrabilité de ce système savoir

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y},\qquad\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2};$$

en remplaçant les dérivées secondes par leurs valeurs, on voit que θ disparaît entièrement de ces équations qui deviennent

$$(23)\qquad\left\{\begin{aligned}&2\frac{\partial^2 C}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}-C\left(2\frac{\partial C}{\partial y}+\frac{\partial D}{\partial x}\right)=0,\\ &\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 D}{\partial x\,\partial y}-D\left(\frac{\partial C}{\partial y}+2\frac{\partial D}{\partial x}\right)=0.\end{aligned}\right.$$

En y substituant la valeur de D donnée par (18), nous obtenons

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} &M\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 C}{\partial x\,\partial y}=\left(MC-2\frac{\partial M}{\partial x}\right)\frac{\partial C}{\partial x}+2C\frac{\partial C}{\partial y}\\ &\qquad+\frac{\partial M}{\partial x}C^2+\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}\right)C-\frac{\partial^2 N}{\partial x^2},\\ &2M\frac{\partial^2 C}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}=2\left(M^2C+MN-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\frac{\partial C}{\partial x}+\left(MC+N-\frac{\partial M}{\partial x}\right)\frac{\partial C}{\partial y}\\ &\qquad+2M\frac{\partial M}{\partial x}C^2+2\left(N\frac{\partial M}{\partial x}+M\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial^2 M}{\partial x\,\partial y}\right)C\\ &\qquad+2N\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial^2 N}{\partial x\,\partial y}. \end{aligned}\right.$$

Si, par suite, l'équation donnée (1) est réductible à la forme (4), les deux équations (24) possèdent une intégrale commune, que nous pouvons évidemment supposer analytique. Je dis que cette condition est aussi suffisante.

Pour le démontrer, commençons par transformer les équations (21) et (22) en un seul système linéaire. A cet effet, posons dans (21)

$$(25)\qquad u=e^{\frac{1}{3}\theta}\,\omega;$$

il vient, en ayant égard à (22),

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}&=\frac{1}{3}C\frac{\partial\omega}{\partial x}+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}C^2-\frac{\partial C}{\partial x}\right)\omega,\\ \frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial y}&=-\frac{1}{3}D\frac{\partial\omega}{\partial x}-\frac{1}{3}C\frac{\partial\omega}{\partial y}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}CD+\frac{\partial C}{\partial y}+\frac{\partial D}{\partial x}\right)\omega,\\ \frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}&=\frac{1}{3}D\frac{\partial\omega}{\partial y}+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}D^2-\frac{\partial D}{\partial y}\right)\omega. \end{aligned}\right.$$

D'autre part, la substitution

$$(27)\qquad e^{-\frac{1}{3}\theta}=\omega,$$

transforme le système (22) dans le même système (26). Les conditions d'intégrabilité de (22) et (26) sont donc les mêmes, savoir les équations (23).

Supposons ces dernières équations vérifiées; comme (26) permet

d'exprimer toute dérivée de ω en fonction linéaire de $\frac{\partial\omega}{\partial x}$, $\frac{\partial\omega}{\partial y}$ et ω, il s'ensuit, d'après des théories bien connues, que toute intégrale de (26) s'exprime linéairement à coefficients constants en trois intégrales particulières ω_1, ω_2, ω_3,

$$\omega = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2 + \gamma\omega_3,$$

le système fondamental ω_1, ω_2, ω_3 étant tel que le déterminant

$$(28) \qquad \Delta(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \begin{vmatrix} \omega_1 & \frac{\partial\omega_1}{\partial x} & \frac{\partial\omega_1}{\partial y} \\ \omega_2 & \frac{\partial\omega_2}{\partial x} & \frac{\partial\omega_2}{\partial y} \\ \omega_3 & \frac{\partial\omega_3}{\partial x} & \frac{\partial\omega_3}{\partial y} \end{vmatrix} = \omega_3^3 \frac{\partial\left(\frac{\omega_1}{\omega_3}, \frac{\omega_2}{\omega_3}\right)}{\partial(x, y)}$$

ne s'annule pas identiquement. De (28) et (26) il s'ensuit que

$$\frac{\partial\Delta}{\partial x} = -\frac{1}{3}C\Delta + \frac{1}{3}C\Delta = 0,$$

$$\frac{\partial\Delta}{\partial y} = -\frac{1}{3}D\Delta + \frac{1}{3}D\Delta = 0;$$

on a donc

$$(29) \qquad \Delta(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \text{const.} = \frac{1}{k^3} \neq 0.$$

Posons

$$(30) \qquad u = \frac{\omega_1}{\omega_3}, \qquad v = \frac{\omega_2}{\omega_3}, \qquad \theta = -3\log(k\omega_3);$$

d'après (25), (27), (28) et (29), u, v et θ satisfont aux équations (16), (21 pour u), (21 pour v) et (22).

Soit $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$, $\bar{\omega}_3$ un autre système fondamental de (26); on a

$$(31) \qquad \bar{\omega}_i = \alpha_i\omega_1 + \beta_i\omega_2 + \gamma_i\omega_3 \qquad (i = 1, 2, 3),$$

où

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

et

$$(32) \qquad \Delta(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \Delta(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \frac{1}{\bar{k}^3} \neq 0.$$

En posant

$$(33) \qquad \bar{u} = \frac{\bar{\omega}_1}{\bar{\omega}_3}, \qquad \bar{v} = \frac{\bar{\omega}_2}{\bar{\omega}_3}, \qquad \bar{\theta} = -3\log(\bar{k}\bar{\omega}_3).$$

$\bar{u}$, $\bar{v}$ et $\bar{\theta}$ satisfont aux mêmes équations que tout à l'heure et, en vertu de (31),

$$(34) \qquad \begin{cases} \bar{u} = \dfrac{\alpha_1 u + \beta_1 v + \gamma_1}{\alpha_3 u + \beta_3 v + \gamma_3}, \\ \bar{v} = \dfrac{\alpha_2 u + \beta_2 v + \gamma_2}{\alpha_3 u + \beta_3 v + \gamma_3}. \end{cases}$$

Soient inversement u, v et θ des fonctions satisfaisant à (16), (21 pour u), (21 pour v) et (22); en posant

$$(35) \qquad \omega_1 = u\, e^{-\frac{1}{3}\theta}, \qquad \omega_2 = v\, e^{-\frac{1}{3}\theta}, \qquad \omega_3 = e^{-\frac{1}{3}\theta},$$

ces expressions satisfont à (26) et en forment un système fondamental car (28) donne

$$\Delta(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = 1.$$

Une solution quelconque $\bar{u}$, $\bar{v}$ et $\bar{\theta}$ des équations pour u, v et θ donne lieu, d'après (35), à un autre système fondamental $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$, $\bar{\omega}_3$; celui-ci étant lié au premier par des relations de la forme (31), on voit que $\bar{u}$ et $\bar{v}$ se déduisent de u et v par l'homographie (34).

Ces points établis, notre démonstration s'achève comme il suit. Si les deux équations (24) possèdent une intégrale commune C, les équations (23) en admettent une paire C, D liées par la relation (18). Il existe alors un système fondamental ω_1, ω_2, ω_3 de (26), et les formules (30) déterminent un u et un v satisfaisant à (16), (21 pour u), (21 pour v), (22), ainsi qu'aux équations (19) dérivées de (16). De plus, u et v satisfont à (12) qui sont des combinaisons linéaires des équations précédentes. Déterminons maintenant deux fonctions f_1 et f_2 par les formules (11); d'après (12), f_1 sera fonction de x seul et f_2 de y seul.

Puis calculons deux fonctions g_1 et g_2 au moyen de (9); d'après (11), elles ne dépendront que de x et y respectivement. L'équation (15) donne lieu à un f_3 qui, en vertu de (18), est fonction de z seul; enfin (7) nous fournit un g_3 ne dépendant, d'après (15) ou (13),

que de z. Comme (7) est identique à (4), nous avons donc réduit l'équation donnée (1) à la forme voulue.

En partant d'un autre système fondamental $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$, $\overline{\omega}_3$, nous aurions trouvé deux autres fonctions $\overline{u}$ et $\overline{v}$ et obtenu, de proche en proche et de la manière indiquée, d'autres fonctions $\overline{f_i}, \overline{g_i}$ $(i = 1, 2, 3)$. Mais, d'après (34), $\overline{u}$ et $\overline{v}$ sont des transformées homographiques de u et de v, et les $\overline{f_i}$, $\overline{g_i}$ sont, par suite, des transformées des f_i, g_i par l'homographie (6) associée à (34).

En résumé, nous avons établi le théorème fondamental suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation donnée (1) *puisse être ramenée à la forme* (4) *consiste dans l'existence d'une intégrale commune* C *aux deux équations aux dérivées partielles* (24).

Toutes les équations (4) *appartenant à une même valeur de* C *s'obtiennent de l'une quelconque d'entre elles par une homographie* (6), *et inversement, deux équations* (4) *homographiques conduisent à la même valeur de* C.

2. — Conditions pour qu'une ou plusieurs des échelles soient rectilignes.

Le tracé graphique d'un nomogramme se simplifie considérablement lorsqu'une ou plusieurs des échelles deviennent rectilignes, circonstance qu'on rencontre dans beaucoup d'équations fournies par la pratique.

Nous allons rechercher d'abord la condition nécessaire et suffisante pour que l'échelle des x soit rectiligne.

Par une transformation homographique convenable, on peut réduire la droite supportant l'échelle des x à être l'axe des η; dans l'équation (5), on a donc $f_1(x) = 0$. La première des équations (9) donne alors

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Comme $\frac{\partial v}{\partial x} \neq 0$ en vertu de (16), la deuxième des équations (21)

donne

$$\frac{\partial\theta}{\partial y} = \mathrm{D}, \tag{36}$$

et la deuxième équation (22)

$$\frac{\partial \mathrm{C}}{\partial y} + 2\frac{\partial \mathrm{D}}{\partial x} = 0. \tag{37}$$

L'équation (37), jointe aux équations (18) et (23), forme donc une *condition nécessaire pour que l'échelle des x soit rectiligne*. Je dis que *cette condition est aussi suffisante*.

D'abord, les équations (23) et (37) sont équivalentes au système

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \mathrm{C}}{\partial y} + 2\frac{\partial \mathrm{D}}{\partial x} = 0,\\ &\frac{\partial^2 \mathrm{C}}{\partial x\,\partial y} = \mathrm{C}\frac{\partial \mathrm{C}}{\partial y}. \end{aligned}\right. \tag{38}$$

Soit x_0, y_0 un point où C et D sont holomorphes; la seconde de ces équations donne, en intégrant par rapport à y entre les limites y_0 et y, et posant $\mathrm{C}(x, y_0) = \mathrm{C}_0$,

$$\frac{\partial \mathrm{C}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{C}_0}{\partial x} = \frac{1}{2}(\mathrm{C}^2 - \mathrm{C}_0^2). \tag{39}$$

En ayant égard à (36), les équations (22) se réduisent à

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = \frac{1}{3}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x} - \mathrm{C}\right)\left(\frac{\partial\theta}{\partial x} + 2\mathrm{C}\right) + \frac{\partial \mathrm{C}}{\partial x},$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial y} = \mathrm{D};$$

l'expression

$$\theta = \int_{x_0, y_0}^{x, y} \left(\frac{3}{2}\mathrm{C}_0 - \frac{1}{2}\mathrm{C}\right) dx + \mathrm{D}\, dy \tag{40}$$

forme une intégrale particulière du système précédent, car d'abord l'expression sous le signe intégral est une différentielle exacte en vertu de (37), et puis θ, qui satisfait visiblement à la seconde équation du système, satisfait aussi à la première en vertu de (39). En

substituant cette valeur de θ dans le système (21), celui-ci devient

$$(41)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= C_0 \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} &= \frac{1}{2}(C_0 - C)\frac{\partial u}{\partial y}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= D\frac{\partial u}{\partial y}, \end{aligned}\right.$$

et il faut trouver un u et un v satisfaisant chacun à ce système, à (16) et enfin à $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$. Prenons pour v une intégrale quelconque du système

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^{\int_{x_0}^{x} C_0\,dx},$$
$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0;$$

l'équation (16) donne alors

$$(42)\qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\,e^{\int_{x_0,y_0}^{x,y} \frac{1}{2}(C_0 - C)\,dx + D\,dy},$$

expression satisfaisant aux deux dernières équations (41), dont la première donne d'ailleurs

$$(43)\qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \varphi(y)\,e^{\int_{x_0}^{x} C_0\,dx}.$$

La condition d'intégrabilité de (42) et (43), savoir

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x},$$

donne pour déterminer φ l'équation

$$(44)\qquad \frac{d\varphi}{dy} = -\,\frac{1}{2}(C_0 - C)\,e^{\int_{x_0,y_0}^{x,y} -\frac{1}{2}(C_0 + C)\,dx + D\,dy}.$$

dont le membre droit est fonction de y seul, comme on le voit en différentiant par rapport à x et utilisant (39). En prenant pour u une intégrale particulière quelconque de (42) et (43), on a donc trois fonctions u, v, θ satisfaisant à (16), (21 pour u), (21 pour v) et (22),

et d'ailleurs $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$. Déterminant ensuite les f_i, g_i ($i = 1, 2, 3$) par les formules (11), (9), (15) et (7), on voit que $f_1(x) = 0$; l'échelle des x est, par suite, rectiligne.

En permutant x et y, les formules du paragraphe I font voir que

$$u, \quad v, \quad \theta, \quad C, \quad D, \quad M$$

se changent en

$$u, \quad v, \quad -\theta, \quad D, \quad C, \quad \frac{1}{M},$$

et il s'ensuit que *la condition nécessaire et suffisante pour que l'échelle des y soit rectiligne s'exprime par l'équation*

$$2\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial x} = 0, \tag{45}$$

jointe aux équations (18) *et* (23).

Afin de trouver enfin la condition pour que l'échelle des z soit rectiligne, il convient de prendre y et z pour variables indépendantes. En faisant, comme d'usage,

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \qquad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \qquad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}, \qquad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

et dénotant par $\frac{\eth}{\eth y}$, $\frac{\eth}{\eth z}$ les différentiations par rapport aux nouvelles variables indépendantes, ainsi que par M_x, N_x, θ_x, C_x, D_x les expressions qui remplacent M, N, θ, C, D, savoir

$$M_x = -\frac{\frac{\eth x}{\eth z}}{\frac{\eth x}{\eth y}}, \qquad N_x = \frac{\eth M_x}{\eth y} + \frac{1}{M_x}\frac{\eth M_x}{\eth z},$$

$$e^{\theta_x} = \frac{\eth u}{\eth y}\frac{\eth v}{\eth z} - \frac{\eth u}{\eth z}\frac{\eth v}{\eth y},$$

$$C_x = \left(\frac{\eth^2 u}{\eth y^2}\frac{\eth v}{\eth z} - \frac{\eth^2 v}{\eth y^2}\frac{\eth u}{\eth z} + 2\frac{\eth^2 u}{\eth y\,\eth z}\frac{\eth v}{\eth y} - 2\frac{\eth^2 v}{\eth y\,\eth z}\frac{\eth u}{\eth y}\right)e^{-\theta_x},$$

$$D_x = \left(\frac{\eth^2 v}{\eth z^2}\frac{\eth u}{\eth y} - \frac{\eth^2 u}{\eth z^2}\frac{\eth v}{\eth y} + 2\frac{\eth^2 v}{\eth y\,\eth z}\frac{\eth u}{\eth z} - 2\frac{\eth^2 v}{\eth y\,\eth z}\frac{\eth u}{\eth z}\right)e^{-\theta_x},$$

les formules élémentaires bien connues

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} - \frac{q}{p}\frac{\partial}{\partial x},$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{p}\frac{\partial}{\partial x}$$

donnent, en tenant compte de (12) et (18),

$$(46)\quad \left\{\begin{aligned} &M_x = \frac{1}{q},\\ &N_x = -\frac{t}{q^2},\\ &e^{\theta_x} = -\frac{1}{p}e^{\theta},\\ &C_x = \frac{q}{p}C - \frac{qr}{p^2} + \frac{t}{q} = -D - \frac{2s}{p} + \frac{2t}{q},\\ &D_x = \frac{1}{p}C - \frac{r}{p^2} = -\frac{1}{q}D - \frac{2s}{pq} + \frac{t}{q^2},\\ &D_x = M_x C_x + N_x,\\ &2\frac{\partial C_x}{\partial z} + \frac{\partial D_x}{\partial y} = \frac{1}{p}\left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial D}{\partial x}\right) + \frac{3}{p}\frac{\partial^2 \log M}{\partial x\,\partial y},\\ &\frac{\partial C_x}{\partial z} + 2\frac{\partial D_x}{\partial y} = \frac{1}{p}\left(2\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial x}\right). \end{aligned}\right.$$

D'ailleurs il est évident que les équations (23), par leur signification même comme conditions nécessaires et suffisantes [avec (18) qui, d'après (46), se transforme en elle-même] pour que (1) soit réductible à la forme (4), restent invariantes pour le changement de variables en question. Il s'ensuit, d'après (45) et (46), que *la condition nécessaire et suffisante* pour que l'échelle des z soit rectiligne s'exprime par l'équation

$$(47)\qquad \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial D}{\partial x} + 3\frac{\partial^2 \log M}{\partial x\,\partial y} = 0,$$

jointe, bien entendu, *aux équations* (18) *et* (23).

D'après ce qui précède, les conditions pour que plusieurs des échelles soient rectilignes s'obtiennent en combinant les conditions pour que les échelles individuelles le soient. Par exemple, les équa-

tions (37) et (45) donnent

$$\frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial D}{\partial x} = 0, \tag{48}$$

et les équations (23) sont alors identiquement satisfaites; il s'ensuit que (48) *et* (18) *expriment les conditions nécessaires et suffisantes pour que les échelles des x et des y soient rectilignes à la fois.*

Enfin les équations (37), (45) et (47) donnent

$$\frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial D}{\partial x} = \frac{\partial^2 \log M}{\partial x\, \partial y} = 0. \tag{49}$$

L'équation

$$\frac{\partial^2 \log M}{\partial x\, \partial y} = 0, \tag{50}$$

exprime la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation donnée (1) *admette une représentation nomographique à trois échelles rectilignes.*

On peut démontrer directement que les équations $\frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial D}{\partial x} = 0$, $D = MC + N$ possèdent une intégrale commune lorsque $\frac{\partial^2 \log M}{\partial x\, \partial y} = 0$; cependant il vaut mieux, en vue des développements qui vont suivre au paragraphe 4, procéder de la manière suivante. L'intégrale de (50) est évidemment

$$M = -\frac{\psi'(y)}{\varphi'(x)},$$

$\varphi(x)$ et $\psi(y)$ étant des fonctions arbitraires. La première des équations (14) devient alors

$$\frac{\partial[z, \varphi(x) + \psi(y)]}{\partial(x, y)} = 0.$$

dont l'intégrale générale est visiblement

$$\varphi(x) + \psi(y) + \chi(z) = 0, \tag{51}$$

$\chi(z)$ désignant une nouvelle fonction arbitraire. Or (51) peut

s'écrire

$$\begin{vmatrix} \varphi(x) & -1 & 1 \\ \psi(x) & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2}\chi(z) & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

de sorte que la condition (50), nécessaire d'après (49), est aussi suffisante.

3. — Sur la détermination de u, v et θ lorsque C est connu.

Supposons que les échelles des x et des y soient courbes toutes les deux, c'est-à-dire que

$$(52) \qquad \frac{\partial C}{\partial y} + 2\frac{\partial D}{\partial x} \neq 0, \qquad 2\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial x} \neq 0.$$

Nous allons voir maintenant comment, supposant C connu, u, v et θ, et par suite les f_i et g_i, s'obtiennent par des différentiations et éliminations. La question revient évidemment à la recherche d'un système fondamental ω_1, ω_2, ω_3 de (26).

La première équation (26) peut s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{1}{3}C\omega\right) = \frac{2}{3}C\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{1}{3}C\omega\right),$$

d'où

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{1}{3}C\omega = \varphi(y)\, e^{\frac{2}{3}\int C\,dx}.$$

Or, d'après (52), la première des équations (23) peut s'écrire

$$(53) \qquad C = \frac{\partial}{\partial x}\log\left(2\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial x}\right),$$

de sorte que nous obtenons

$$(54) \qquad \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{1}{3}C\omega = \varphi(y)\left(2\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial x}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

L'intégrale générale de (54) est

$$\omega = e^{-\frac{1}{3}\int C\,dx}\left[\psi(y) + \varphi(y)\int e^{\frac{1}{3}\int C\,dx}\left(2\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial x}\right)^{\frac{2}{3}} dx\right],$$

ou, en vertu de (53),

$$\omega = \frac{1}{\left(2\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial x}\right)^{\frac{1}{3}}}\left[\psi(y) + \varphi(y)\int\left(2\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial x}\right)dx\right],$$

ou bien, en appliquant encore une fois (53),

$$(55)\quad \omega = \frac{1}{\left(2\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial x}\right)^{\frac{1}{3}}}\left\{\psi(y) + \varphi(y)\left[2\frac{\partial}{\partial y}\log\left(2\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial x}\right) + D\right]\right\}.$$

La deuxième équation (26) s'écrit aussi

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\omega}{\partial x} + \frac{1}{3}C\omega\right) + \frac{1}{3}D\left(\frac{\partial\omega}{\partial x} + \frac{1}{3}C\omega\right) = \frac{1}{3}\left(2\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial x}\right)\omega,$$

et en y substituant (54) et (55), il vient, après quelques réductions,

$$\psi(y) = 3\varphi'(y).$$

Nous obtenons, par suite, de (55)

$$(56)\quad \omega = \frac{1}{\left(2\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial x}\right)^{\frac{1}{3}}}\left\{3\varphi'(y) + \varphi(y)\left[2\frac{\partial}{\partial y}\log\left(2\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial x}\right) + D\right]\right\}.$$

En substituant cette expression dans la dernière équation (26), nous obtenons pour $\varphi(y)$ une équation différentielle linéaire et homogène du troisième ordre

$$H(\varphi; x, y) = 0,$$

dont les coefficients dépendent, *a priori*, de x et y. Or à un système fondamental ω_1, ω_2, ω_3 de (26) correspondent, dans (56), trois fonctions $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $\varphi_3(y)$ linéairement indépendantes satisfaisant à $H = 0$; il s'ensuit que, dans cette dernière équation, les rapports des coefficients sont indépendants de x. On obtient donc une équation $H(\varphi; x_i, y) = 0$ équivalente à $H(\varphi; x, y) = 0$, en faisant, dans la dernière équation (26), $x = x_i =$ const. et y substituant l'expression (56) pour ω, après y avoir posé $x = x_i$. Mais en faisant $\omega(x_i, y) = 0$, c'est-à-dire, d'après (56),

$$(57)\qquad 3\varphi'(y) + \varphi(y)\left[2\frac{\partial}{\partial y}\log\left(2\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial x}\right) + D\right]_{x=x_i} = 0,$$

la dernière équation (26) avec $x = x_i$ est satisfaite, et par suite, l'équation $H(\varphi; x_i, y) = 0$ ou son équivalente $H(\varphi; x, y) = 0$. Comme la deuxième équation (23) peut s'écrire

$$(58)\qquad D = \frac{\partial}{\partial y}\log\left(\frac{\partial C}{\partial y} + 2\frac{\partial D}{\partial x}\right),$$

on voit qu'une intégrale particulière de (57) est donnée par l'expression

$$(59)\qquad \varphi_i(y) = \frac{1}{\left(2\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial x}\right)_{x=x_i}^{\frac{2}{3}}\left(\frac{\partial C}{\partial y} + 2\frac{\partial D}{\partial x}\right)_{x=x_i}^{\frac{1}{3}}},$$

et, en vertu de (56), (57) et (59), les expressions

$$(60)\qquad \omega_i = \frac{1}{\left(2\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial x}\right)_{x=x_i}^{\frac{2}{3}}\left(\frac{\partial C}{\partial y} + 2\frac{\partial D}{\partial x}\right)_{x=x_i}^{\frac{1}{3}}\left(2\frac{\partial C}{\partial y} + 2\frac{\partial D}{\partial x}\right)^{\frac{1}{3}}}$$
$$\times\left\{2\frac{\partial}{\partial y}\log\left(2\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial x}\right) + D - \left[2\frac{\partial}{\partial y}\log\left(2\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial x}\right) + D\right]_{x=x_i}\right\}\qquad (i = 1, 2, 3)$$

sont des intégrales particulières du système (26).

Peut-on déterminer, dans (60), les constantes x_1, x_2, x_3 de sorte que ω_1, ω_2, ω_3 forment un système fondamental? Pour cela, il faut et il suffit que $\Delta(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \neq 0$. En se reportant à (28), il est clair que

$$\Delta(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \frac{1}{\rho^3}\Delta(\rho\omega_1, \rho\omega_2, \rho\omega_3),$$

quelle que soit la fonction ρ, et en faisant $\rho = \left(2\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial x}\right)^{\frac{1}{3}}$, (56) nous donne

$$\Delta(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \frac{1}{2\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial x}}\left|\begin{matrix} 3\varphi_i'(y) + \varphi_i(y)\left[2\frac{\partial}{\partial y}\log\left(2\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial x}\right) + D\right], \\ \varphi_i(y)\left(2\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial x}\right), \\ 3\varphi_i''(y) + \varphi_i'(y)\left[2\frac{\partial}{\partial y}\log\left(2\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial x}\right) + D\right] \\ + \varphi_i(y)\left[2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\log\left(2\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial x}\right) + \frac{\partial D}{\partial y}\right], \end{matrix}\right|_{(i=1,2,3)}$$

ou, en réduisant le déterminant,

$$\Delta(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = -9 \begin{vmatrix} \varphi_1(y) & \varphi_2(y) & \varphi_3(y) \\ \varphi'_1(y) & \varphi'_2(y) & \varphi'_3(y) \\ \varphi''_1(y) & \varphi''_2(y) & \varphi''_3(y) \end{vmatrix}.$$

En posant $\varphi_i(y) = e^{\psi_i(y)}$, on trouve

$$(61) \qquad \Delta(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = -9\, e^{\psi_1(y)+\psi_2(y)+\psi_3(y)} \begin{vmatrix} 1 \\ \psi'_i(y) \\ \psi''_i(y) + [\psi'_i(y)]^2 \end{vmatrix}_{i=1,2,3}$$

et, d'après (57),

$$\psi'_i(y) = -\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial y}\log\left(2\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial x}\right)_{x=x_i} - \frac{1}{3}D(x_i, y).$$

Choisissons d'abord x_1 et x_2 de sorte que

$$(62) \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \psi'_1(y) & \psi'_2(y) \end{vmatrix} = \psi'_2(y) - \psi'_1(y) \neq 0,$$

ce qui est toujours possible, car autrement $2\frac{\partial}{\partial y}\log\left(2\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial x}\right) + D$ serait indépendant de x, c'est-à-dire

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[2\frac{\partial}{\partial y}\log\left(2\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial x}\right) + D\right] = 2\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial x} = 0,$$

contrairement à l'hypothèse (52). Avec ces valeurs de x_1 et x_2, supposons que l'expression (61) s'annule quel que soit x_3; en écrivant x au lieu de x_3, et $\psi_3(x, y)$ au lieu de $\psi_3(y)$, on aurait donc

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \psi'_1(y) & \psi'_2(y) & \dfrac{\partial\psi(x,y)}{\partial y} \\ \psi''_1(y) + \psi'_1(y)^2 & \psi''_2(y) + \psi'_2(y)^2 & \dfrac{\partial^2\psi(x,y)}{\partial y^2} + \left[\dfrac{\partial\psi(x,y)}{\partial y}\right]^2 \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en développant et tenant compte de (62),

$$(63) \qquad \frac{\partial^2\psi(x,y)}{\partial y^2} + \left[\frac{\partial\psi(x,y)}{\partial y}\right]^2 = \alpha(y)\frac{\partial\psi(x,y)}{\partial y} + \beta(y).$$

Différentions cette équation par rapport à x; comme nous avons

$$\frac{\partial\psi(x,y)}{\partial y} = -\frac{1}{3}\left[2\frac{\partial}{\partial y}\log\left(2\frac{\partial C}{\partial y}+\frac{\partial D}{\partial x}\right)+D\right],$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\psi(x,y)}{\partial y} = -\frac{1}{3}\left(2\frac{\partial C}{\partial y}+\frac{\partial D}{\partial x}\right),$$

il vient

$$(64)\qquad 2\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial x\,\partial y}+2D\left(2\frac{\partial C}{\partial y}+\frac{\partial D}{\partial x}\right) = -3\alpha(y)\left(2\frac{\partial C}{\partial y}+\frac{\partial D}{\partial x}\right).$$

Différentions encore une fois par rapport à x; en tenant compte de (23), nous obtenons

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[C\left(2\frac{\partial C}{\partial y}+\frac{\partial D}{\partial x}\right)\right]+2\frac{\partial D}{\partial x}\left(2\frac{\partial C}{\partial y}+\frac{\partial D}{\partial x}\right)+2DC\left(2\frac{\partial C}{\partial y}+\frac{\partial D}{\partial x}\right)$$
$$= -3\alpha(y)C\left(2\frac{\partial C}{\partial y}+\frac{\partial D}{\partial x}\right),$$

et en éliminant $\alpha(y)$ à l'aide de (64), il vient enfin

$$\left(\frac{\partial C}{\partial y}+2\frac{\partial D}{\partial x}\right)\left(2\frac{\partial C}{\partial y}+\frac{\partial D}{\partial x}\right) = 0,$$

contrairement à l'hypothèse (52).

Par suite, si les échelles des x et des y sont courbes, on peut choisir les constantes x_1, x_2, x_3 de façon qu'en calculant ω_1, ω_2, ω_3 par la formule (60), ces fonctions forment un système fondamental de (26); les formules du paragraphe I donnent alors les f_i, g_i par des différentiations et éliminations.

Si, par exemple, l'échelle des x était rectiligne, celles des y et des z courbes, on prendrait y et z pour variables indépendantes; la méthode que nous venons de donner s'applique donc toutes les fois que l'une des échelles au plus est rectiligne. Le cas de deux échelles rectilignes et la troisième courbe sera traité au paragraphe 5; nous y verrons que les f_i, g_i s'obtiennent encore sans quadratures, par des différentiations et éliminations. Nous tournerons maintenant notre attention sur le cas où l'équation donnée admet une représentation nomographique à trois échelles rectilignes.

4. — Le cas de $\frac{\partial^2 \log M}{\partial x\, \partial y} = 0$.

Dans ce cas, en calculant M d'après l'équation donnée (1), on obtient une expression de la forme

$$M = \alpha(x)\,\beta(y). \tag{65}$$

En posant, pour arriver à l'équation (51),

$$\varphi(x) = \int \frac{dx}{\alpha(x)}, \qquad \psi(y) = -\int \beta(y)\,dy. \tag{66}$$

et prenant φ et ψ pour nouvelles variables indépendantes, l'équation (1) se réduit à une équation entre $\varphi + \psi$ et z, dont on tire

$$\varphi + \psi = -\chi(z).$$

Pour obtenir l'équation

$$\varphi(x) + \psi(y) + \chi(z) = 0, \tag{51}$$

il faut donc, en dehors des éliminations usuelles, les deux quadratures (66).

Par un changement de variables (51) se réduit à la forme

$$x + y + z = 0. \tag{67}$$

Nous en avons déjà rencontré, à la fin du paragraphe 2, une représentation nomographique; nous verrons qu'il en existe d'autres essentiellement différentes.

L'équation (67) donne

$$M = -1, \qquad N = 0;$$

par suite, d'après (18),

$$D = -C, \tag{68}$$

et introduisant cette valeur de D dans les équations (23), il vient

$$\left\{\begin{aligned} &2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial C}{\partial x} - \frac{1}{2}C^2\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial C}{\partial x} - \frac{1}{2}C^2\right) = 0,\\ &\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{1}{2}C^2\right) - 2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{1}{2}C^2\right) = 0. \end{aligned}\right. \tag{69}$$

Pour trouver toutes les représentations nomographiques de (67), il faut intégrer complètement ce système (69). On trouve immédiatement deux intégrales premières, savoir

$$(70)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial C}{\partial x} - \dfrac{1}{2}C^2 = -6\varphi(2x+y), \\ \dfrac{\partial C}{\partial y} + \dfrac{1}{2}C^2 = 6\psi(x+2y), \end{cases}$$

de sorte que ce système est équivalent au système (69). La condition d'intégrabilité

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}C^2 - 6\varphi\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(6\psi - \frac{1}{2}C^2\right)$$

donne, en tenant compte de (70),

$$(71)\qquad [\psi(x+2y) - \varphi(2x+y)]C = \varphi'(2x+y) + \psi'(x+2y).$$

Dans ce qui suit, il convient de distinguer les quatre cas suivants :

I. $\varphi' = \psi' = 0$;

II. $\varphi' = 0, \quad \psi' \neq 0$;

III. $\varphi' \neq 0, \quad \psi' = 0$;

IV. $\varphi' \neq 0, \quad \psi' \neq 0$.

Cas I : $\varphi' = \psi' = 0$. — On a $\varphi = \text{const.} = c_1$, $\psi = \text{const.} = c_2$, et pour $C \neq 0$, (71) donne $c_1 = c_2$, tandis que pour $C = 0$, (70) donne $c_1 = c_2 = 0$. On a donc toujours $c_1 = c_2 = -\frac{1}{3}c$; l'équation (71) se réduit à une identité, et (70) devient

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{1}{2}C^2 + 2c,$$

$$\frac{\partial C}{\partial y} = -\left(\frac{1}{2}C^2 + 2c\right),$$

d'où

$$\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} = 0$$

et

$$(72)\qquad C = \chi(x-y), \qquad \chi'(x-y) = \frac{1}{2}[\chi(x-y)]^2 + 2c.$$

Il faut maintenant subdiviser notre cas de la manière suivante :

$$\mathrm{I}\alpha : c = 0; \qquad \mathrm{I}\beta : c > 0; \qquad \mathrm{I}\gamma : c < 0.$$

Cas Iα : $c = 0$. — Les équations (72) deviennent

$$(73) \qquad \mathrm{C} = \chi(x - y), \qquad \chi' = \frac{1}{2}\chi^2.$$

Subdivisons encore ce cas en deux :

$$\mathrm{I}\alpha 1 : \chi = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{I}\alpha 2 : \chi \neq 0.$$

Cas Iα 1 : $\chi = 0$. — Les équations (73) donnent alors

$$(74) \qquad \mathrm{C} = 0$$

et (68), $\mathrm{D} = 0$; le système (22) admet l'intégrale particulière

$$\theta = 0,$$

et avec ce choix de θ, les équations (16) et (22) ont pour intégrales particulières

$$u = x - y, \qquad v = y.$$

En calculant les f_i et g_i par les formules (11), (9), (15) et (7), nous trouvons l'équation

$$(75) \qquad \begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 0 & y & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}z & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(x + y + z) = 0.$$

Nous dirons, pour abréger, que deux nomogrammes appartiennent à la même famille quand leurs équations de définition (4) et (5) sont liées par l'homographie (6); à deux nomogrammes d'une famille correspond donc la même valeur de C et inversement (théorème fondamental du paragraphe I), et nous appellerons *paramètres de la famille* les constantes arbitraires entrant dans l'expression de C. Nous dirons encore que toutes les équations obtenues en faisant varier les paramètres forment une classe.

L'équation (75) fait voir que le cas Iα 1 embrasse une famille de nomogrammes à trois échelles rectilignes et concourantes, et n'ayant pas de paramètre. Cette famille a été découverte depuis longtemps par M. d'Ocagne.

Cas Iα2 : $\chi \neq 0$. — La deuxième équation (73) donne alors en l'intégrant

$$-\frac{1}{\chi} = \frac{1}{2}(x - y) + \text{const.}$$

ou

$$-\frac{1}{\chi} = \frac{1}{2}(\sqrt{x - x_0} - \sqrt{y - y_0}),$$

où, bien entendu, c'est la différence $x_0 - y_0$ qui est la constante arbitraire; la première équation (73) nous montre alors que

$$C = \frac{2}{\sqrt{y - y_0} - \sqrt{x - x_0}}. \tag{76}$$

Cette expression fait voir que les échelles des x et des y sont courbes; la méthode du paragraphe 3 fournit l'équation nomographique correspondante, et nous pouvons nous borner, par suite, à écrire cette équation et vérifier qu'elle donne bien la valeur (76) pour C.

Désignons, ici et dans la suite du paragraphe présent, par z_0 la constante déterminée par la condition

$$x_0 + y_0 + z_0 = 0; \tag{77}$$

l'équation en question s'écrit

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{x - x_0} & \frac{1}{(x - x_0)^2} & 1 \\ \frac{1}{y - y_0} & \frac{1}{(y - y_0)^2} & 1 \\ -\frac{1}{z - z_0} & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{(\sqrt{x - x_0} - \sqrt{y - y_0})(x + y + z)}{(x - x_0)^2 (y - y_0)^2 (z - z_0)} = 0. \tag{78}$$

Nous en tirons successivement, à l'aide de (8), (16) et (17),

$$u = \frac{1}{x - x_0} + \frac{1}{y - y_0},$$

$$v = \frac{1}{(x - x_0)(y - y_0)},$$

$$e^{\theta} = \frac{\sqrt{x - x_0} - \sqrt{y - y_0}}{(x - x_0)^3 (y - y_0)^3},$$

$$e^{\theta} C = -\frac{2}{(x - x_0)^3 (y - y_0)^4},$$

d'où l'expression (76) pour C.

D'après (78), le cas Iα2 donne lieu à une classe de nomogrammes où les échelles des x et des y sont supportées par la même conique, l'échelle des z étant rectiligne et tangente à cette conique. Les familles contiennent un paramètre, savoir $x_0 - y_0$. Ces nomogrammes ont été découverts par M. Clark [1]. Vient ensuite le

Cas Iβ : $c > 0$. — En faisant $c = a^2$, où nous pouvons supposer par exemple $a > 0$, les équations (72) donnent

$$C = -2a \cot a(\overline{x - x_0} - \overline{y - y_0}), \tag{79}$$

et l'équation nomographique devient

$$\begin{vmatrix} \cot a(x-x_0) & \cot^2 a(x-x_0) & 1 \\ \cot a(y-y_0) & \cot^2 a(y-y_0) & 1 \\ -\cot a(z-z_0) & -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\sin a(\overline{x-x_0} - \overline{y-y_0}) \sin a(x+y+z)}{\sin^2 a(x-x_0)\sin^2 a(y-y_0)\sin a(z-z_0)} = 0, \tag{80}$$

dont nous tirons

$$\begin{aligned} u &= \cot a(x-x_0) + \cot a(y-y_0), \\ v &= -\cot a(x-x_0)\cot a(y-y_0), \\ e^\theta &= \frac{a^2 \sin a(\overline{x-x_0} - \overline{y-y_0})}{\sin^3 a(x-x_0)\sin^3 a(y-y_0)}, \\ e^\theta C &= -\frac{2a^3 \cos a(\overline{x-x_0} - \overline{y-y_0})}{\sin^3 a(x-x_0)\sin^3 a(y-y_0)}, \end{aligned}$$

et, par suite, l'expression (79) pour C.

L'équation (80) fait voir que le cas Iβ donne lieu à une classe de nomogrammes aux échelles des x et des y supportées par la même conique, l'échelle des z étant rectiligne et ne coupant pas ladite conique. Il y a deux paramètres, $x_0 - y_0$ et a. Ces nomogrammes, dans le cas particulier $a = 1$, sont également dus à M. Clark.

---

(1) *Théorie générale des abaques d'alignement de tout ordre* (*Revue de Mécanique*, 1907). — *Voir* aussi : R. Soreau, *Nouveaux types d'abaques*, etc. (*Mémoires et comptes rendus de la Société des Ingénieurs civils de France*, 1906). — d'Ocagne, *Calcul graphique et Nomographie*, p. 285 et suiv.

Cas Iγ : $c < 0$. — Il faut subdiviser ce cas en deux :

$$\text{I}\gamma_1 : \frac{1}{2}\chi^2 + 2c = 0 \qquad \text{et} \qquad \text{I}\gamma_2 : \frac{1}{2}\chi^2 + 2c \neq 0.$$

Cas Iγ1 : $\frac{1}{2}\chi^2 + 2c = 0$. — En désignant par a une constante réelle et différente de zéro, on aura alors

$$C = a. \tag{81}$$

Le système (22) admet l'intégrale particulière définie par

$$e^{\theta} = -a^2 e^{a(x-y)},$$

les équations (16) et (21) seront satisfaites en faisant

$$u = e^{-ay} - e^{ax}, \qquad v = e^{-ay},$$

et les formules (11), (9), (15) et (7) nous donnent l'équation

$$\begin{vmatrix} 0 & e^{ax} & 1 \\ 1 & e^{-ay} & 1 \\ \dfrac{1}{1-e^{az}} & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{e^{-ay}(e^{a(x+y+z)} - 1)}{e^{az} - 1} = 0, \tag{82}$$

Par suite, le cas Iγ1 donne lieu à une classe de nomogrammes à trois échelles rectilignes non concourantes, classe renfermant un paramètre a. Pour $a = \pm 1$, ces nomogrammes ont été découverts par M. d'Ocagne, qui a d'ailleurs remarqué que les deux familles $a = 1$ et $a = -1$ sont différentes homographiquement, circonstance mise immédiatement en évidence par notre théorie générale.

Cas Iγ2 : $\frac{1}{2}\chi^2 + 2c \neq 0$. — Faisons $c = -a^2$, $a > 0$, et introduisons les fonctions hyperboliques

$$\begin{aligned} \text{sh}\, x &= -i \sin ix, \\ \text{ch}\, x &= \cos ix, \\ \text{coth}\, x &= i \cot ix, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

La comparaison du cas Iβ nous donne immédiatement

$$C = -2a \coth a(\overline{x - x_0} - \overline{y - y_0}). \tag{83}$$

$$\begin{vmatrix} \coth a(x-x_0) & \coth^2 a(x-x_0) & 1 \\ \coth a(y-y_0) & \coth^2 a(y-y_0) & 1 \\ -\coth a(z-z_0) & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\operatorname{sh} a(\overline{x-x_0} - \overline{y-y_0}) \operatorname{sh} a(x+y+z)}{\operatorname{sh}^2 a(x-x_0) \operatorname{sh}^2 a(y-y_0) \operatorname{sh} a(z-z_0)} = 0. \tag{84}$$

D'après (84), le cas Iγ2 donne lieu à une classe de nomogrammes renfermant deux paramètres, $x_0 - y_0$ et a. Les échelles des x et des y sont supportées par la même conique, laquelle est coupée en deux points par l'échelle rectiligne des z. Pour $a = 1$, ces nomogrammes ont été découverts par M. Clark.

Il faut envisager maintenant le

Cas II : $\varphi' = 0$, $\psi' \neq 0$. — Comme $\varphi = \text{const.} = c$, l'équation (71) donne

$$C = \frac{\psi'(x+2y)}{\psi(x+2y) - c};$$

or, d'après (67), $x + 2y = y - z$, de sorte que

$$C = \chi(y - z).$$

En prenant y et z pour variables indépendantes, les formules (46) font voir que $C_x = C$, de sorte que nous n'avons qu'à répéter, avec les nouvelles variables indépendantes, la discussion du cas I. Les cas Iα1 et Iγ1 ne nous donnent rien de nouveau, tandis que les autres cas conduisent aux classes suivantes de nomogrammes coniques :

$$\begin{vmatrix} -\dfrac{1}{x-x_0} & 0 & 1 \\ \dfrac{1}{y-y_0} & \dfrac{1}{(y-y_0)^2} & 1 \\ \dfrac{1}{z-z_0} & \dfrac{1}{(z-z_0)^2} & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad C = \frac{2}{x - x_0 + 2(y - y_0)}, \tag{85}$$

$$\begin{vmatrix} -\cot a(x-x_0) & -1 & 1 \\ \cot a(y-y_0) & \cot^2 a(y-y_0) & 1 \\ \cot a(z-z_0) & \cot^2 a(z-z_0) & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{86}$$

et

$$C = 2a \cot a(\overline{x - x_0} + 2\overline{y - y_0}),$$

$$(87) \quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{vmatrix} -\coth a(x - x_0) & 1 & 1 \\ \coth a(y - y_0) & \coth^2 a(y - y_0) & 1 \\ \coth a(z - z_0) & \coth^2 a(z - z_0) & 1 \end{vmatrix} = 0, \\ C = 2a \coth a(x - x_0 + 2\overline{y - y_0}). \end{array} \right.$$

Cas III : $\varphi' \neq 0$, $\psi' = 0$. — Un raisonnement analogue au précédent fait voir qu'en prenant z et x comme variables indépendantes

$$C = C_y = \chi(z - x);$$

nous obtenons les nouveaux nomogrammes coniques

$$(88) \quad \begin{vmatrix} \frac{1}{x - x_0} & \frac{1}{(x - x_0)^2} & 1 \\ -\frac{1}{y - y_0} & 0 & 1 \\ \frac{1}{z - z_0} & \frac{1}{(z - z_0)^2} & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad C = \frac{2}{2\overline{x - x_0} + y - y_0},$$

$$(89) \quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{vmatrix} \cot a(x - x_0) & \cot^2 a(x - x_0) & 1 \\ -\cot a(y - y_0) & -1 & 1 \\ \cot a(z - z_0) & \cot^2 a(z - z_0) & 1 \end{vmatrix} = 0, \\ C = 2a \cot a(2\overline{x - x_0} + y - y_0), \end{array} \right.$$

$$(90) \quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{vmatrix} \coth a(x - x_0) & \coth^2 a(x - x_0) & 1 \\ -\coth a(y - y_0) & 1 & 1 \\ \coth a(z - z_0) & \coth^2 a(z - z_0) & 1 \end{vmatrix} = 0, \\ C = 2a \coth a(2\overline{x - x_0} + y - y_0). \end{array} \right.$$

Vient enfin le

Cas IV : $\varphi' \neq 0$, $\psi' \neq 0$. — Posant pour le moment $2x + y = \lambda$, $x + 2y = \mu$, l'équation (71) donne

$$(91) \qquad C = \frac{\varphi'(\lambda) + \psi'(\mu)}{\psi(\mu) - \varphi(\lambda)},$$

et, en substituant cette expression dans les équations (70), nous obte-

nons

$$(92)\quad \begin{cases} [\psi(\mu)-\varphi(\lambda)][2\varphi''(\lambda)+\psi''(\mu)]+\dfrac{3}{2}[\varphi'^2(\lambda)-\psi'^2(\mu)]=-6\varphi(\lambda)[\psi(\mu)-\varphi(\lambda)]^2, \\ [\psi(\mu)-\varphi(\lambda)][\varphi''(\lambda)+2\psi''(\mu)]+\dfrac{3}{2}[\varphi'^2(\lambda)-\psi'^2(\mu)]=\quad 6\psi(\lambda)[\psi(\mu)-\varphi(\lambda)]^2. \end{cases}$$

En soustrayant et divisant par $\psi(\mu)-\varphi(\lambda)$, nous en tirons

$$\varphi''(\lambda)-\psi''(\mu)=6[\varphi^2(\lambda)-\psi^2(\mu)],$$

et par conséquent, λ et μ étant des variables indépendantes

$$\varphi''(\lambda)-6\varphi^2(\lambda)=\text{const.}=-\frac{1}{2}g_2,$$
$$\psi''(\mu)-6\psi^2(\mu)=-\frac{1}{2}g_2.$$

Multipliant la première de ces équations par $2\varphi'(\lambda)$, la seconde par $2\psi'(\mu)$ et intégrant, il vient

$$(93)\quad \begin{cases} \varphi'^2(\lambda)=4\varphi^3(\lambda)-g_2\varphi(\lambda)-g_3, \\ \psi'^2(\mu)=4\psi^3(\mu)-g_2\psi(\mu)-g'_3, \end{cases}$$

g_3 et g'_3 étant de nouvelles constantes, et substituant les expressions (93) dans l'une quelconque des équations (92), celle-ci se réduit à

$$(94)\qquad g'_3=g_3.$$

Introduisant la fonction elliptique pu de Weierstrass, nous voyons que les intégrales générales des équations (93) deviennent, en ayant égard à (94),

$$\varphi(\lambda)=p(\lambda-\lambda_0;\ g_2, g_3),$$
$$\psi(\mu)=p(\mu-\mu_0;\ g_2, g_3),$$

où λ_0 et μ_0 sont des constantes arbitraires. En faisant $\lambda_0=2x_0+y_0$, $\mu_0=x_0+2y_0$, nous obtenons de (91)

$$(95)\quad C=\frac{p'(x-x_0+2\overline{y-y_0};\ g_2, g_3)+p'(2\overline{x-x_0}+y-y_0;\ g_2, g_3)}{p(x-x_0+2\overline{y-y_0};\ g_2, g_3)-p(2\overline{x-x_0}+y-y_0;\ g_2, g_3)},$$

expression renfermant quatre constantes arbitraires x_0, y_0, g_2, g_3.

En vertu de (67), l'expression précédente s'écrit aussi

$$C = \frac{\wp'(y - y_0 - \overline{z - z_0}) - \wp'(z - z_0 - \overline{x - x_0})}{\wp(y - y_0 - \overline{z - z_0}) - \wp(z - z_0 - \overline{x - x_0})},$$

et en appliquant la formule bien connue

$$(96) \qquad \frac{1}{2}\,\frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v} = \frac{\sigma'}{\sigma}(u + v) - \frac{\sigma'}{\sigma} u - \frac{\sigma'}{\sigma} v,$$

il vient

$$(97) \quad C = -2\left[\frac{\sigma'}{\sigma}(x - x_0 - \overline{y - y_0}) + \frac{\sigma'}{\sigma}(y - y_0 - \overline{z - z_0}) + \frac{\sigma'}{\sigma}(z - z_0 - \overline{x - x_0})\right]$$

ou, par une nouvelle application de (96),

$$(98) \qquad C = -\frac{\wp'(x - x_0) + \wp'(y - y_0)}{\wp(x - x_0) - \wp(y - y_0)} - \frac{\wp'(y - y_0) + \wp'(z - z_0)}{\wp(y - y_0) - \wp(z - z_0)} - \frac{\wp'(z - z_0) + \wp'(x - x_0)}{\wp(z - z_0) - \wp(x - x_0)},$$

formules symétriques en x, y, z.

L'équation nomographique correspondant à cette valeur de C est

$$(99) \qquad \begin{vmatrix} \wp(x - x_0) & \wp'(x - x_0) & 1 \\ \wp(y - y_0) & \wp'(y - y_0) & 1 \\ \wp(z - z_0) & \wp'(z - z_0) & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

En effet, cette équation est d'abord équivalente à (67), en vertu de la formule bien connue

$$\begin{vmatrix} \wp u & \wp' u & 1 \\ \wp v & \wp' v & 1 \\ \wp w & \wp' w & 1 \end{vmatrix} = \frac{2\,\sigma(u - v)\,\sigma(v - w)\,\sigma(w - u)\,\sigma(u + v + w)}{\sigma^3 u\, \sigma^3 v\, \sigma^3 w};$$

en second lieu, nous vérifierons de la manière suivante qu'elle conduit à la valeur (98) de C. Les équations (8) et (9) donnent

$$(100) \qquad u = \frac{\wp'(x - x_0) - \wp'(y - y_0)}{\wp(x - x_0) - \wp(y - y_0)}$$
$$= 2\frac{\sigma'}{\sigma}(x - x_0 + y - y_0) - 2\frac{\sigma'}{\sigma}(x - x_0) - 2\frac{\sigma'}{\sigma}(y - y_0)$$
$$= -2\left[\frac{\sigma'}{\sigma}(x - x_0) + \frac{\sigma'}{\sigma}(y - y_0) + \frac{\sigma'}{\sigma}(z - z_0)\right],$$
$$v = \wp'(x - x_0) - u\,\wp(x - x_0) = \wp'(y - y_0) - u\,\wp(y - y_0);$$

d'où

$$(101)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x} = 2[\mathrm{p}(x-x_0)-\mathrm{p}(z-z_0)], && \frac{\partial u}{\partial y} = 2[\mathrm{p}(y-y_0)-\mathrm{p}(z-z_0)],\\ &\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{p}(y-y_0), && \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{p}(x-x_0),\end{aligned}\right.$$

$$(102)\quad \begin{aligned} e^{\theta} = 4[\mathrm{p}(x-x_0)-\mathrm{p}(y-y_0)][\mathrm{p}(y-y_0)-\mathrm{p}(z-z_0)]\\ \times[\mathrm{p}(z-z_0)-\mathrm{p}(x-x_0)],\end{aligned}$$

$$(103)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2[\mathrm{p}'(x-x_0)+\mathrm{p}'(z-z_0)] = -\frac{\mathrm{p}'(z-z_0)+\mathrm{p}'(x-x_0)}{\mathrm{p}(z-z_0)-\mathrm{p}(x-x_0)}\frac{\partial u}{\partial x},\\ &\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\mathrm{p}(y-y_0) \qquad\qquad = -\frac{\mathrm{p}'(z-z_0)+\mathrm{p}'(x-x_0)}{\mathrm{p}(z-z_0)-\mathrm{p}(x-x_0)}\frac{\partial v}{\partial x},\end{aligned}\right.$$

et enfin

$$(104)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = 2\mathrm{p}'(z-z_0),\\ &\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\mathrm{p}(x-x_0) - \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{p}'(x-x_0).\end{aligned}\right.$$

De (103) et (101) nous obtenons

$$(105)\quad \begin{aligned} &\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial y}\right)e^{-\theta}\\ &\quad = -\frac{\mathrm{p}'(z-z_0)+\mathrm{p}'(x-x_0)}{\mathrm{p}(z-z_0)-\mathrm{p}(x-x_0)}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right)e^{-\theta}\\ &\quad = -\frac{\mathrm{p}'(z-z_0)+\mathrm{p}'(x-x_0)}{\mathrm{p}(z-z_0)-\mathrm{p}(x-x_0)},\end{aligned}$$

ainsi que de (104) et (101)

$$(106)\quad \begin{aligned} &2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}\right)e^{-\theta}\\ &\quad = 2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}[\mathrm{p}(x-x_0)-\mathrm{p}(y-y_0)] + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{p}'(x-x_0)\right\}e^{-\theta}\\ &\quad = -\frac{2\mathrm{p}'(z-z_0)}{\mathrm{p}(y-y_0)-\mathrm{p}(z-z_0)} - \frac{2\mathrm{p}'(x-x_0)}{\mathrm{p}(x-x_0)-\mathrm{p}(y-y_0)}\\ &\quad = -\frac{\mathrm{p}'(y-y_0)+\mathrm{p}'(z-z_0)}{\mathrm{p}(y-y_0)-\mathrm{p}(z-z_0)} + \frac{\mathrm{p}'(y-y_0)-\mathrm{p}'(z-z_0)}{\mathrm{p}(y-y_0)-\mathrm{p}(z-z_0)}\\ &\qquad - \frac{\mathrm{p}'(x-x_0)+\mathrm{p}'(y-y_0)}{\mathrm{p}(x-x_0)-\mathrm{p}(y-y_0)} - \frac{\mathrm{p}'(x-x_0)-\mathrm{p}'(y-y_0)}{\mathrm{p}(x-x_0)-\mathrm{p}(y-y_0)}\\ &\quad = -\frac{\mathrm{p}'(y-y_0)+\mathrm{p}'(z-z_0)}{\mathrm{p}(y-y_0)-\mathrm{p}(z-z_0)} - \frac{\mathrm{p}'(x-x_0)+\mathrm{p}'(y-y_0)}{\mathrm{p}(x-x_0)-\mathrm{p}(y-y_0)},\end{aligned}$$

car l'équation (99) peut s'écrire

$$\frac{p'(y-y_0)-p'(z-z_0)}{p(y-y_0)-p(z-z_0)}=\frac{p'(x-x_0)-p'(y-y_0)}{p(x-x_0)-p(y-y_0)}.$$

En faisant la somme des expressions (105) et (106) nous obtenons donc, en vertu de (17), la valeur (98) de C.

Nous voyons que le cas IV donne lieu à une classe de nomogrammes à quatre paramètres x_0, y_0, g_2, g_3, où les trois échelles sont supportées par la même cubique de genre 1, transformée homographique de la courbe

$$\eta^2=4\xi^3-g_2\xi-g_3.$$

Les cas particuliers où la fonction elliptique pu dégénère méritent d'être mentionnés. Ils sont caractérisés par la relation

$$g_2^3-27g_3^2=0,$$

ce qui conduit à distinguer trois cas.

Supposant d'abord $g_2>0$, $g_3>0$, on aura

$$g_2=\frac{4}{3}a^4,\qquad g_3=\frac{8}{27}a^6\qquad (a>0).$$

$$pu=\frac{a^2}{\sin^2 au}-\frac{a^2}{3},$$

et l'équation (99) devient

$$(107)\qquad \begin{vmatrix} \dfrac{1}{\sin^2 a(x-x_0)} & \dfrac{\cos a(x-x_0)}{\sin^3 a(x-x_0)} & 1 \\ \dfrac{1}{\sin^2 a(y-y_0)} & \dfrac{\cos a(y-y_0)}{\sin^3 a(y-y_0)} & 1 \\ \dfrac{1}{\sin^2 a(z-z_0)} & \dfrac{\cos a(z-z_0)}{\sin^3 a(z-z_0)} & 1 \end{vmatrix}=0.$$

L'équation (107) définit une classe de nomogrammes aux trois paramètres a, x_0, y_0, dont les trois échelles sont supportées par la même cubique de genre 0, homographique de

$$\eta^2=\xi^2(\xi-1),$$

et ayant, par conséquent, un point isolé.

Supposant, en second lieu, $g_2 > 0$, $g_3 < 0$, on aura

$$g_2 = \frac{4}{3}a^4, \qquad g_3 = -\frac{8}{27}a^6 \qquad (a > 0),$$

$$pu = \frac{a^2}{\mathrm{sh}^2 au} + \frac{a^2}{3},$$

et l'équation (99) devient

$$(108) \qquad \begin{vmatrix} \dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 a(x-x_0)} & \dfrac{\mathrm{ch}\, a(x-x_0)}{\mathrm{sh}^3 a(x-x_0)} & 1 \\ \dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 a(y-y_0)} & \dfrac{\mathrm{ch}\, a(y-y_0)}{\mathrm{sh}^3 a(y-y_0)} & 1 \\ \dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 a(z-z_0)} & \dfrac{\mathrm{ch}\, a(z-z_0)}{\mathrm{sh}^3 a(z-z_0)} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

L'équation (108) définit une classe de nomogrammes aux trois paramètres a, x_0, y_0, dont les trois échelles sont supportées par la même cubique de genre 0, homographique de

$$\eta^2 = \xi^2(\xi + 1),$$

et ayant, par conséquent, un point double à tangentes distinctes. Supposant enfin $g_2 = g_3 = 0$, on aura

$$pu = \frac{1}{u^2},$$

et l'équation (99) devient

$$(109) \qquad \begin{vmatrix} \dfrac{1}{(x-x_0)^2} & \dfrac{1}{(x-x_0)^3} & 1 \\ \dfrac{1}{(y-y_0)^2} & \dfrac{1}{(y-y_0)^3} & 1 \\ \dfrac{1}{(z-z_0)^2} & \dfrac{1}{(z-z_0)^3} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation définit une classe de nomogrammes aux deux paramètres x_0, y_0, dont les trois échelles sont supportées par la même cubique de genre 0, homographique de

$$\eta^2 = \xi^3,$$

et ayant, par conséquent, un point double à tangentes confondues.

Les nomogrammes (107), (108), pour $a = 1$, et (109) ont été découverts par M. Clark (*loc. cit.*).

5. — Le cas de deux échelles rectilignes, la troisième étant courbe.

Par un choix convenable des variables indépendantes, nous pouvons supposer que les échelles rectilignes soient celles des x et des y.

Comme nous l'avons vu au paragraphe 2, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi s'exprime par les équations

$$D = MC + N,$$
$$\frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial D}{\partial x} = 0.$$

En substituant la valeur de D dans la dernière équation, il vient

$$M\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial x}C + \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

ou

$$\frac{\partial C}{\partial x} = -\frac{\partial \log M}{\partial x}C - \frac{1}{M}\frac{\partial N}{\partial x}.$$

Or nous avons, en vertu de $\frac{\partial C}{\partial y} = 0$,

$$0 = \frac{\partial^2 C}{\partial x\,\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \log M}{\partial x}C + \frac{1}{M}\frac{\partial N}{\partial x}\right) = -\frac{\partial^2 \log M}{\partial x\,\partial y}C - \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{M}\frac{\partial N}{\partial x},$$

d'où

(110) $$C = -\frac{\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{1}{M}\dfrac{\partial N}{\partial x}}{\dfrac{\partial^2 \log M}{\partial x\,\partial y}},$$

expression dont le dénominateur ne s'annule pas identiquement, car dans ce cas, l'échelle des z serait aussi rectiligne en vertu du paragraphe 4.

Pour que les échelles des x et des y soient rectilignes, celle des z étant courbe, il faut et il suffit donc que l'expression (110) *satisfasse aux équations*

(111) $$\frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(MC + N) = 0.$$

Cette condition a été obtenue d'une manière toute différente par M. Massau (¹).

Pour remonter de l'expression (110) aux f_i, g_i, M. Massau donne des formules qui exigent quatre quadratures et, depuis, M. Lecornu a donné d'autres formules n'en renfermant que trois (¹).

Je ferai voir maintenant comment les f_i, g_i s'obtiennent sans aucune quadrature.

Par une transformation homographique convenable, nous pouvons faire coïncider les échelles des x et des y avec les axes des ξ et des η respectivement, de sorte que $g_1(x) = f_2(y) = 0$. L'équation (4) devient alors

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & 0 & 1 \\ 0 & g_2(y) & 1 \\ f_3(z) & g_3(z) & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{112}$$

ou bien

$$f_3 g_2 + f_1 g_3 - f_1 g_2 = 0. \tag{113}$$

Nous en tirons successivement

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{(g_3 - g_2) f'_1}{f'_3 g_2 + g'_3 f_1}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{(f_3 - f_1) g'_2}{f'_3 g_2 + g'_3 f_1}, \\ \mathrm{M} &= -\frac{f_3 - f_1}{g_3 - g_2} \frac{g'_2}{f'_1} \end{aligned}\right. \tag{114}$$

et

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \log \mathrm{M}}{\partial x} &= -\frac{f'_3 g_3 - g'_3 (f_3 - 2 f_1)}{(f_3 - f_1)(f'_3 g_2 + g'_3 f_1)} - \frac{f'_1}{f_1}, \\ \frac{\partial \log \mathrm{M}}{\partial y} &= \frac{g'_3 f_3 - f'_3 (g_3 - 2 g_2)}{(g_3 - g_2)(f'_3 g_2 + g'_3 f_1)} + \frac{g''_2}{g'_2}. \end{aligned}\right. \tag{115}$$

Nous obtenons ensuite

$$\frac{\partial^2 \log \mathrm{M}}{\partial x\, \partial y} = \frac{f'_1 g'_2 [g_3 f_1 + g_2 (f_3 - 2 f_1)] (f''_3 g'_3 - g''_3 f'_3)}{(f'_3 g_2 + g'_3 f_1)^3},$$

ou bien, en vertu de (113),

$$\frac{\partial^2 \log \mathrm{M}}{\partial x\, \partial y} = -\frac{f_1 g_2 f'_1 g'_2 (f''_3 g'_3 - g''_3 f_3)}{(f'_3 g_2 + g'_3 f_1)^3}. \tag{116}$$

(¹) *Voir* d'Ocagne, *Traité de Nomographie*, p. 422-427.

Les équations (114) et (116) donnent

$$\frac{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial z}{\partial y}}{\frac{\partial^2 \log M}{\partial x \, \partial y}} = \frac{(g_3 - g_2)^2 (f_3 - f_1)}{f_1 g_2 (f_3'' g_3' - g_3'' f_3')} f_1';$$

or, d'après (113),

$$g_3 - g_2 = -\frac{f_3 g_2}{f_1}, \qquad f_3 - f_1 = -\frac{f_1 g_3}{g_2},$$

de sorte que

$$(117) \qquad \frac{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial z}{\partial y}}{\frac{\partial^2 \log M}{\partial x \, \partial y}} = -\frac{f_1'}{f_1^2} \frac{f_3^2 g_3}{f_3'' g_3' - g_3'' f_3'},$$

et, de la même manière, on obtient

$$(118) \qquad \frac{\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}{\frac{\partial^2 \log M}{\partial x \, \partial y}} = -\frac{g_2'}{g_2^2} \frac{f_3 g_3^2}{f_3'' g_3' - g_3'' f_3'}.$$

Pour abréger, nous désignerons par les notations $(\Phi(x, y, z))_x$ et $(\Phi(x, y, z))_y$ ce qu'on obtient en éliminant de $\Phi(x, y, z)$, les variables x et y respectivement à l'aide de l'équation donnée (1).

Cela posé, les équations (117) et (118) nous apprennent que

$$(119) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\left[\frac{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial z}{\partial y}}{\frac{\partial^2 \log M}{\partial x \, \partial y}}\right]_y = \varphi(x) \chi_1(z), \\ &\left[\frac{\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}{\frac{\partial^2 \log M}{\partial x \, \partial y}}\right]_x = \psi(y) \chi_2(z), \end{aligned} \right.$$

où, bien entendu, φ, ψ, χ_1 et χ_2 s'obtiennent, de l'équation donnée, par des différentiations et éliminations. La comparaison de (117), (118) et (119) donne

$$(120) \qquad \left\{ \begin{aligned} & f_1' = \varphi f_1^2, & g_2' = \psi g_2^2, \\ & \frac{f_3^2 g_3}{f_3'' g_3' - g_3'' f_3'} = -\chi_1, & \frac{f_3 g_3^2}{f_3'' g_3' - g_3'' f_3'} = -\chi_2. \end{aligned} \right.$$

Remarquons, en passant, que la décomposition en facteurs la plus générale des membres gauches dans (119) s'obtient en remplaçant φ, ψ, χ_1, χ_2 par

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{c_1}\varphi, \qquad \bar{\chi}_1 = c_1\chi_1,$$

$$\bar{\psi} = \frac{1}{c_2}\psi, \qquad \bar{\chi}_2 = c_2\chi_2,$$

c_1 et c_2 étant deux constantes quelconques. Or, d'après (120), cela reviendrait à remplacer f_1, g_2, f_3, g_3 par $c_1 f_1$, $c_2 g_2$, $c_1 f_3$, $c_2 g_3$ respectivement, homographie laissant (112) invariante.

De l'équation (113) on tire

$$g_2 = -\frac{f_1 g_3}{f_3 - f_1},$$

et en substituant dans la première des équations (114)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{f_3 g_3}{f_3' g_3 - g_3'(f_3 - f_1)}\,\frac{f_1'}{f_1}.$$

En employant les formules

$$g_3 - g_2 = -\frac{f_3 g_2}{f_1}, \qquad f_3 - f_1 = -\frac{f_1 g_3}{g_2},$$

la dernière équation (114) donne

$$\mathrm{M} = -\frac{f_1^2 g_3}{g_2^2 f_3}\,\frac{g_2'}{f_1},$$

d'où l'on tire, en employant la valeur de $\frac{\partial z}{\partial x}$ que nous venons de donner,

$$\frac{\partial \log \mathrm{M}}{\partial x} = \left(\frac{g_3'}{g_3} - \frac{f_1}{f_3}\right)\frac{f_3 g_3}{f_3 g_3 - g_3'(f_3 - f_1)}\,\frac{f_1'}{f_1} + \frac{2 f_1'}{f_1} - \frac{f_1''}{f_1'}$$

ou

$$\frac{\partial \log \mathrm{M}}{\partial x} = -\frac{f_3' g_3 - g_3' f_3}{f_3' g_3 - g_3'(f_3 - f_1)}\,\frac{f_1'}{f_1} + \frac{2 f_1'}{f_1} - \frac{f_1''}{f_1'}.$$

Or la première équation (120) donne

$$\frac{f_1'}{f_1} = \varphi f_1, \qquad \frac{f_1''}{f_1'} - \frac{2 f_1'}{f_1} = \frac{\varphi'}{\varphi},$$

de sorte que l'équation précédente devient

$$\left(\frac{\partial \log M}{\partial x}\right)_y = -\frac{(f'_3 g_3 - g'_3 f_3)\varphi f_1}{f'_3 g_3 - g'_3 f_3 + g'_3 f_1} - \frac{\varphi'}{\varphi},$$

ou bien

$$(121) \qquad -\frac{\varphi}{\dfrac{\varphi'}{\varphi} + \left(\dfrac{\partial \log M}{\partial x}\right)_y} = \frac{1}{f_1} + \frac{g'_3}{f'_3 g_3 - g'_3 f_3},$$

et l'on trouve d'une manière entièrement analogue

$$(122) \qquad \frac{\psi}{\left(\dfrac{\partial \log M}{\partial y}\right)_x - \dfrac{\psi'}{\psi}} = \frac{1}{g_2} - \frac{g'_3}{f'_3 g_3 - g'_3 f_2}.$$

Dans la formule (121), le membre droit est la somme d'une fonction de x et d'une fonction de z; (121) détermine par suite $\frac{1}{f_1}$ à une constante additive près, et la même remarque s'applique à la détermination de $\frac{1}{g_2}$ par (122). Soient f_1, g_2 et $\bar{f}_1$, $\bar{g}_2$ deux solutions des équations (121) (122); on aura

$$\frac{1}{\bar{f}_1} = \frac{1}{f_1} + c_1, \qquad \frac{1}{\bar{g}_2} = \frac{1}{g_2} + c_2,$$

et l'on passe, par conséquent, d'une solution à l'autre en appliquant à l'équation (112) la transformation homographique

$$\bar{f}_i = \frac{f_i}{c_1 f_i + c_2 g_i + 1}, \qquad \bar{g}_i = \frac{g_i}{c_1 f_i + c_2 g_i + 1} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

En définitive, nous avons obtenu la méthode suivante pour calculer les f_i, g_i : Effectuons, d'une manière quelconque, la décomposition (119), puis prenons pour f_1 et g_2 des solutions quelconques de (121) et (122), faisons $f_2 = g_1 = 0$ et calculons enfin f_3 et g_3 par les formules (115) et (7).

6. — Les nomogrammes coniques de Clark.

Dans ces nomogrammes deux des échelles sont supportées par la même conique, la troisième étant quelconque; en choisissant convenablement les variables indépendantes, on peut faire en sorte que les échelles des x et des y soient situées sur la même conique. Par une

homographie convenable, nous pouvons transformer cette conique en la parabole

$$\eta = \xi^2,$$

et l'équation (4) prend alors la forme

$$(123)\qquad \begin{vmatrix} f_1(x) & f_1^2(x) & 1 \\ f_2(y) & f_2^2(y) & 1 \\ f_3(z) & g_3(z) & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Nous recherchons d'abord une condition nécessaire pour que l'équation donnée (1) puisse être ramenée à la forme (123) et ferons voir ensuite que cette condition est aussi suffisante.

En partant de (123), les formules du paragraphe I nous donnent successivement

$$(124)\qquad \begin{cases} u = f_1 + f_2, \\ v = -f_1 f_2, \\ e^{\theta} = f_1' f_2' (f_2 - f_1), \\ C = \dfrac{f_1''}{f_1'} + \dfrac{2 f_1'}{f_2 - f_1}, \\ D = \dfrac{f_2''}{f_2'} - \dfrac{2 f_2'}{f_2 - f_1}, \end{cases}$$

d'où nous tirons immédiatement la relation

$$(125)\qquad \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial D}{\partial x} = -\frac{2 f_1' f_2'}{(f_2 - f_1)^2} \neq 0.$$

En substituant $\dfrac{\partial D}{\partial x} = \dfrac{\partial C}{\partial y}$ dans les équations (23), celles-ci deviennent

$$(126)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 C}{\partial x\, \partial y} = C \dfrac{\partial C}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial^2 C}{\partial y^2} = D \dfrac{\partial C}{\partial y}. \end{cases}$$

Éliminant enfin D à l'aide de (18), nous aurons

$$(127)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial C}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}(MC + N), \\ \dfrac{\partial^2 C}{\partial x\, \partial y} = C \dfrac{\partial C}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial^2 C}{\partial y^2} = (MC + N) \dfrac{\partial C}{\partial y}. \end{cases}$$

La première de ces équations donne

$$\frac{\partial C}{\partial y} = M\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial x}C + \frac{\partial N}{\partial x}, \tag{128}$$

la deuxième

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x\,\partial y} = C\left(M\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial x}C + \frac{\partial N}{\partial x}\right), \tag{129}$$

et la troisième, en y substituant la valeur (128) de $\frac{\partial C}{\partial y}$,

$$\begin{aligned} M\frac{\partial^2 C}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial M}{\partial y}\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial x}\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial^2 M}{\partial x\,\partial y}C + \frac{\partial^2 N}{\partial x\,\partial y} \\ = (MC+N)\left(M\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial x}C + \frac{\partial N}{\partial x}\right), \end{aligned}$$

ou en remplaçant $\frac{\partial^2 C}{\partial x\,\partial y}$ et $\frac{\partial C}{\partial y}$ par leurs valeurs (129) et (128) et réduisant, en tenant compte de la relation (14) entre M et N,

$$\left(\frac{\partial^2 M}{\partial x\,\partial y} - \frac{1}{M}\frac{\partial M}{\partial x}\frac{\partial M}{\partial y}\right)C + \frac{\partial^2 N}{\partial x\,\partial y} - \frac{1}{M}\frac{\partial M}{\partial y}\frac{\partial N}{\partial x} = 0,$$

laquelle équation donne

$$C = -\frac{\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{M}\frac{\partial N}{\partial x}}{\frac{\partial^2 \log M}{\partial x\,\partial y}}. \tag{130}$$

Dans cette expression, le dénominateur ne s'annule pas identiquement, sinon nous aurions le cas du paragraphe 4, et l'échelle des z serait rectiligne.

D'après le calcul que nous venons de faire, *il faut, pour que l'équation donnée* (1) *soit réductible à la forme* (123), *que l'expression* (130) *de* C *satisfasse aux équations*

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}(MC+N) - \frac{\partial D}{\partial x} \neq 0, \\ &\frac{\partial^2 C}{\partial x\,\partial y} = C\frac{\partial C}{\partial y}. \end{aligned}\right. \tag{131}$$

Je dis que *cette condition est aussi suffisante.*

Pour le démontrer, il faut trouver deux fonctions $f_1(x)$ et $f_2(y)$ satisfaisant aux deux dernières équations (124); la méthode du para-

graphe 3 conduit ici au but. Mais la formule finale étant d'une simplicité inattendue, il vaut mieux la démontrer directement.

Désignons par y_0 une constante telle que $\frac{\partial C}{\partial y} \neq 0$ pour $y = y_0$ (1), et écrivons pour abréger

$$C_0 = C(x, y_0), \quad \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_0 = \left[\frac{\partial C(x, y)}{\partial x}\right]_{y=y_0}, \quad \left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)_0 = \left[\frac{\partial C(x, y)}{\partial y}\right]_{y=y_0}, \text{ etc.}$$

La dernière équation (131) donne, en intégrant par rapport à y,

$$(132) \qquad \frac{\partial C}{\partial x} - \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_0 = \frac{1}{2}(C^2 - C_0^2).$$

Considérons maintenant la fonction

$$(133) \qquad \varphi(x, y) = \frac{\left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)_0}{C_0 - C};$$

nous avons

$$\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} = \frac{\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x\, \partial y}\right)_0}{C_0 - C} - \frac{\left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)_0 \left[\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_0 - \frac{\partial C}{\partial x}\right]}{(C_0 - C)^2},$$

ou, en vertu de (131) et (132),

$$\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} = \frac{C_0 \left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)_0}{C_0 - C} - \frac{1}{2}\, \frac{\left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)_0 (C_0^2 - C^2)}{(C_0 - C)^2}$$

ou enfin

$$(134) \qquad \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)_0.$$

Cette équation donne évidemment

$$\frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x\, \partial y} = 0.$$

---

(1) Ce choix de la constante y_0 est possible; car si $\frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial D}{\partial x} = 0$, nous serions dans le cas du paragraphe 5 où les échelles des x et des y sont rectilignes, puisque l'expression (130) pour C coïncide avec l'expression (110) valable dans le cas indiqué.

Par suite, en posant

$$(135) \qquad f_1(x) - f_2(y) = \frac{\left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)_0}{C_0 - C},$$

cette équation détermine f_1 et f_2 à la même constante additive près, et je dis que *les fonctions f_1 et f_2 ainsi déterminées peuvent figurer dans une équation* (123) *équivalente à l'équation donnée* (1). Pour le démontrer, il faut faire voir d'abord qu'elles satisfont à (124). Les équations (135), (134) et (131) donnent

$$f_1'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)_0, \qquad f_1''(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x\, \partial y}\right)_0 = \frac{1}{2} C_0 \left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)_0,$$

d'où

$$\frac{f_1''}{f_1'} + \frac{2 f_1'}{f_2 - f_1} = C_0 + (C - C_0) = C;$$

d'autre part, (135) donne

$$f_2'(y) = -\frac{\left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)_0 \frac{\partial C}{\partial y}}{(C_0 - C)^2},$$

et comme $\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} = D \frac{\partial C}{\partial y}$ d'après la dernière équation (126) qui est une conséquence de (130) et (131),

$$\frac{d}{dy} \log f_2'(y) = D + \frac{2\frac{\partial C}{\partial y}}{C_0 - C},$$

de sorte que

$$\frac{f_2''}{f_2'} - \frac{2 f_2'}{f_2 - f_1} = \left(D + \frac{2\frac{\partial C}{\partial y}}{C_0 - C}\right) - \frac{2\frac{\partial C}{\partial y}}{C_0 - C} = D.$$

Les équations (124) sont donc satisfaites et, par suite, les équations (8), (10), (12), (18), (21), (22) et (23). Les formules (9) donnent

$$g_1(x) = f_1'^2(x),$$
$$g_2(y) = f_2'^2(y),$$

et la réduction de l'équation donnée à la forme (123) s'achève en déterminant $f_3(z)$ et $g_3(z)$ par les formules (15) et (7).

La loi des courbures des profils superficiels conjugués dans les mouvements à un seul paramètre;

PAR G. KOENIGS,

Professeur de Mécanique physique et expérimentale
à la Sorbonne,
Examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

Au Tome XXXV du *Recueil des Savants étrangers* a paru récemment mon *Mémoire sur les courbes conjuguées dans le mouvement relatif le plus général de deux corps solides*, où j'ai étudié les couples formés de deux courbes qui, solidaires chacune de l'un des corps, restent tangentes entre elles au cours de leur mouvement relatif.

Entre autres questions concernant ces courbes, j'ai été amené à rechercher les lois de correspondance qui relient les éléments de courbure de deux courbes conjuguées ([1]).

Deux cas particuliers de ce problème avaient antérieurement occupé les géomètres : ce sont ceux qui se réalisent lorsque les deux corps solides glissent l'un sur l'autre, soit suivant deux plans superposés, soit suivant deux sphères concentriques solidaires chacune de l'un d'eux, ce dernier cas pouvant se caractériser en disant que les deux corps ont un point fixe en commun.

En limitant l'étude des circonstances du mouvement à ce qui se passe dans une face plane ou sphérique glissante (suivant le cas), on tombe sur le mouvement d'une figure plane ou sphérique sur son plan

---

([1]) Dans ce qui suit, les renvois à ce Mémoire seront représentés par C.C. (*Sav. Étr.*, t. XXXV).

ou sur sa sphère. Toute courbe solidaire de cette figure possède alors naturellement une enveloppe sur le plan ou sur la sphère que l'on regarde comme fixes. De là naît la double théorie des *profils conjugués curvilignes* plans ou sphériques, qui remonte à Euler et qui n'a pas, depuis ce grand géomètre, cessé d'occuper les savants.

Le problème que j'ai traité au Tome XXXV des *Savants étrangers* constitue une première généralisation de ces théories, aujourd'hui classiques, puisque j'en ai étendu la portée au cas d'un mouvement quelconque.

Je ne reviendrai pas ici sur les résultats obtenus dans mon travail, mais j'aurai fréquemment à les utiliser et à renvoyer à la lecture de ce Mémoire.

L'étude que j'y ai entreprise a, en effet, des attaches très étroites avec celle que j'entreprends ici, malgré que l'objet en soit très différent.

On peut remarquer d'abord que les profils conjugués sphériques ou plans dont on vient de parler sont les lignes de courbure des profils coniques ou cylindriques qui se rencontrent dans la réalisation pratique du guidage de ces deux cas particuliers de mouvement.

En fait, les courbures de ces profils plans ou sphériques ne sont rien autre que les courbures principales des profils superficiels cylindriques ou coniques précédents. De là résulte qu'une autre extension de la théorie des courbures des profils conjugués plans ou sphériques se présente sous la forme d'une théorie des relations entre les courbures des profils conjugués superficiels au cours d'un mouvement quelconque.

Si l'on considère en effet deux corps S et S′ à l'état de mouvement relatif, toute surface (F) solidaire de S, enveloppe dans S′ un certain profil conjugué (F′) auquel elle est à tout instant circonscrite suivant une courbe variable (c). Cette surface (F′) est parfaitement définie dès que l'on connaît la surface (F) et le mouvement de S par rapport à S′. On sait du reste que la relation entre les surfaces (F), (F′) réalise une transformation de contact. Dès lors, les éléments de courbure de (F) étant connus, ainsi que les éléments du mouvement, les éléments de courbure de (F′) doivent pouvoir être construits.

C'est cette dépendance entre les courbures de (F) et de (F′) que je me suis proposé ici de découvrir.

Un des premiers éléments qui concourent à la solution du problème consiste en une certaine corrélation homographique qui existe sur la normale commune MN en un point de contact M des profils conjugués (F), (F').

On sait qu'une corrélation homographique n'est autre qu'une correspondance homographique entre les points d'une droite et les plans menés par cette droite, comme on en rencontre à propos de la distribution des plans tangents aux divers points d'une génératrice rectiligne d'une surface réglée. Les corrélations homographiques jouent un rôle important dans la géométrie des systèmes de droites ainsi que je l'ai mis en évidence moi-même dans ma Thèse inaugurale, en 1882, *Sur les Propriétés infinitésimales de l'espace réglé*, travail cité au cours du présent Mémoire.

Par exemple, si l'on prend deux corrélations homographiques sur une même droite et si l'on considère les homologues M, M' d'un même plan variable Π dans les deux corrélations, il peut arriver que M, M' qui, en général se correspondent homographiquement, se correspondent *involutivement*. On dit, dans ce cas, que les corrélations sont *en involution*.

Il se trouve qu'étant donnés un complexe linéaire et une droite x de ce complexe, la correspondance entre un plan Π mené par x et son pôle définit une corrélation L, appelée la *corrélation normale* du complexe.

Si l'on considère, d'autre part, une surface réglée engendrée par des droites de ce complexe et contenant la droite x, cette surface elle-même définit, en vertu de sa distribution des plans tangents aux divers points de x, une nouvelle corrélation homographique H. C'est une proposition remarquable, dont j'ai développé les conséquences dans mon Mémoire précité de 1882, que *ces deux corrélations* L et H définies sur x, l'une par le complexe, l'autre par la surface, *sont en involution*.

On peut appliquer cette remarque à la surface réglée (Σ) engendrée par la normale MN aux surfaces (F), (F') aux divers points M de leur courbe de contact actuelle (c), car cette surface est constituée par des droites appartenant au complexe linéaire $\mathfrak{L}$, lieu des droites qui sont normales aux trajectoires de leurs points; par conséquent,

la corrélation H des plans tangents de (Σ) aux divers points de la normale MN est en involution avec la corrélation normale L du complexe $\mathcal{L}$ sur cette droite MN.

Si l'on appelle (C_1, H_1), (C_2, H_2) les centres de courbure et plans principaux de la surface (F), il se trouve que (C_2, H_1) et (C_1, H_2) [remarquer l'interversion des indices] sont des couples de la corrélation H; comme celle-ci est d'autre part en involution, comme on l'a dit, avec la corrélation L, *elle est par ces trois conditions pleinement déterminée.*

J'ai ici introduit la considération de la corrélation G, dite *rectangulaire* avec H qui se déduit de H par une rotation de 90° autour de la droite qui sert de support. Il résulte de ce qui précède que la corrélation G se trouve parfaitement déterminée et les couples principaux *eux-mêmes* (C_1, H_1), (C_2, H_2) (sans interversion d'indices) lui appartiennent.

Maintenant les corrélations G, H auraient tout aussi bien pu être définies au moyen de la surface (F') et il en résulte que *les couples principaux* (C'_1, H'_1), (C'_2, H'_2) *de la surface* (F') *appartiennent à cette corrélation* G.

Résultat remarquable, car il ramène la recherche des éléments de courbure de (F') à celle du dièdre droit formé par les plans principaux H'_1, H'_2 et *réduit à une seule inconnue* un problème qui en comportait trois dans le principe.

Reste à résoudre ce dernier point où se trouvent concentrés tout l'intérêt et toutes les difficultés du problème.

Lorsque, dans le cas des profils plans, on veut grouper en une formule simple les propriétés des courbures des profils conjugués, on considère, comme il est bien connu, toutes les courbes planes actuellement normales à une droite donnée, issue du centre instantané, et l'on étudie la correspondance existant entre le centre de courbure d'une telle courbe et le centre de courbure de son profil conjugué. On tombe, on le sait, sur une homographie singulière dont le point double unique est le centre instantané lui-même.

Ici aussi, il faut savoir grouper convenablement les surfaces pour arriver à une loi de correspondance simple. Seulement, pour y parvenir, il ne suffirait pas de grouper en un ensemble toutes les surfaces

normales à une même droite donnée a, quelconque d'ailleurs, prise dans le complexe $\mathcal{L}$. Il faut caractériser plus étroitement l'ensemble, en utilisant précisément les corrélations H et G au sujet desquelles un résultat si important a déjà été acquis.

Je considère donc, parmi toutes les surfaces (F) normales à la droite a, toutes celles qui *admettent* une même corrélation G sur cette normale.

Une telle corrélation est d'ailleurs définie (à cause de la propriété d'involution de sa rectangulaire H avec la corrélation normale L du complexe $\mathcal{L}$) par son point central A et son plan central Ω *que l'on peut se donner tous deux a priori*, de même que dans le cas du mouvement plan on peut se donner *a priori* la normale issue du centre instantané. Les surfaces (F) qui admettent la corrélation G sont celles (la condition est nécessaire et suffisante) dont les couples principaux (C_1, H_1), (C_2, H_2) appartiennent à G. Alors, en vertu du théorème déjà acquis, le profil (F′) conjugué de (F) admet aussi la corrélation G. Le choix de la normale a et de la corrélation G sur elle se trouve synthétisé par le trièdre trirectangle Θ_0 dont a est une arête, A l'origine; les deux autres axes a_1, a_2 sont : le premier la normale à a en A dans le plan central Ω, le second la normale en A au plan Ω. Ce trièdre est arbitraire sauf cependant que son arête a appartient au complexe $\mathcal{L}$. Son choix est équivalent à celui de la normale a et de la corrélation G. Le paramètre de distribution $\varkappa$ de cette dernière est une fonction très simple des éléments de ce trièdre.

Ceci posé, si l'on prend toutes les surfaces (F), (F′) conjuguées qui appartiennent à la corrélation G, il s'agit de savoir comment se correspondent les dièdres rectangles principaux (H_1, H_2) et (H'_1, H'_2) de ces surfaces.

Pour y parvenir, je remarque qu'il est permis de substituer à (F), (F′) des surfaces parallèles sans rien changer aux éléments des courbures et je prends alors les surfaces parallèles à (F), (F′), savoir : (F_0), (F'_0), qui font *actuellement* leur contact au point A. Ces surfaces possèdent des propriétés remarquables :

1° Elles ont même courbure totale en A, qui est égale à $-\frac{1}{\varkappa^2}$.

2° L'axe a_2 du trièdre Θ_0 est tout à la fois la tangente en A à leur courbe de contact et une tangente asymptotique commune.

Les secondes tangentes asymptotiques AD, AD′ de ces surfaces en A sont variables et *leur détermination est équivalente à celle des dièdres des plans principaux* (H_1, H_2), (H'_1, H'_2) car ces plans bissectent respectivement les angles de a_2 avec AD et avec AD′.

Or *la correspondance entre* AD *et* AD′ *est une homographie singulière à rayons doubles coïncidents.*

Le rayon double unique AW est le conjugué harmonique de a_2 par rapport à deux tangentes particulières AV, AU contenues dans le plan tangent commun : AV est la direction de la vitesse d'entraînement de A et AU est la caractéristique du plan tangent. Si l'on appelle ψ, ψ' les angles de AD et AD′ avec AW (rayon double), l'homographie est définie par une équation d'une forme déjà courante dans d'autres questions de cinématique, notamment dans le mouvement autour d'un point fixe, à savoir :

$$\cot\psi' - \cot\psi = -\Psi,$$

où Ψ est une fonction des éléments du trièdre Θ_0.

Mais la considération des surfaces (F_0), (F'_0) ne sert en réalité qu'à amener celle de ces faisceaux homographiques remarquables engendrés par AD et AD′.

En fait, si dans le plan tangent on construit un cercle de centre I tangent en A à l'axe a_1 du trièdre Θ_0, *les diamètres* IΔ, IΔ′ *de ce cercle, parallèles à* AD *et à* AD′ *donnent, en joignant leurs extrémités au point* A, *les angles droits qui sont les traces précisément des plans* (H_1, H_2), (H'_1, H'_2) respectivement. Une construction simple fournit ensuite les centres C_1, C_2, C'_1, C'_2 comme homologues de ces plans dans la corrélation G.

On voit par là que la construction effective des éléments de courbure de (F′) est un problème *désormais complètement résolu.*

J'ai indiqué, dans un Chapitre spécial, comment on peut construire Ψ lorsque le trièdre Θ_0 est connu [et il l'est lorsque (F) est donné]; pour cela j'ai utilisé une méthode déjà suivie par moi dans le Mémoire *Sur les courbes conjuguées*, inséré au Tome XXXV des *Savants étrangers.*

Au cours de ce dernier Mémoire, j'avais démontré l'existence de certains profils remarquables présentant la singularité d'être osculateurs à leurs profils conjugués tout du long de la courbe de contact.

L'étude présente m'a permis d'aborder le problème réciproque et de montrer que ces surfaces, qui vérifient une équation aux dérivées partielles du premier ordre, *sont les seules* qui possèdent cette propriété.

Cela ne veut pas dire qu'un profil (F) ne puisse *accidentellement* être osculateur à son profil conjugué. Mais il y a entre ce cas et celui de l'osculation continuelle une différence profonde que mon travail actuel met pleinement en lumière.

Les recherches présentes ont été l'objet de deux Notes que j'ai présentées à l'Académie des Sciences le 29 mai et le 20 novembre 1911 et qui sont insérées aux *Comptes rendus* des séances de ces jours.

Je me suis borné ici à exposer la théorie générale. Je me propose d'en faire l'application à des cas particuliers dans un Mémoire prochain, où je donnerai en outre une forme plus explicite aux résultats qui précèdent.

CHAPITRE I.

RAPPEL DE QUELQUES NOTIONS GÉNÉRALES SUR LES CORRÉLATIONS HOMOGRAPHIQUES SUR UNE DROITE.

1. *Éléments métriques d'une corrélation homographique.* — Je crois devoir rappeler d'abord un certain nombre de propriétés des corrélations homographiques sur une droite dont la connaissance est depuis longtemps acquise, mais dont il convient de mettre certaines circonstances en relief, à cause du rôle important qu'elles vont jouer dans la question actuelle.

Si, à tout point M d'une droite x on fait correspondre homographiquement, ou projectivement, un plan Π mené par la droite, cette correspondance constitue une *corrélation homographique* sur la droite x.

Au point à l'infini sur la droite x correspond un plan appelé le *plan asymptote*. Le plan mené par la droite normalement au plan asymptote s'appelle le *plan central;* le point qui est homologue au plan central s'appelle le *point central*.

Soient A le point central, Ω le plan central, M un point de la droite, et

appelons r le nombre qui mesure le vecteur AM sur un axe défini de la droite x. Soit également Π le plan homologue du point M et θ l'angle dont il faut faire tourner Ω dans le sens direct autour de l'axe pour l'appliquer sur le plan Π.

D'après la correspondance homographique qui relie M et Π il doit exister entre r et $\operatorname{tang}\theta$ une relation bilinéaire

$$(1) \qquad ar \operatorname{tang}\theta + br + c \operatorname{tang}\theta + f = 0,$$

où a, b, c, f désignent des constantes. Mais d'après l'hypothèse faite sur le choix des origines pour les quantités r et θ, savoir A et Ω, si Π coïncide avec Ω, M doit coïncider avec A, en sorte que r et $\operatorname{tang}\theta$ doivent s'annuler ensemble. De là déjà la conséquence

$$f = 0.$$

Mais de plus, quand M va à l'infini, $r = \infty$, Π doit être rectangulaire avec Ω, soit $\theta = \frac{\pi}{2}$ ou $\operatorname{tang}\theta = \infty$;

$\frac{1}{r}$ et $\cot\theta$ s'annulent ensemble, d'où $a = 0$.

En divisant alors par $-b$ l'équation (1) où l'on fait $a = 0$, $f = 0$ et posant

$$-\frac{c}{b} = k,$$

l'équation (1) s'écrit

$$(2) \qquad r = k \operatorname{tang}\theta.$$

La quantité k, évidemment homogène à une ligne, s'appelle le *paramètre de distribution*.

On peut donner de ce paramètre une autre définition.

Si l'on prend deux plans rectangulaires Π, Π' passant par l'axe x; si M, M' sont leurs points homologues, θ, θ' les angles de Π, Π' avec le plan Ω; r, r' les mesures des vecteurs AM, AM', on a

$$r = k \operatorname{tang}\theta, \qquad r' = k \operatorname{tang}\theta',$$

d'où

$$rr' = k^2 \operatorname{tang}\theta \operatorname{tang}\theta',$$

mais comme $\theta' = \theta + \frac{\pi}{2}$ à cause de l'orthogonalité des plans Π, Π', il

en résulte que

$$\tang\theta \tang\theta' = -1,$$

et il vient

(3) $$rr' = -k^2.$$

Donc si *deux plans rectangulaires* Π, Π′ *pivotent autour d'un axe* x, *leurs points homologues* M, M′ *dans une corrélation homographique définie* a priori *sur* x, *décrivent une involution sur la droite* x.

La relation (3) montre que les points doubles de cette involution sont donnés par la formule

$$r^2 = -k^2.$$

Les points doubles D, D′ sont donc imaginaires et situés à une distance du point central A, de part et d'autre, égale à

$$k\sqrt{-1}.$$

Ces points D, D′ sont les homologues des deux plans isotropes menés par la droite x.

2. *Corrélations singulières.* — Parmi l'ensemble de corrélations homographiques que l'on peut concevoir sur une droite, il en est de *singulières*.

Prenons une corrélation homographique quelconque définie par l'équation

$$ar \tang\theta + br + c \tang\theta + f = 0,$$

dans l'hypothèse d'un choix quelconque d'origines, tant pour la quantité r que pour l'angle θ. On peut mettre cette relation sous la forme

$$(ar + c)(a \tang\theta + b) + af - bc = 0.$$

Si la quantité

(4) $$af - bc = 0$$

est nulle, la relation qui sert de définition à la corrélation se décompose en deux,

$$ar + c = 0 \quad \text{ou bien} \quad a \tang\theta + b = 0.$$

Il y a alors un *point singulier* $r = -\frac{c}{a}$ et un *plan singulier* $\tang\theta = -\frac{b}{a}$.

Pour que le système constitué par un point M de la droite x et un plan II mené par cette droite appartienne à la corrélation, *il faut et il suffit, ou bien que* M *coïncide avec le point singulier, ou bien que* II *coïncide avec le plan singulier.*

5. *Corrélations en involution.* — Étant données sur une droite deux corrélations homographiques H et H′, on peut considérer les points M et M′ qui sont homologues d'un même plan II, le premier dans H, le second dans H′. Ces points M et M′ décrivent sur la droite x deux divisions homographiques.

Lorsque cette homographie est une involution, les corrélations H, H′ sont dites *en involution.*

On pourrait parvenir à la même notion par une voie qui se présente comme dualistiquement réciproque de la première.

On a appelé M, M′ les points homologues du plan II dans H et H′ respectivement. Soit II_1 le plan homologue de M dans H′; les plans II, II_1, lorsque M varie, engendrent autour de x deux faisceaux homographiques. Il s'agit de montrer que l'homographie de ces faisceaux est involutive, c'est-à-dire symétrique, en même temps que celle des points M et M′.

Or, en effet, dans le cas de l'involution supposée entre les points M et M′, si un même plan II est homologue de M dans H et de M′ dans H′, réciproquement le même plan II_1 est homologue de M dans H′ et de M′ dans H.

De là résulte aussitôt que, dans l'homographie entre les plans II, II_1, II est l'homologue de II_1 aussi bien que II_1 est l'homologue de II. Il y a bien symétrie.

C'est du reste ce que donne le calcul. Si en effet

$$a\,r\,\tang\theta + b\,r + c\,\tang\theta + f = 0,$$
$$a'r'\,\tang\theta + b'r' + c'\,\tang\theta' + f' = 0$$

sont les équations des deux corrélations homographiques, l'élimination de $\tang\theta$, entre ces deux équations où l'on fait $\theta' = \theta$, donnera

l'équation entre r et r' de l'homographie qui relie M et M', soit

$$(5) \qquad (ab'-ba')rr'+(af'-bc')r+(cb'-fa')r'+cf'-fc'=0,$$

et en faisant au contraire $r'=r$ et éliminant r, on aura

$$(6) \qquad (ac'-ca')\operatorname{tang}\theta\operatorname{tang}\theta' + (af'-cb')\operatorname{tang}\theta+(bc'-fa')\operatorname{tang}\theta'+bf'-b'f=0.$$

Or l'équation

$$(7) \qquad af'-bc'-cb'+fa'=0$$

exprime que chacune de ces correspondances est involutive [1].

On peut se rendre compte que la condition d'involution d'une corrélation avec une autre qui est singulière se traduit par ce fait que *le point et le plan singuliers de la corrélation singulière doivent être deux éléments correspondants de la corrélation donnée non singulière*.

En effet, soient la corrélation non singulière

$$ar\operatorname{tang}\theta+br+c\operatorname{tang}\theta+f=0$$

et la corrélation singulière

$$(r-r_0)(\operatorname{tang}\theta-\operatorname{tang}\theta_0)=r\operatorname{tang}\theta-r\operatorname{tang}\theta_0-r_0\operatorname{tang}\theta+r_0\operatorname{tang}\theta_0=0.$$

On a ici

$$a'=1, \qquad b'=-\operatorname{tang}\theta_0, \qquad c'=-r_0, \qquad f'=r_0\operatorname{tang}\theta_0;$$

d'où, pour la condition d'involution,

$$0=af'-bc'-cb'+fa'=ar_0\operatorname{tang}\theta_0+br_0+c\operatorname{tang}\theta_0+f=0,$$

---

(1) On peut remarquer que le premier membre de cette relation est la forme polaire de la forme quadratique

$$af-bc$$

dont l'évanouissement exprime la singularité de l'homographie.

J'ai développé ces considérations et diverses autres propriétés des corrélations homographiques dans mon Mémoire sur les *Propriétés infinitésimales de l'espace réglé*, inséré en 1882 aux *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, et plus tard, en 1887, dans mon travail *Sur la Géométrie réglée et ses applications*, inséré aux *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*.

ce qui exprime bien que le point singulier, pour lequel $r = r_0$, et le plan singulier, pour lequel $\theta = \theta_0$, sont deux éléments homologues de la corrélation donnée.

Si deux corrélations sont singulières, leur involution s'exprime par la coïncidence de leurs points singuliers ou bien par la coïncidence de leurs plans singuliers.

4. *Conditions qui définissent une corrélation homographique.* — La condition, pour une homographie, d'être en involution avec une autre, singulière ou non, se traduisant par une équation linéaire en a, b, c, f, il en résulte que la condition d'être en involution avec trois corrélations homographiques données définit complètement une corrélation homographique.

Par exemple, une corrélation homographique est définie par la condition d'admettre deux couples donnés d'éléments et d'être de plus en involution avec une corrélation homographique donnée.

C'est ainsi que si l'on se donne sur une droite le point central A d'une corrélation H et son plan central Ω, avec la condition que H soit en involution avec une corrélation donnée, H est, par là même, pleinement déterminée. En effet, non seulement H doit admettre le couple d'éléments correspondants A et Ω, mais aussi le couple d'éléments constitué par le plan normal à Ω et le point à l'infini sur la droite.

5. *Corrélations homographiques rectangulaires.* — Une corrélation homographique H étant donnée sur une droite x, appelons M et Π un point et son homologue dans H. Le plan Π_1 rectangulaire avec Π et passant par x correspond homographiquement à M dans une nouvelle corrélation G, dont on peut dire qu'elle résulte de H par une rotation de 90° autour de x. De cette corrélation G nous dirons qu'elle est *rectangulaire* avec H.

Il est clair que H dérive de G comme G dérive de H et que H est aussi bien rectangulaire avec G.

Lorsque l'on passe d'une corrélation à sa rectangulaire, le point central reste le même, les plans centraux et asymptotes s'échangent et le paramètre de distribution ne change pas.

6. *Corrélation créée sur toute génératrice d'une surface réglée par la distribution des plans tangents.* — Il nous reste à rappeler deux circonstances géométriques où interviennent les corrélations homographiques et les considérations qui s'y rapportent.

En premier lieu, si x est une génératrice rectiligne d'une surface réglée, la correspondance existant entre un point de x et le plan tangent à la surface en ce point donne naissance à une corrélation homographique.

Soit x' la génératrice de la surface infiniment voisine de x. Tout plan Π mené par x coupe x' en un point P qui est infiniment voisin d'un point M de x, lequel correspond au plan Π suivant la loi d'une corrélation homographique. Le point M est le point où le plan Π touche la surface.

Si deux surfaces réglées ont deux génératrices consécutives en commun, il suit de ce qui précède que la corrélation homographique qui relie M et Π sera la même dans les deux surfaces qui, ayant dès lors même plan tangent en chacun des points de x, se raccordent suivant cette droite.

7. *Corrélation normale d'un complexe.* — Tout complexe de droites définit sur chacune de ses droites une corrélation homographique que, dans mon Mémoire *Sur les Propriétés infinitésimales de l'espace réglé* (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 1882), j'ai appelée la *corrélation normale*.

Si l'on envisage une droite x d'un complexe, tout plan Π mené par x contient une courbe plane enveloppe des droites du complexe contenues dans ce plan. Cette courbe enveloppe touche en particulier la droite x en un point M, qui correspond homographiquement au plan Π. Telle est la corrélation normale que le complexe définit sur la droite x.

On peut concevoir un peu différemment cette corrélation homographique. En effet, si l'on considère les droites du complexe issues de M, elles forment un cône qui contient naturellement la droite x. Le plan tangent à ce cône suivant x est précisément le plan Π. De la sorte, la corrélation normale peut être considérée à un second point de vue qui est placé dualistiquement à l'égard du premier.

Dans le cas particulier d'un complexe linéaire, le plan Π est le polaire du point M et la corrélation normale est alors celle qui relie, sur toute droite du complexe, un point de cette droite et son plan polaire. Un théorème fondamental, dont j'ai développé les principales conséquences dans mon Mémoire précité *Sur les Propriétés infinitésimales de l'espace réglé*, établit une relation essentielle entre la corrélation normale d'un complexe et celle qui résulte de la distribution des plans tangents pour toute surface réglée engendrée par les droites de ce complexe.

Voici ce théorème :

Si x est une génératrice rectiligne d'une surface réglée engendrée par les droites d'un complexe, la corrélation qui naît sur la droite x de la distribution des plans tangents à la surface est en involution avec la corrélation normale que le complexe définit sur la même droite.

Pour la démonstration et les conséquences de ce théorème, je ne puis que renvoyer à mon Mémoire précité de 1882.

CHAPITRE II.

CORRÉLATIONS HOMOGRAPHIQUES SUR LA NORMALE.

8. *Courbe de contact de deux profils superficiels conjugués.* — Après avoir, dans ce premier Chapitre préliminaire, rappelé les notions essentielles qui concernent les corrélations homographiques sur une droite, il nous est actuellement possible d'entrer dans le vif du problème spécial qui nous occupe ici.

Deux corps solides S et S′ sont à l'état de mouvement relatif. Toute surface (F) solidaire de S possède dans S′ une enveloppe (F′) appelée son *profil superficiel conjugué*.

A chaque instant ces deux profils superficiels sont circonscrits l'un à l'autre suivant une *courbe de contact* (c).

La propriété caractéristique de cette ligne consiste en ce que, *en tous les points de la ligne* (c), *la vitesse d'entraînement est tangente à la*

surface (F) [ou à la surface (F′), puisque (F) et (F′) y admettent le même plan tangent].

Cette propriété équivaut à dire que, en tous les points de la courbe (c), la normale à la surface (F) [et (F′)] est une de celles qui sont *actuellement normales* aux trajectoires de leurs points et dont l'ensemble constitue le complexe linéaire $\mathcal{L}$ attaché au mouvement hélicoïdal tangent.

De la sorte, les normales à la surface (F) [et (F′)] en tous les points de la courbe (c) forment une surface réglée (Σ) contenue tout entière dans le complexe linéaire $\mathcal{L}$, c'est-à-dire dont toutes les droites appartiennent à ce complexe.

9. *Éléments géométriques portés par la normale.* — Prenons sur la courbe (c) un point particulier M; soit a la normale au point M aux surfaces (F) et (F′).

Sur cette normale a se trouvent les éléments de courbure de la surface (F) et ceux de la surface (F′), savoir :

Les plans principaux Π_1 et Π_2 de (F), ainsi que les centres de courbure correspondants C_1 et C_2; les plans principaux Π'_1 et Π'_2 de (F′) ainsi que les centres de courbure correspondants C'_1 et C'_2.

Il y a en outre un autre élément particulièrement important; c'est la corrélation homographique H qui naît de la distribution des plans tangents à la surface (Σ) en tous les points de a.

A cette corrélation H nous associerons du reste sa corrélation rectangulaire G.

Le complexe linéaire $\mathcal{L}$ définit, sur la droite a qui lui appartient, une corrélation normale L. D'après le théorème énoncé plus haut, la corrélation H doit être en involution avec cette corrélation normale L.

On verra, dans un instant, comment se coordonnent sur la normale a les divers éléments que nous venons d'y reconnaître.

10. *Congruence des normales.* — Il est une remarque essentielle et qui domine cette théorie : c'est que, si l'on substitue à (F) un profil parallèle (F_1), le profil conjugué nouveau (F'_1) est, lui aussi, parallèle au profil conjugué ancien (F′).

De cette substitution, toutefois, il ne résulte aucune modification pour chacun des éléments ci-dessus introduits.

Cela tient à ce que toutes les surfaces parallèles à (F) ont *la même congruence de normales*.

Nous sommes dès lors amenés à présenter les éléments ci-dessus introduits en nous plaçant au point de vue des congruences.

Les éléments Π_1, Π_2, C_1, C_2 constituent les éléments focaux de la congruence des normales qui sont relatifs à la normale a de la surface (F).

Imaginons que dans le plan Π_2 et par le point C_1 on mène une droite arbitraire x_1, puis, par le point C_2, dans le plan Π_1 une droite x_2. La congruence linéaire qui admettrait x_1 et x_2 comme directrices est tangente à la congruence des normales en la droite a, ce qui signifie qu'une droite a' de la congruence des normales infiniment voisine de a peut être regardée, au second ordre près, comme appartenant à la congruence linéaire tangente, c'est-à-dire comme une sécante des droites x_1 et x_2.

11. *Détermination de la corrélation* II. — Appliquons ceci à l'hypothèse où a' serait la génératrice de la surface (Σ) infiniment voisine de la droite a.

Les droites a, a' n'appartiennent pas seulement à la congruence des normales, elles appartiennent aussi au complexe linéaire $\mathfrak{g}$, comme il a été déjà dit et cela d'après la définition même de (Σ).

Puisque a coupe les deux droites x_1 et x_2 et que a' elle-même peut être regardée comme coupant ces deux droites, les droites x_1^0, x_2^0, conjuguées de x_1, x_2 dans le complexe $\mathfrak{g}$ coupent elles aussi a et a'.

On doit de plus remarquer que si l'on appelle C_1^0, C_2^0 les pôles des plans Π_1 et Π_2 dans le complexe, ces points sont respectivement ceux où la droite a est coupée par les droites x_2^0 et x_1^0; de même si l'on appelle Π_1^0 et Π_2^0 les plans polaires de C_1, C_2 dans le complexe $\mathfrak{g}$, ces plans passent par a et contiennent, le premier Π_1^0 la droite x_1^0, le second Π_2^0 la droite x_2^0. En effet, la droite x_1 étant issue du point C_1 dans le plan Π_2, sa conjuguée x_1^0 doit être contenue dans le plan Π_1^0 et passer au point C_2^0, tandis que x_2 étant issue du point C_2 dans le plan Π_1, sa conjuguée x_2^0 doit être issue du point C_1^0 dans le plan Π_2^0.

En résumé, des points C_1, C_2, C_2^0, C_1^0 de a sont respectivement issues les droites x_1, x_2, x_1^0, x_2^0, qui coupent la droite a' infiniment voisine de a sur (Σ); ces quatre droites sont respectivement tangentes en ces quatre points à cette surface. En conséquence, les plans Π_2, Π_1, Π_1^0, Π_2^0, menés par a et par ces quatre droites respectivement, sont les quatre plans tangents à (Σ) aux quatre points considérés. Dès lors, puisqu'on a appelé H la corrélation homographique qui donne la distribution des plans tangents à la surface (Σ) aux divers points de sa génératrice a, on peut énoncer le théorème suivant :

Les quatre couples d'éléments

$$(C_1, \Pi_2)\ (C_2, \Pi_1)\ (C_1^0, \Pi_2^0)\ (C_2^0, \Pi_1^0)$$

appartiennent à la corrélation H.

On aurait pu parvenir autrement à ce résultat en utilisant le théorème du Chapitre I, d'après lequel les corrélations H et L doivent être en involution.

Il est clair d'abord que puisque x_1, x_2 sont des sécantes de a, a' ce sont des tangentes en C_1, C_2 à la surface (Σ) et, par suite, Π_2 est le plan tangent en C_1, Π_1 le plan tangent en C_2, en sorte qu'on reconnaît tout de suite que (C_1, Π_2), (C_2, Π_1) sont deux couples d'éléments appartenant à H.

Maintenant, puisque L et H sont en involution, les homologues dans L des éléments d'un couple de H sont de nouveau les éléments d'un couple de H, ce qui fait que (C_2^0, Π_1^0), (C_1^0, Π_2^0) sont deux autres couples de H.

Ainsi la connaissance de deux couples de H suffit pour en faire connaître deux autres et donner par là la détermination complète de H.

Ce fait est très important puisqu'*il permet de déduire* H *de la connaissance des éléments de courbure de* (F) *et de celle du complexe linéaire* $\mathfrak{L}$, *attaché au mouvement hélicoïdal tangent.*

12. *Construction de la tangente à la courbe de contact.* — Une première application de ce résultat est celle qu'on en peut faire à la construction de la tangente au point M de la courbe de contact (c).

La tangente à cette courbe est en effet dans le plan tangent en M

à la surface (Σ), c'est-à-dire dans le plan homologue de M dans la corrélation H; de plus, elle est normale à a. Donc :

La tangente à la courbe de contact (c) *au point* M *où* (F) *touche son enveloppe* (F′) *est la perpendiculaire élevée à la normale a dans le plan homologue du point* M *dans la corrélation* H.

Si l'on substitue à (F) les diverses surfaces parallèles, le point M décrit la droite a tandis que la tangente en M à la courbe de contact décrit le paraboloïde hyperbolique de raccordement de la surface (Σ) le long de a, paraboloïde dont un plan directeur est précisément normal à a, tandis que le second est parallèle au plan asymptote de la corrélation H.

13. *Rôle de* H *et de* G *dans la détermination des éléments de courbure de* (F′). — Mais l'application la plus importante, celle qui tient le plus étroitement à la question que nous voulons solutionner ici, c'est celle qui concerne le rôle de la corrélation H dans la détermination des éléments de courbure du profil conjugué (F′).

Il est clair que nous aurions pu parvenir à définir H en partant de la surface (F′) au lieu de la surface (F) et reconnaître tout d'abord que la corrélation H admet aussi les éléments correspondants

$$(C'_1, H'_2)\,(C'_2, H'_1),$$

en sorte que la corrélation H se trouve déjà assujettir les éléments de courbure de la surface (F′).

L'introduction de la corrélation G, rectangulaire avec H, et dont la détermination est équivalente à celle de H, permet de mettre sous une forme plus compréhensive les résultats.

Puisque H_1, H_2 sont rectangulaires, ainsi que H'_1 et H'_2; puisque, d'autre part, les couples d'éléments

$$(C_1, H_2)\,(C_2 H_1)\,(C'_1, H'_2)\,(C'_2, H'_1)$$

appartiennent à H, on peut conclure aussitôt ce théorème fondamental :

La corrélation G, *rectangulaire avec la corrélation* H, *admet*

comme couples d'éléments homologues

$$(C_1, H_1)(C_2, H_2)(C'_1, H'_1)(C'_2, H'_2),$$

c'est-à-dire que tout centre de courbure principal tant de (F') *que de* (F) *admet pour homologue dans* G *son plan de section principale correspondant.*

Ce résultat d'un énoncé si simple constitue un pas important vers la solution complète de notre problème, puisqu'il nous suffira désormais de connaître le dièdre rectangulaire des plans principaux H'_1, H'_2 de (F') pour être à même de construire aussitôt les centres de courbure C'_1, C'_2 correspondants, attendu que ceux-ci ne sont autres que les homologues des faces de ce dièdre dans la corrélation G, corrélation que nous savons construire dès que nous aurons H, laquelle, à son tour, est pleinement définie par la condition d'admettre les couples (C_1, H_2), (C_2, H_1) formés des éléments de courbure de (F), et d'être en involution avec la corrélation normale du complexe linéaire $\mathcal{L}$ attaché au mouvement hélicoïdal tangent.

Ainsi, par le moyen de ce théorème, notre problème qui comportait trois inconnues, savoir le dièdre $H'_1 H'_2$ et les points C'_1, C'_2 n'en comporte plus qu'une qui est la variable de position du dièdre rectangle des plans principaux.

14. *Sur le choix du groupement des surfaces en vue de la formulation d'une loi des courbures.* — Lorsque, dans la cinématique du mouvement d'une figure plane dans son plan, on veut arriver à formuler la loi des courbures à laquelle Euler, Savary, Bobillier ont attaché leurs noms, on sait qu'on groupe ensemble toutes les courbes qui, à un instant donné, sont normales à une même droite a issue du centre instantané I. On prend comme élément variable le centre de courbure C de l'une de ces courbes et l'on cherche comment lui correspond le centre de courbure C' de la courbe conjuguée. On sait comment on arrive à constater que C et C' se correspondent homographiquement sur la droite a, avec cette circonstance spéciale que les deux points doubles de cette homographie coïncident entre eux et avec le centre instantané I, par lequel doit passer, ainsi qu'on l'a dit, la normale a.

C'est un procédé analogue qu'il conviendra de suivre ici. Mais on conçoit que, si l'on se bornait à grouper toutes les surfaces (F) qui sont à un moment donné normales à une même droite a du complexe $\mathfrak{g}$, la loi de correspondance affecterait une forme singulièrement complexe puisqu'il y subsisterait d'arbitraires les trois paramètres de position sur a des éléments de courbure de (F), auxquels il faudrait faire correspondre les trois paramètres analogues pour (F'). Mais le théorème précédent suggère une voie à suivre beaucoup plus simple et qui, en fait, conduit à des résultats beaucoup plus maniables.

En conséquence, afin d'obtenir une coordination meilleure des résultats, nous grouperons ensemble les diverses surfaces (F) qui, non seulement seront normales à une même droite a du complexe $\mathfrak{g}$, mais encore qui donneront lieu sur cette droite à la même corrélation H et, par suite, à la même corrélation G. Nous dirons de ces surfaces qu'elles *admettent* la même corrélation G.

Dans ces conditions, les surfaces (F') conjuguées des (F) sont elles aussi normales à a et y admettent également la corrélation G.

Dès lors, *la correspondance entre les éléments de courbure des* (F) *et des* (F') *se réduira à celle qui relie les dièdres rectangles de leurs plans principaux.*

Faisons du reste bien remarquer que, pour qu'une surface (F) puisse être réputée *admettre* la corrélation G, il est nécessaire et suffisant que les couples (C_1, H_1), (C_2, H_2), formés de ses éléments principaux, appartiennent à la corrélation G.

S'il en est en effet ainsi, la corrélation rectangulaire admet les couples (C_1, H_2), (C_2, H_1) et si, comme on doit le supposer, elle est en involution avec la corrélation L du complexe, elle n'est autre que la corrélation appelée H dans les numéros précédents et qui définit la distribution des plans tangents à la surface (Σ) le long de la droite a.

Ainsi, de même que dans la cinématique du plan on se donne *a priori* la normale a, *laquelle doit être issue du centre instantané de rotation* I, de même ici nous nous donnerons *a priori* la corrélation G *sur une droite a du complexe* $\mathfrak{g}$.

Mais cette corrélation n'est pas arbitraire. *Sa rectangulaire* H *doit, en effet, être en involution avec la corrélation normale* L *du complexe* $\mathfrak{g}$ et, par suite, elle se trouve elle-même en involution avec

la corrélation L_0 rectangulaire avec L. Tel est l'assujettissement de la corrélation G. A part cela, elle est quelconque.

Le meilleur moyen de nous donner G, c'est de nous donner d'abord la droite a, choisie arbitrairement dans le complexe $\mathcal{G}$, puis le point central A et le plan central Ω. La condition d'être en involution avec L_0 achève de définir G, c'est-à-dire son paramètre de distribution $\varkappa$.

15. *Calcul du paramètre de* G. *Trièdre central.* — Nous allons du reste chercher à déterminer la valeur de ce paramètre. Je considère à cet effet le trièdre trirectangle Θ_0 dont A (point central de G) est le sommet, a une première arête, une seconde arête a_1 étant la normale élevée en A à a dans le plan Ω, et enfin la troisième arête a_2 étant la normale en A au plan central Ω.

Ce trièdre Θ_0, lié au complexe $\mathcal{G}$ par son arête a, est, à cela près, arbitraire et, lui connu, la corrélation G est pleinement déterminée. Nous l'appellerons le *trièdre central* de la corrélation G en raison de ses relations avec les éléments centraux de cette corrélation.

Considérons le trièdre Θ, solidaire du corps S et coïncidant *actuellement* avec Θ_0 : nous appellerons axes a, a_1, a_2 du trièdre Θ les axes de ce trièdre qui coïncident actuellement avec les axes de même nom du trièdre Θ_0; enfin P sera le point du corps S qui coïncide actuellement avec le point A; P est ainsi l'origine du trièdre Θ.

Dans le mouvement de S par rapport à S′ le point P possède une vitesse dont les projections sur les axes du trièdre Θ seront représentées par

$$u, \quad u_1, \quad u_2$$

respectivement. On peut remarquer que u, projection sur l'axe a du trièdre Θ, est *actuellement* nulle, mais sa dérivée par rapport au temps, $u' = \frac{du}{dt}$, ne l'est point, ainsi que nous aurons l'occasion de l'expliquer plus loin.

Nous représenterons aussi par ω, ω_1, ω_2 les projections sur les axes a, a_1, a_2 du trièdre Θ de la vitesse angulaire représentée à la manière ordinaire par un vecteur. Dans ces conditions, si l'on désigne par X, X_1, X_2 les coordonnées d'un point M du corps S par rapport aux axes a, a_1, a_2 du trièdre Θ, la vitesse d'entraînement de M aura comme

projections sur les axes a, a_1, a_2

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} &u\ + \omega_1 X_2 - \omega_2 X_1,\\ &u_1 + \omega_2 X - \omega X_2,\\ &u_2 + \omega X_1 - \omega_1 X.\end{aligned}\right.$$

Le plan polaire du point M dans le complexe $\mathcal{C}$ qui est, comme on sait, le plan normal en M à la vitesse de M aura, comme équation, les coordonnées courantes étant Y, Y_1, Y_2,

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} &\quad(u\ + \omega_1 X_2 - \omega_2 X_1)(Y - X)\\ &+ (u_1 + \omega_2 X - \omega X_2)(Y_1 - X_1)\\ &+ (u_2 + \omega X_1 - \omega_1 X)(Y_2 - X_2) = 0.\end{aligned}\right.$$

Si, en particulier, ce point M est sur la droite a on a

$$X_1 = X_2 = 0,$$

et il vient

$$u(Y - X) + (u_1 + \omega_2 X)Y_1 + (u_2 - \omega_1 X)Y_2 = 0,$$

et comme $u = 0$, cela se réduit à

$$(10)\qquad (u_1 + \omega_2 X)Y_1 + (u_2 - \omega_1 X)Y_2 = 0,$$

équation du plan H, polaire du point $M(0, 0, X)$. On voit que $\operatorname{tang}\theta$, où θ est l'angle du plan H avec le plan Ω, est égal à la valeur de $Y_2 : Y_1$, en sorte que l'équation de la corrélation L s'écrit

$$(11)\qquad (u_1 + \omega_2 r) + (u_2 - \omega_1 r)\operatorname{tang}\theta = 0,$$

en mettant r au lieu de X.

D'un autre côté, puisque le plan Ω [ou (a, a_1)] est le plan central de la corrélation G, celui de H est le plan (a, a_2) obtenu en faisant tourner le plan Ω de $\frac{\pi}{2}$ autour de a. En conservant A et Ω pour origines, et $\varkappa$ étant toujours le paramètre de distribution de G, égal à celui de H, l'équation de la corrélation H s'écrira

$$(12)\qquad r - \varkappa \operatorname{tang}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

ou

$$(13)\qquad r \operatorname{tang}\theta + \varkappa = 0.$$

En exprimant l'involution des corrélations H et L au moyen de l'équation déjà trouvée au Chapitre I,

$$af' - bc' - cb' + fa' = 0, \tag{14}$$

où l'on doit faire ici,

$$a = -\omega_1, \quad b = \omega_2, \quad c = u_2, \quad f = u_1,$$
$$a' = 1, \quad b' = 0, \quad c' = 0, \quad f' = \varkappa,$$

on trouve

$$-\omega_1 \varkappa + u_1 = 0,$$

d'où

$$\varkappa = \frac{u_1}{\omega_1}. \tag{15}$$

En conséquence, *le paramètre de distribution de la corrélation* G, *lorsqu'on se donne son point central et son plan central, est égal au rapport des projections, sur l'axe* a_1 *du trièdre central, de la vitesse du point central considéré comme appartenant au corps* S *et du vecteur représentatif de la vitesse angulaire dans le mouvement de* S *par rapport à* S'.

CHAPITRE III.

CORRESPONDANCE ENTRE LES DIÈDRES DROITS PRINCIPAUX DES PROFILS SUPERFICIELS CONJUGUÉS.

16. *Introduction d'un couple particulier de surfaces conjuguées.* — Conformément à la méthode indiquée au n° **14**, nous allons nous occuper de la correspondance existant entre les dièdres droits principaux de deux profils conjugués (F), (F') admettant la même corrélation G sur la normale commune a, celle-ci prise dans le complexe linéaire $\mathfrak{L}$.

Nous devrons, dans cette recherche, utiliser la remarque déjà faite qu'on peut sans inconvénient substituer aux profils considérés des surfaces qui leur soient parallèles. Il n'en résulte aucune modification pour les éléments de courbure. Nous verrons cependant qu'on peut y puiser des moyens de simplifications. Il est, du reste, à peine besoin

de faire remarquer que deux surfaces parallèles appartiennent en même temps à une corrélation G donnée, puisqu'elles ont les mêmes éléments de courbure.

Parmi les surfaces parallèles à la surface (F), nous prendrons, en particulier, celle qui fait ACTUELLEMENT son contact avec sa conjuguée au point central A de la corrélation G. Nous appellerons (F_0) cette surface et (F'_0) sa conjuguée.

Ces surfaces présentent, comme on va le voir, des affections toutes spéciales :

En premier lieu, si l'on appelle (c_0) leur courbe de contact actuelle, la tangente en A à cette courbe de contact est, d'après le n° **12**, la normale élevée en A à la droite a dans le plan central de H; c'est donc la droite a_2. Ainsi :

La tangente en A à la courbe de contact (c_0) des surfaces (F_0), (F'_0) qui font actuellement leur contact au point central A est l'axe a_2 du trièdre central de la corrélation G.

17. *Courbure totale des surfaces* (F_0) *et* (F'_0). — Une autre propriété des surfaces (F_0), (F'_0) a trait à leur courbure totale au point A.

Les vecteurs $\overline{AC_1}$, $\overline{AC_2}$, $\overline{AC'_1}$, $\overline{AC'_2}$ portés par la normale a sont les propres rayons de courbure de ces surfaces. Nous désignerons par r_1, r_2, r'_1, r'_2 les nombres qui les mesurent, et par θ_1, θ_2, θ'_1, θ'_2 les angles que font avec le plan central Ω les plans principaux correspondants H_1, H_2, H'_1, H'_2 de ces surfaces.

Puisque (C_1, H_1), (C_2, H_2), (C'_1, H'_1), (C'_2, H'_2) sont des couples d'éléments homologues de la corrélation G, nous devrons avoir

$$(16)\qquad \begin{cases} r_1 = \varkappa \operatorname{tang}\theta_1, & r_2 = \varkappa \operatorname{tang}\theta_2, \\ r'_1 = \varkappa \operatorname{tang}\theta'_1, & r'_2 = \varkappa \operatorname{tang}\theta'_2, \end{cases}$$

sans oublier que les dièdres H_1, H_2 et H'_1, H'_2 étant rectangles, on a

$$\theta_2 = \theta_1 + \frac{\pi}{2}, \qquad \theta'_2 = \theta'_1 + \frac{\pi}{2},$$

d'où

$$\operatorname{tang}\theta_1 \operatorname{tang}\theta_2 = \operatorname{tang}\theta'_1 \operatorname{tang}\theta'_2 = -1.$$

Dès lors on tire des formules (16) celles-ci,

$$r_1 r_2 = r'_1 r'_2 = -\varkappa^2,$$

ou encore

(17) $$\frac{1}{r_1 r_2} = \frac{1}{r'_1 r'_2} = -\frac{1}{\varkappa^2}.$$

Donc :

Les profils conjugués (F_0), (F'_0) *qui font* ACTUELLEMENT *leur contact au point central* A *de la corrélation* G *qu'ils admettent, ont leurs courbures totales en ce point égales, négatives et égales en valeur absolue à l'inverse du carré du paramètre de distribution* $\varkappa$ *de la corrélation* G.

18. *Les tangentes asymptotiques des surfaces* (F_0) *et* (F'_0). — Puisque les surfaces (F_0) et (F'_0) ont au point A chacune une courbure totale négative, leurs courbures principales en ce point sont opposées et leurs tangentes asymptotiques y sont réelles.

Nous allons constater que cette remarque peut être précisée et complétée de la manière la plus élégante et la plus simple.

Reprenons en effet la considération du trièdre Θ solidaire du corps S, et qui coïncide *actuellement* avec le trièdre central Θ_0. Ce trièdre Θ nous a déjà servi au n° **15**.

Rapportée à ce trièdre Θ, la surface (F_0), qui passe au point A et y admet l'axe a du trièdre Θ pour normale, aura une équation de la forme suivante en coordonnées rectangulaires X, X_1, X_2,

(18) $$X = \frac{1}{2}(RX_1^2 + 2SX_1X_2 + TX_2^2) + \star,$$

où l'étoile indique des termes en X_1, X_2 d'ordre 3, 4, etc.

Si l'on prend de même un trièdre Θ' solidaire du corps S', coïncidant *actuellement* avec le trièdre Θ_0, l'équation de la surface (F'_0) rapportée à ce trièdre Θ' sera

(19) $$X' = \frac{1}{2}(R'X_1'^2 + 2S'X'_1X'_2 + T'X_2'^2) + \star.$$

Si l'on désigne par P, Q les dérivées partielles $\frac{\partial X}{\partial X_1}$, $\frac{\partial X}{\partial X_2}$, ces dérivées P, Q s'annulent au point A, tandis que R, S, T sont les valeurs

en A des dérivées partielles du second ordre $\frac{\partial^2 X}{\partial X_1^2}$, $\frac{\partial^2 X}{\partial X_1 \partial X_2}$, $\frac{\partial^2 X}{\partial X_2^2}$. Semblablement, pour la surface (F'_0), les dérivées partielles $P' = \frac{\partial X'}{\partial X'_1}$, $Q' = \frac{\partial X'}{\partial X'_2}$ sont nulles en A, tandis que R', S', T' sont les valeurs en ce point des dérivées partielles $\frac{\partial^2 X'}{\partial X_1'^2}$, $\frac{\partial^2 X'}{\partial X'_1 \partial X_2}$, $\frac{\partial^2 X'}{\partial X_2'^2}$.

Ceci posé, d'après les résultats les plus classiques, les éléments de courbure de la surface (F_0) au point A sont fournis par le système d'équations

$$(20) \qquad \frac{R\cos\theta + S\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{S\cos\theta - T\sin\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{r},$$

où r représente l'une des quantités déjà appelées r_1, r_2 et θ l'un des angles correspondants θ_1, θ_2.

Mais puisque les couples (C_1, H_1), (C_2, H_2) vérifient les relations (16), qui expriment qu'ils appartiennent à la corrélation G, on peut adjoindre aux équations (20) la suivante

$$(21) \qquad r = \varkappa \operatorname{tang}\theta,$$

qui doit s'accorder avec elles.

En tirant alors r de cette équation (21) pour en porter la valeur dans les équations (20) on trouve

$$(22) \qquad \begin{cases} S(\operatorname{tang}^2\theta - 1) + (R - T)\operatorname{tang}\theta = 0, \\ S\left(\operatorname{tang}^2\theta - \frac{1}{\varkappa}\right) + R\operatorname{tang}\theta = 0. \end{cases}$$

Ces deux équations du second degré en $\operatorname{tang}\theta$ doivent admettre les mêmes racines $\operatorname{tang}\theta_1$, $\operatorname{tang}\theta_2$; puisque le coefficient de $\operatorname{tang}^2\theta$ est le même dans les deux, on a donc

$$(23) \qquad S = \frac{1}{\varkappa}$$

et

$$(24) \qquad T = 0.$$

En opérant de même pour la surface (F'_0) on trouverait

$$(25) \qquad S' = \frac{1}{\varkappa},$$

$$(26) \qquad T' = 0.$$

Or, si l'on se reporte aux équations (18) et (19), on reconnaît que le faisceau des tangentes asymptotiques est représenté pour chacune de ces surfaces par les équations respectives

(27) $$R X_1^2 + 2S X_1 X_2 + T X_2^2 = 0,$$

(28) $$R' X_1^2 + 2S' X_1 X_2 + T' X_2^2 = 0.$$

Les conditions $T = 0$, $T' = 0$ expriment donc ce fait remarquable que la droite

$$X_1 = 0,$$

c'est-à-dire l'axe a_2 du trièdre Θ_0, est une tangente asymptotique commune.

De là ce théorème :

Les profils conjugués (F_0), (F'_0) *qui admettent la corrélation* G *et font* ACTUELLEMENT *leur contact au point central* A *de cette corrélation admettent en ce point une tangente asymptotique commune, à savoir : l'axe* a_2 *du trièdre central, axe qui a déjà été reconnu tangent en* A *à la courbe de contact* (c_0).

On peut ajouter que, d'après les équations (20), les rayons principaux r_1, r_2 sont donnés par l'équation

$$\left(\frac{1}{r} - T\right)\left(\frac{1}{r} - R\right) = S^2,$$

qui, en vertu des équations (23), (24), se réduit à

(29) $$\frac{1}{r^2} - \frac{R}{r} - \frac{1}{\varkappa^2} = 0,$$

tandis qu'on aurait pour la surface (F'_0) l'équation

(29') $$\frac{1}{r'^2} - \frac{R'}{r'} - \frac{1}{\varkappa^2} = 0.$$

On voit ainsi que les relations

$$S = S' = \frac{1}{\varkappa}$$

ne sont qu'une nouvelle vérification des équations déjà démontrées plus haut

$$\frac{1}{r_1 r_2} = \frac{1}{r'_1 r'_2} = -\frac{1}{\varkappa^2}.$$

Faisons encore remarquer que, en l'espèce, les coefficients R, R', les seuls par lesquels se différentient les propriétés du second ordre des surfaces (F_0), (F'_0), représentent respectivement les courbures moyennes des deux surfaces, car des équations (29), (29') on peut conclure

$$(30)\qquad R = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}, \qquad R' = \frac{1}{r'_1} + \frac{1}{r'_2}.$$

19. *Rôle des secondes tangentes asymptotiques des surfaces* (F_0), (F'_0). — Puisqu'il apparaît que les propriétés infinitésimales des surfaces (F_0), (F'_0) ne se différentient que par les valeurs des coefficients R, R', dans les équations (18), (19) de ces surfaces qui, grâce aux équations (23), (24), (25), (26) prennent la forme

$$X = \frac{1}{2}\left(R X_1^2 + \frac{2}{\varkappa} X_1 X_2\right) + \star,$$

$$X' = \frac{1}{2}\left(R' X_1'^2 + \frac{2}{\varkappa} X'_1 X_2\right) + \star,$$

on peut conclure qu'une correspondance entre les éléments du second ordre de ces surfaces se traduit par une correspondance analytique entre les quantités R et R'.

Du reste, cette forme donnée à notre problème est en entière harmonie avec la méthode que nous nous étions proposée au début de ce Chapitre.

Soient en effet AD, AD' les secondes tangentes asymptotiques de ces surfaces (F_0), (F'_0) au point A ; soient φ, φ' les angles qu'elles font avec l'axe a_1 du trièdre central ; d'après les équations (27), (28), où l'on fait

$$T = T' = 0, \qquad S = S' = \frac{1}{\varkappa},$$

les angles φ, φ' sont liés à R, R' par les relations

$$(31)\qquad \begin{cases} R + \dfrac{2}{\varkappa}\operatorname{tang}\varphi = 0, \\[2ex] R' + \dfrac{2}{\varkappa}\operatorname{tang}\varphi' = 0, \end{cases}$$

en sorte que la correspondance entre R et R' revient géométrique-

ment à une correspondance entre les secondes tangentes asymptotiques AD, AD′.

Comme, du reste, les plans principaux Π_1, Π_2 bissectent l'angle de l'axe a_2 et de la droite AD, et que, de même, les plans principaux Π'_1, Π'_2 bissectent l'angle de a_2 et de la droite AD′, on voit que la correspondance entre R et R′ ou, ce qui revient au même, entre les tangentes AD, AD′, réalisera sous une forme éminemment simple la correspondance entre les dièdres droits formés par les plans principaux.

20. *Recherche directe des éléments de courbure.* — Pour établir la correspondance cherchée, nous allons procéder à une recherche directe des éléments de courbure de la surface (F'_0) et, POUR COMMENCER, *d'une surface* (F′) *quelconque*, nous réservant d'exprimer, au moment voulu, que le contact se faisant au point A, les profils sont les surfaces appelées (F_0), (F'_0) aux numéros précédents.

Nous prendrons encore le trièdre Θ solidaire du corps S qui a été déjà à deux reprises utilisé.

Soit $M(X, X_1, X_2)$ un point de la surface (F); en conservant les notations P, Q pour les dérivées partielles $\frac{\partial X}{\partial X_1}$, $\frac{\partial X}{\partial X_2}$ (*voir* n° **18**), les équations de la normale en M à la surface (F) seront

$$(32)\qquad \begin{cases} Y_1 + PY = X_1 + PX, \\ Y_2 + QY = X_2 + QX; \end{cases}$$

nous appelons, comme on voit, Y, Y_1, Y_2 les coordonnées rectangulaires courantes d'un point de la normale.

Si le point M se trouve sur la courbe actuelle (*c*) de contact de (F) avec son profil conjugué, cette normale MN est aussi normale à la surface conjuguée (F′). C'est ce qu'on exprimera en écrivant qu'au point M la vitesse d'entraînement, dont les formules (8), n° 15, donnent les projections, est située dans le plan tangent; de là l'équation *essentielle*,

$$(33)\quad -(u + \omega_1 X_2 - \omega_2 X_1) + P(u_1 + \omega_2 X - \omega X_2) + Q(u_2 + \omega X_1 - \omega_1 X) = 0.$$

On sait, du reste, que la valeur actuelle de u est nulle, puisque l'axe a du trièdre Θ est *actuellement* une droite *normale à la trajectoire de*

chacun de ses points, c'est-à-dire une droite du complexe g. La dérivée $u' = \frac{du}{dt}$ ne serait nulle que si cette droite demeurait encore normale à la trajectoire de chacun de ses points à l'époque suivante. Dans ce cas, elle appartiendrait non seulement au complexe g, mais aussi au complexe linéaire infiniment voisin. Ce serait donc une de ces droites que j'ai appelées *normales stationnaires* dans mon Mémoire des *Savants étrangers* [1].

Nous aurons occasion de revenir sur ce point.

A chaque instant, l'équation (33) définit sur (F) la courbe (c), et, du fait que M est sur cette courbe, MN n'est pas seulement normale à (F), elle est aussi normale en M à (F').

Nous allons chercher à déplacer MN DANS LE CORPS S', de manière que cette droite engendre un élément de surface développable; nous aurons ainsi les éléments de courbure de (F').

Il nous faudra trouver sur MN un point C' mobile avec MN qui ait, DANS S', une vitesse dirigée suivant la droite MN elle-même.

Soient Y, Y_1, Y_2 les coordonnées de ce point C', par rapport au trièdre Θ; ces coordonnées vérifient tout d'abord les équations (32) de la normale MN. Comme les projections de la vitesse du point C', *dans un mouvement par rapport à* S', projections faites sur les axes du trièdre Θ, ont pour valeurs

$$u + \omega_1 Y_2 - \omega_2 Y_1 + \frac{dY}{dt}, \qquad u_1 + \omega_2 Y - \omega Y_2 + \frac{dY_1}{dt}, \qquad u_2 + \omega Y_1 - \omega_1 Y + \frac{dY_2}{dt},$$

on exprimera que cette vitesse est dirigée suivant la normale MN en écrivant

$$\frac{u + \omega_1 Y_2 - \omega_2 Y_1 + \frac{dY}{dt}}{-1} = \frac{u_1 + \omega_2 Y - \omega Y_2 + \frac{dY_1}{dt}}{P} = \frac{u_2 + \omega Y_1 - \omega_1 Y + \frac{dY_2}{dt}}{Q},$$

ou encore

$$(34) \quad \begin{cases} u_1 + \omega_2 Y - \omega Y_2 + \frac{dY_1}{dt} + P\left(u + \omega_1 Y_2 - \omega_2 Y_1 + \frac{dY}{dt}\right) = 0, \\ u_2 + \omega Y_1 - \omega_1 Y + \frac{dY_2}{dt} + Q\left(u + \omega_1 Y_2 - \omega_2 Y_1 + \frac{dY}{dt}\right) = 0. \end{cases}$$

---

[1] C.C. (*Sav. Étr.*, t. XXXV), p. 36.

On peut transformer aisément ces équations, car en différentiant les équations (32) de la normale nous aurons

$$\frac{dY_1}{dt} + P\frac{dY}{dt} = -Y\frac{dP}{dt} + \frac{d}{dt}(X_1 + PX),$$

$$\frac{dY_2}{dt} + Q\frac{dY}{dt} = -Y\frac{dQ}{dt} + \frac{d}{dt}(X_2 + QX),$$

en sorte que les équations (34) deviennent

$$(35)\quad \begin{cases} u_1 + \omega_2 Y - \omega Y_2 + P(u + \omega_1 Y_2 - \omega_2 Y_1) - Y\dfrac{dP}{dt} + \dfrac{d}{dt}(X_1 + PX) = 0, \\ u_2 + \omega Y_1 - \omega_1 Y + Q(u + \omega_1 Y_2 - \omega_2 Y_1) - Y\dfrac{dQ}{dt} + \dfrac{d}{dt}(X_2 + QX) = 0. \end{cases}$$

Enfin, il ne faut pas oublier qu'au cours du mouvement, le point M ne doit pas cesser d'être situé sur la courbe de contact (c) des surfaces (F), (F'), sans cela MN cesserait d'être normale à la fois à (F) et à (F'). L'équation (33), qui exprime cette condition, doit donc être toujours vérifiée.

Nous ferons même, au sujet de cette équation, une remarque importante. Si à chaque époque t du mouvement il y a sur la surface (F) une courbe (c) de contact avec sa conjuguée (F'), inversement, la surface (F) étant balayée par cette courbe (c) au cours du mouvement, tout point M de cette surface (F) devient, à une certaine époque t, un point de contact de (F) avec son profil conjugué. A cet égard, t peut être considéré comme une fonction du point M ou de ses coordonnées. C'est précisément l'équation (33) qui définit ainsi t en fonction de X_1, X_2.

Les dérivées partielles de t en X_1 et X_2 s'obtiendront donc en appliquant la méthode ordinaire des fonctions implicites. Il nous sera utile de faire ici ce calcul.

Désignons par Φ, pour abréger, le premier membre de l'équation (33),

$$(36)\quad \Phi = -(u + \omega_1 X_2 - \omega_2 X_1) + P(u_1 + \omega_2 X - \omega X_2) + Q(u_2 + \omega X_1 - \omega_1 X).$$

Il viendra, en convenant d'appeler R, S, T les dérivées par-

tielles $\dfrac{\partial^2 X}{\partial X_1^2}, \dfrac{\partial^2 X}{\partial X_1 \partial X_2}, \dfrac{\partial^2 X}{\partial X_2^2}$,

$$(37)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial X_1} &= \quad Q\omega - PQ\omega_1 + (1+P^2)\omega_2 \\ &\quad + R(u_1 + \omega_2 X - \omega X_2) + S(u_2 + \omega X_1 - \omega_1 X), \\ \frac{\partial \Phi}{\partial X_2} &= - P\omega - (1+Q^2)\omega_1 - PQ\omega_2 \\ &\quad + S(u_1 + \omega_2 X - \omega X_2) + T(u_2 + \omega X_1 - \omega_1 X), \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= -(u' + \omega'_1 X_2 - \omega'_2 X_1) \\ &\quad + P(u'_1 + \omega'_2 X - \omega' X_2) + Q(u'_2 + \omega' X_1 - \omega'_1 X); \end{aligned}\right.$$

on a désigné par u', u'_1, u'_2, ω', ω'_1, ω'_2 les dérivées de u, u_1, u_2, ω, ω_1, ω_2 par rapport au temps t.

On aura d'après cela

$$(38)\qquad \frac{\partial \Phi}{\partial X_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial X_1} = 0, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial X_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial X_2} = 0.$$

Notons encore que si l'on adjoint au système des équations (35) l'équation obtenue en différentiant totalement l'équation (33) on obtiendra l'équation

$$(39)\qquad \frac{\partial \Phi}{\partial X_1}\frac{dX_1}{dt} + \frac{\partial \Phi}{\partial X_2}\frac{dX_2}{dt} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0.$$

21. *Introduction des simplifications tenant au choix actuel des axes.* — Introduisons actuellement les hypothèses simplifiantes d'après lesquelles l'axe a du trièdre est précisément la normale commune aux surfaces conjuguées (F), (F′), sans supposer toutefois encore qu'il s'agisse des surfaces (F_0), (F'_0) qui font leur contact au point A. Souvenons-nous aussi que, dans ce qui va suivre, il ne peut plus s'agir que des *valeurs actuelles* des quantités en jeu. Il faudra faire

$$X_1 = 0, \qquad X_2 = 0, \qquad P = 0, \qquad Q = 0, \qquad u = 0.$$

Les équations de la normale donnent d'abord, équation (32),

$$(40)\qquad Y_1 = 0, \qquad Y_2 = 0.$$

L'équation (33) se réduit à une identité, u étant *actuellement* nul.

Les équations (35), en y remplaçant $\frac{dP}{dt}$, $\frac{dQ}{dt}$ par leurs valeurs

$$R\frac{dX_1}{dt} + S\frac{dX_2}{dt}, \quad S\frac{dX_1}{dt} + T\frac{dX_2}{dt},$$

deviennent

$$(41) \quad \begin{cases} u_1 + \omega_2 Y - (Y - X)\left(R\frac{dX_1}{dt} + S\frac{dX_2}{dt}\right) + \frac{dX_1}{dt} = 0, \\ u_2 - \omega_1 Y - (Y - X)\left(S\frac{dX_1}{dt} + T\frac{dX_2}{dt}\right) + \frac{dX_2}{dt} = 0, \end{cases}$$

quant à $\frac{\partial\Phi}{\partial X_1}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial X_2}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial t}$ elles se réduisent à

$$(42) \quad \begin{cases} \frac{\partial\Phi}{\partial X_1} = \omega_2 + R(u_1 + \omega_2 X) + S(u_2 - \omega_1 X) = \Xi_1, \\ \frac{\partial\Phi}{\partial X_2} = -\omega_1 + S(u_1 + \omega_2 X) + T(u_2 - \omega_1 X) = \Xi_2, \\ \frac{\partial\Phi}{\partial t} = -u', \end{cases}$$

Nous appellerons, pour abréger, Ξ_1, Ξ_2 ces valeurs actuelles de $\frac{\partial\Phi}{\partial X_1}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial X_2}$, en sorte que les valeurs actuelles de $\frac{\partial t}{\partial X_1}$, $\frac{\partial t}{\partial X_2}$, d'après les formules (38), seront données par les équations suivantes, qui nous seront très utiles plus loin,

$$(43) \quad \begin{cases} u'\frac{\partial t}{\partial X_1} = \Xi_1, \\ u'\frac{\partial t}{\partial X_2} = \Xi_2. \end{cases}$$

L'équation (39) enfin deviendra

$$(44) \quad \Xi_1\frac{dX_1}{dt} + \Xi_2\frac{dX_2}{dt} - u' = 0.$$

Si nous considérons la vitesse du point M sur la surface (F′) dans le corps S′, ses projections, données par les formules générales

$$u_1 + \omega_2 X - \omega\ X_2 + \frac{dX_1}{dt},$$

$$u_2 + \omega\ X_1 - \omega_1 X + \frac{dX_2}{dt},$$

$$u + \omega_1 X_2 - \omega_2 X_1 + \frac{dX}{dt},$$

se réduiront ici à

$$(45)\qquad \begin{cases} v_1 = u_1 + \omega_2 X - \dfrac{dX_1}{dt}, \\ v_2 = u_2 - \omega_1 X + \dfrac{dX_2}{dt}. \end{cases}$$

La troisième projection est d'ailleurs nulle, car la droite a est normale à la surface (F'). Nous avons, comme on voit, désigné par v_1, v_2 les projections de cette vitesse sur les axes a_1, a_2. Ce sont ces projections que nous introduisons dans les formules au lieu de $\frac{dX_1}{dt}$, $\frac{dX_2}{dt}$.

Avec ces notations, les équations (41), (44) se laissent écrire

$$(46)\qquad \begin{cases} v_1 - (Y - X)(R v_1 + S v_2 - \Xi_1) = 0, \\ v_2 - (Y - X)(S v_1 + T v_2 - \Xi_2) = 0, \\ \qquad \Xi_1 v_1 + \Xi_2 v_2 - \Xi = 0, \end{cases}$$

en posant encore

$$(47)\qquad \Xi = \Xi_1(u_1 + \omega_2 X) + \Xi_2(u_2 - \omega_1 X) + u'.$$

Le plan Π' qui passe par a et par la vitesse du point M [dans son mouvement sur (F')] est un plan principal de la surface (F'), tandis que Y − X, qui mesure le vecteur $\overline{MC'}$, n'est autre que le rayon de courbure correspondant que je désignerai par ρ' :

$$(48)\qquad Y - X = \rho'.$$

L'angle que fait le plan principal Π' avec le plan Ω étant désigné par θ' on aura

$$(49)\qquad \begin{cases} v_1 = m \cos\theta', \\ v_2 = m \sin\theta', \end{cases}$$

où m est précisément la grandeur même de la vitesse de M.

Introduisons ces expressions de v_1, v_2 dans les formules (46), elles deviennent

$$(50)\qquad \begin{cases} \cos\theta' - \rho'\left(R\cos\theta' + S\sin\theta' - \dfrac{\Xi_1}{m}\right) = 0, \\ \sin\theta' - \rho'\left(S\cos\theta' + T\sin\theta' - \dfrac{\Xi_2}{m}\right) = 0, \\ \qquad \Xi_1\cos\theta' + \Xi_2\sin\theta' - \dfrac{\Xi}{m} = 0. \end{cases}$$

Par l'élimination de $\frac{1}{m}$ au moyen de la dernière de ces équations, les deux premières deviennent

$$(51)\quad \begin{cases} \cos\theta' - \rho'\left[R\cos\theta' + S\sin\theta' - \frac{\Xi_1}{\Xi}(\Xi_1\cos\theta' + \Xi_2\sin\theta')\right] = 0, \\ \sin\theta' - \rho'\left[S\cos\theta' + T\sin\theta' - \frac{\Xi_2}{\Xi}(\Xi_1\cos\theta' + \Xi_2\sin\theta')\right] = 0. \end{cases}$$

Telles sont les deux équations dont le système définit les éléments de courbure de (F').

22. *Remarque sur le cas des surfaces continuement osculatrices.* — Avant d'aller plus loin, nous pourrons examiner d'ores et déjà les circonstances d'un fait important, celui où les surfaces (F) (F') seraient osculatrices au point M, c'est-à-dire auraient les mêmes éléments de courbure.

Les éléments de courbure ρ, θ de la surface (F) seraient évidemment fournis par le système d'équations

$$(52)\quad \begin{cases} \cos\theta - \rho(R\cos\theta + S\sin\theta) = 0, \\ \sin\theta - \rho(S\cos\theta + T\sin\theta) = 0. \end{cases}$$

Si l'on rapproche ces équations des deux premières équations (50) qui fournissent ρ' et θ', on voit qu'on ne pourra avoir $\rho' = \rho$, $\theta' = \theta$ qu'à la condition d'avoir

$$\Xi_1 = 0, \qquad \Xi_2 = 0.$$

Or ici une distinction essentielle s'impose, selon que cette circonstance devra se présenter accidentellement ou bien continuement pendant tout le cours du mouvement.

Si cette circonstance a lieu pendant tout le cours du mouvement, l'époque t où un point X_1, X_2 de la surface (F) est sur la courbe de contact de (F) avec son profil conjugué est une fonction parfaitement déterminée des coordonnées de ce point admettant des dérivées partielles $\frac{\partial t}{\partial X_1}$, $\frac{\partial t}{\partial X_2}$ non constamment nulles.

Dès lors, les formules (43)

$$u'\frac{\partial t}{\partial X_1} = \Xi_1, \qquad u'\frac{\partial t}{\partial X_2} = \Xi_2,$$

donneront, comme conséquence de $\Xi_1 = 0$, $\Xi_2 = 0$,

$$u = 0,$$

en sorte que, dans ce cas, la normale a à la surface (F) est une *normale stationnaire*.

Dans mon Mémoire des *Savants étrangers* sur *Les courbes conjuguées* [1] j'ai considéré les surfaces solidaires du corps S possédant la propriété que les normales de la surface qui, à un instant donné t, font partie du complexe $\mathcal{C}$ et sont ainsi, déjà, des normales aux trajectoires de leurs points, soient, par surcroît, des normales stationnaires. J'ai prouvé que ces surfaces, qui vérifient une équation aux dérivées partielles du premier ordre, possèdent la propriété d'être constamment osculatrices à leur profil conjugué tout du long de la courbe de contact.

On voit que le résultat précédent est la réciproque de ce théorème :

Les seules surfaces solidaires d'un corps solide en mouvement par rapport à un autre, qui ont constamment un contact du second ordre avec leur profil conjugué en tous les points de la courbe de contact, sont les surfaces dont les normales sont, chacune à une certaine époque, des normales stationnaires [2].

Ces surfaces remarquables peuvent se définir ainsi. Si l'on considère un point P du corps S, la direction de sa vitesse d'entraînement dans son mouvement par rapport au corps S' décrit, dans le corps S lui-même, un cône de sommet P parfaitement déterminé, Γ_P. Les surfaces en question peuvent être définies par la condition d'être tangentes en chacun de leurs points P au cône Γ_P qui a ce point pour sommet. Cela équivaut, on le sait, à une équation aux dérivées partielles du premier ordre pour ces surfaces, ainsi du reste que je l'ai déjà indiqué plus haut.

25. *Circonstances spéciales de l'osculation accidentelle.* — Mais

---

[1] C. C. (*Sav. Étr.*, t. XXXV, p. 185 et suivantes).

[2] J'ai énoncé ce théorème réciproque dans une Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 20 novembre 1911.

lorsque l'osculation entre les surfaces (F) (F′) n'est plus une circonstance continuelle de leur contact, il n'y a plus de difficulté à admettre que $\frac{\partial t}{\partial X_1}$, $\frac{\partial t}{\partial X_2}$ deviennent *accidentellement* nulles en sorte que, dans ce cas, la conclusion $u' = 0$ ne s'impose plus.

Il pourra donc se faire que deux profils conjugués (F) (F′) soient *accidentellement* osculateurs, c'est-à-dire aient mêmes éléments de courbure, et cela à un instant donné et en un point donné, sans que, pour cela, on puisse en conclure que la normale en M est une normale stationnaire.

Il se présente cependant ici un fait spécial que nous ne saurions passer sous silence.

Si les éléments de courbure sont les mêmes pour les surfaces (F), (F′), il résulte, des deux premières formules (50), que Ξ_1, Ξ_2 sont nuls tous deux, ainsi qu'on l'a dit déjà. La dernière des équations (50) se réduit alors à

$$\frac{1}{m}\Xi = 0,$$

et comme, d'après l'équation (47), Ξ se réduit alors à u', l'équation précédente s'écrit

$$\frac{1}{m}u' = 0.$$

Du moment où u' n'est pas supposé nul, c'est $\frac{1}{m}$ qui doit l'être ; ainsi m est infini. Dire que m est infini, c'est dire que v_1 et v_2 le sont ainsi que $\frac{dX_1}{dt}$, $\frac{dX_2}{dt}$, d'après les formules (45).

Du reste cette conclusion concorde aussi avec le fait que, dans l'équation (44), Ξ_1, Ξ_2 puissent être nuls sans que u' le soit.

Il importait de mettre en évidence cette curieuse singularité dont on peut se rendre compte en remarquant que, puisque les surfaces (F), (F′) ont à l'époque t mêmes éléments du second ordre, on peut, sans changer leur position relative et, par conséquent, sans faire varier le paramètre t dont elle dépend, effectuer sur (F) et sur (F′) un déplacement de M dans lequel la normale MN engendre *en même temps* dans les deux surfaces un élément de surface développable. Si

ds est l'amplitude d'un tel déplacement, le quotient $m = \frac{ds}{dt}$ apparaît comme infini puisque t ne varie pas lorsqu'il s'effectue. La chose apparaît encore plus clairement si, au lieu de regarder t comme le temps, on le considère simplement comme le paramètre dont dépend la position relative des deux corps S et S'.

Cette circonstance remarquable méritait certainement d'être soulignée.

24. *Dernière simplification des formules. Relation homographique entre* R *et* R'. — Si nous n'avons pas encore introduit dans nos hypothèses les simplifications résultant de la considération des surfaces (F_0), (F'_0) spéciales qui font leur contact au point central A de G, c'est que nous voulions précisément, au préalable, étudier la question importante qui fait l'objet du numéro précédent.

Supposons donc maintenant qu'il s'agisse des surfaces (F_0), (F'_0) en sorte qu'on puisse prendre

$$X = 0, \qquad T = 0, \qquad S = \frac{1}{z} - \frac{\omega_1}{u_1}.$$

On a, dans ce cas,

$$(53)\qquad \left\{\begin{aligned} \Xi_1 &= \omega_2 + R u_1 + \frac{1}{z} u_2, \\ \Xi_2 &= -\omega_1 + \frac{1}{z} u_1 = 0, \\ \Xi &= u' + u_1 \Xi_1. \end{aligned}\right.$$

La seconde des équations (51) se réduit alors à

$$\tang \theta' - \frac{\rho'}{z} = 0,$$

ce qui exprime que le couple constitué par le plan principal Π' et le centre de courbure C' correspondant appartient à la corrélation G. Reste donc la première des équations (51) qui devient, après division par $\cos\theta'$ et remplacement de ρ' par $z \tang\theta'$,

$$1 - z \tang\theta' \left(R + \frac{1}{z} \tang\theta' - \frac{\Xi_1^2}{\Xi} \right) = 0.$$

ou en ordonnant en tang θ'

$$\tang^2\theta' + \left(R - \frac{\Xi_1^2}{\Xi}\right)\varkappa \tang\theta' - 1 = 0. \tag{54}$$

Telle est l'équation qui fournit les plans principaux Π'_1, Π'_2 de la surface (F'_0).

Or si R', S', T' sont les coefficients déjà considérés qui se rapportent à cette surface, ces plans seraient aussi donnés par l'équation

$$\tang^2\theta' + \frac{R' - T'}{S'}\tang\theta' - 1 = 0,$$

mais, puisque nous savons, formules (25) et (26), que

$$S' = \frac{1}{\varkappa}, \qquad T' = 0,$$

cette équation s'écrit

$$\tang^2\theta' + \varkappa R' \tang\theta' - 1 = 0; \tag{55}$$

d'où, par comparaison avec (54),

$$R' = R - \frac{\Xi_1^2}{\Xi} = \frac{R\,\Xi - \Xi_1^2}{\Xi}. \tag{56}$$

Si l'on se reporte aux formules (53) on trouve que

$$\begin{aligned}\Xi_1^2 &= \left(R u_1 + \frac{u_2}{\varkappa} + \omega_2\right)^2 = \left(R u_1 + \frac{\omega_2 u_1 + \omega_1 u_2}{u_1}\right)^2 \\ &= R^2 u_1^2 + 2R(\omega_2 u_1 + \omega_1 u_2) + \left(\frac{\omega_2 u_1 + \omega_1 u_2}{u_1}\right)^2\end{aligned}$$

et

$$R\,\Xi = R(u' + u_1\Xi_1) = R^2 u_1^2 + R(\omega_2 u_1 + \omega_1 u_2) + R u',$$

d'où

$$R\,\Xi - \Xi_1^2 = -R(\omega_2 u_1 + u_2\omega_1) + R u' - \left(\frac{\omega_1 u_2 + \omega_2 u_1}{u_1}\right)^2.$$

On trouve en conséquence

$$R' = -\frac{R(\omega_1 u_2 + \omega_2 u_1 - u') + \left(\dfrac{\omega_1 u_2 + \omega_2 u_1}{u_1}\right)^2}{R u_1^2 + (\omega_1 u_2 + \omega_2 u_1) + u'}, \tag{57}$$

ou encore

$$u_1^2 R R' + (\omega_1 u_2 + \omega_2 u_1)(R + R') + u'(R' - R) + \left(\frac{\omega_1 u_2 + \omega_2 u_1}{u_1}\right)^2 = 0. \tag{58}$$

On peut opérer un groupement de termes et écrire

$$(59)\qquad \left(R + \frac{\omega_1 u_2 + \omega_2 u_1}{u_1^2}\right)\left(R' + \frac{\omega_1 u_2 + \omega_2 u_1}{u_1^2}\right) + \frac{u'}{u_1^2}(R' - R) = 0;$$

et en faisant pour abréger

$$A = R + \frac{\omega_1 u_2 + \omega_2 u_1}{u_1^2}, \qquad A' = R' + \frac{\omega_1 u_2 + \omega_2 u_1}{u_1^2},$$

l'équation (59) devient

$$AA' + \frac{u'}{u_1^2}(A' - A) = 0,$$

ou

$$(60)\qquad \frac{1}{A'} - \frac{1}{A} = \frac{u_1^2}{u'},$$

formule qui rappelle tout à fait par sa forme la relation d'Euler.

On voit que A et A' ou R et R' se correspondent homographiquement et que, dans cette homographie, les éléments doubles coïncident.

Il est fort intéressant de voir se maintenir ici encore ce caractère qui se rencontre déjà dans l'équation d'Euler et que j'ai retrouvé dans toutes les homographies analogues qui se présentent dans la théorie des profils conjugués [1].

Ici l'élément double correspond à $A = 0$ ou

$$(61)\qquad R = -\frac{\omega_1 u_2 + \omega_2 u_1}{u_1^2}.$$

25. *Correspondance homographique entre les secondes tangentes asymptotiques.* — L'intérêt de ces résultats ressortira surtout de leur interprétation géométrique. Rappelons qu'au n° **19** nous avons introduit la considération des secondes tangentes asymptotiques AD, AD' qui font avec l'axe u_1 des angles φ, φ' liés à R, R' par les formules (31) du n° **19**, que nous reproduisons ici

$$(31)\qquad R = \frac{2}{\alpha}\operatorname{tang}\varphi, \qquad R' = \frac{2}{\alpha}\operatorname{tang}\varphi'.$$

La correspondance homographique entre R et R' se traduit évi-

---

[1] C.C. (*Sav. Étr.*, t. XXXV), p. 97-163.

demment par une correspondance homographique entre les tangentes AD, AD′, correspondance à rayons doubles coïncidents, le rayon double unique AW faisant avec l'axe a_1 un angle α donné par la formule

$$R = -\frac{2}{\chi}\operatorname{tang}\alpha = -\frac{\omega_1 u_2 + \omega_2 u_1}{u_1^2}$$

ou

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{1}{2}\chi\frac{\omega_1 u_2 + \omega_2 u_1}{u_1^2}. \tag{62}$$

Or

$$\chi = \frac{u_1}{\omega_1},$$

on a donc

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{1}{2}\frac{\omega_1 u_2 + \omega_2 u_1}{u_1\omega_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{u_2}{u_1} + \frac{\omega_2}{\omega_1}\right). \tag{63}$$

Soit AV la vitesse d'entraînement du point A; la droite AV, que l'on peut appeler la *caractéristique* du point A, a comme coefficient angulaire, dans le plan tangent à (F_0), $\frac{u_2}{u_1}$. Considérons, d'autre part, la caractéristique AU du plan tangent à la surface; c'est-à-dire la droite de contact de ce plan avec son enveloppe en le supposant solidaire du corps S et entraîné dans le mouvement de S par rapport à S′. Suivant la droite AU se fait la projection sur le plan tangent du vecteur représentatif de la vitesse angulaire. Le coefficient angulaire de AU est ainsi $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ et la formule (62) montre dès lors que *le rayon double* AW *est le conjugué harmonique de la tangente asymptotique fixe* a_2 *par rapport aux deux droites* AV, AU *qui sont les caractéristiques du point de contact* A *et du plan tangent commun en ce point aux deux surfaces.*

On reconnaît en même temps que, *lorsque la seconde tangente asymptotique coïncide avec* AW, *les droites* AU *et* AV *sont conjuguées, au sens de Dupin, sur les deux surfaces* (F_0) *et* (F'_0).

Réciproquement, il suffit que AU et AV soient conjuguées sur l'une des surfaces (F_0), (F'_0) pour que ces deux surfaces aient leurs secondes tangentes asymptotiques confondues avec AW et qu'elles soient osculatrices.

Si, dans l'équation (59), on remplace R et R′ par leurs valeurs (31)

du n° **19** on trouve, en introduisant aussi l'angle α [équation (63)],

$$\frac{2}{\chi}(\operatorname{tang}\varphi' - \operatorname{tang}\alpha)(\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}\alpha) - \frac{u'}{u_1^2}(\operatorname{tang}\varphi' - \operatorname{tang}\varphi) = 0$$

ou

$$(64) \qquad (\operatorname{tang}\varphi' - \operatorname{tang}\alpha)(\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}\alpha) - \frac{u'}{2u_1\omega_1}(\operatorname{tang}\varphi' - \operatorname{tang}\varphi) = 0.$$

En supposant $u' \neq 0$ on peut écrire encore

$$(65) \qquad \frac{1}{\operatorname{tang}\varphi' - \operatorname{tang}\alpha} - \frac{1}{\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}\alpha} = -\frac{2u_1\omega_1}{u'}.$$

Mais on peut mettre sous une forme encore plus simple cette relation en comptant les angles non plus à partir de l'axe a, mais à partir de AW.

Nous poserons dans ce but

$$\varphi = \alpha + \psi, \qquad \varphi' = \alpha + \psi',$$

où ψ, ψ' seront maintenant les angles de AD, AD' avec AW.

On a les formules

$$\begin{aligned}\frac{1}{\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}\alpha} &= \frac{1}{\operatorname{tang}(\psi + \alpha) - \operatorname{tang}\alpha} \\ &= \frac{1 - \operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\psi}{(1 + \operatorname{tang}^2\alpha)\operatorname{tang}\psi} = \frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{tang}\psi} - \sin\alpha\cos\alpha,\end{aligned}$$

et, de même,

$$\frac{1}{\operatorname{tang}\varphi' - \operatorname{tang}\alpha} = \frac{1}{\operatorname{tang}(\psi' + \alpha) - \operatorname{tang}\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{tang}\psi'} - \sin\alpha\cos\alpha;$$

d'où

$$\frac{1}{\operatorname{tang}\varphi' - \operatorname{tang}\alpha} - \frac{1}{\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}\alpha} = \left(\frac{1}{\operatorname{tang}\psi'} - \frac{1}{\operatorname{tang}\psi}\right)\cos^2\alpha.$$

En sorte qu'en définitive la relation d'homographie entre les secondes tangentes asymptotiques AD, AD' s'écrit

$$(66) \qquad \frac{1}{\operatorname{tang}\psi'} - \frac{1}{\operatorname{tang}\psi} = -\frac{2u_1\omega_1}{u'\cos^2\alpha},$$

α étant l'angle défini par l'équation (63).

La valeur de $\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \operatorname{tang}^2\alpha$ se déduit de (63)

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{4u_1^2\omega_1^2 + (u_1\omega_2 + u_2\omega_1)^2}{4u_1^2\omega_1^2},$$

et en posant

$$\Psi = \frac{2u_1\omega_1}{u'\cos^2\alpha} = \frac{4u_1^2\omega_1^2 + (u_1\omega_2 + u_2\omega_1)^2}{2u_1\omega_1 u'}, \tag{67}$$

l'équation d'homographie deviendra

$$\cot\psi' - \cot\psi = -\Psi. \tag{68}$$

La forme de cette équation rappelle celle que l'on rencontre dans la loi des courbures lors du mouvement autour d'un point fixe; cela tient à ce que toutes deux expriment des homographies à éléments doubles confondus.

La formule que nous venons de trouver fournit la réponse au problème que nous nous étions proposé.

On peut donner des formes plus géométriques à ces relations.

26. *Constructions géométriques.* — Si, dans le plan tangent, à la distance g de l'origine on mène une droite δ, parallèle à AW, les rayons AD, AD′ coupent cette droite δ en deux points D, D′ qui décrivent sur elle deux divisions homographiques dont le point double est unique et rejeté à l'infini sur la droite. C'est dire que le vecteur DD′ est constant; on calcule aisément cette distance constante qui est égale à

$$g\Psi,$$

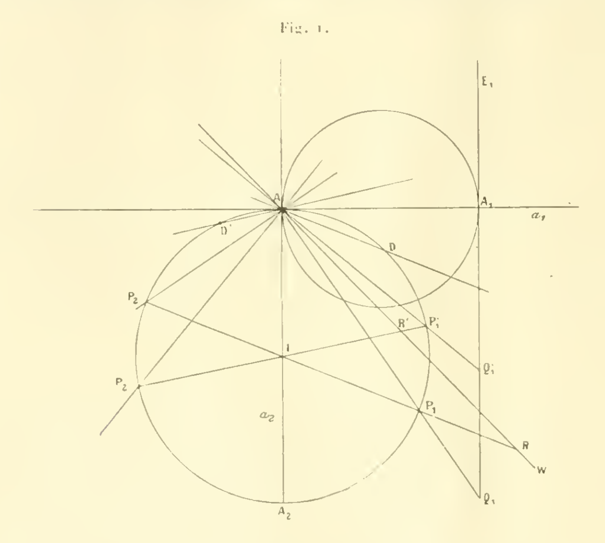
où Ψ est défini par la formule (67).

On peut du reste construire aussi directement les plans principaux par le moyen d'une considération où ne figurent plus directement les surfaces (F_0), (F'_0), qui ne seront dès lors intervenues que pour nous donner la signification des droites AD, AD′.

Menons un cercle ayant son centre sur l'axe a_2 en I (*voir* la figure) et passant au point A; soit A_2 le second point de rencontre de l'axe a_2 avec ce cercle; soit D le point où il est coupé par la droite AD. Les traces AP_1, AP_2 des plans principaux doivent bissecter l'angle DAA_2, ces traces coupent donc le cercle en deux points P_1, P_2 diamétra-

lement opposés, milieux des deux arcs sous-tendus par la corde DA_2, en sorte que le diamètre P_1IP_2 est parallèle à AD et qu'il fait avec a_1 le même angle φ. Si donc on fait la même construction pour la droite AD', on aura transporté au point I en IP_1 et IP'_1 les droites AD, AD' et les deux faisceaux homographiques des diamètres IP_1, IP_1 seront identiques à ceux des droites AD et AD'. L'équation fondamentale (68) s'applique à eux, en construisant le rayon double IB issu de I, parallèle à la droite AW, et appelant ψ, ψ' les angles que forment avec le diamètre IB les diamètres IP_1, IP'_1. On peut remarquer que les diamètres IP_1, IP_1 déterminent sur la droite AW un vecteur RR' de longueur et de direction constantes facile à calculer. Par là, la correspondance et la construction se trouvent entièrement définies.

Fig. 1.



On peut même construire sur la même figure les cotes des centres de courbure C_1, C_2, C'_1, C'_2. En effet, θ étant toujours l'angle d'un plan principal avec le plan central, sa trace fait avec l'axe a_1 l'angle θ; s'il s'agit du plan Π_1, θ_1 sera l'angle de AP_1 avec l'axe de a_1. Alors r_1 est

donné par la formule

$$r_1 = \varkappa \tang \theta_1.$$

Construisons le cercle ayant son centre sur l'axe a_1, passant en A et coupant de rechef cet axe au point A_1 d'abscisse $\varkappa$ en grandeur et signe. Menons en A_1 la tangente A_1E_1 à ce cercle. La droite AP_1 coupe A_1E_1 en un point Q_1 dont l'ordonnée mesurée positivement selon l'axe a_2 est égale à $\varkappa \tang \theta_1$, c'est-à-dire à r_1. On portera cette longueur dans un sens ou dans l'autre suivant son signe sur la normale a; on aura ainsi C_1. De même pour les autres.

Le problème que je m'étais proposé est ainsi complètement résolu théoriquement et constructivement.

Il faut toutefois savoir construire la quantité Ψ qui figure dans la formule fondamentale et c'est là l'objet que nous nous proposons dans le Chapitre suivant.

CHAPITRE IV.

CONSTRUCTION DES ÉLÉMENTS DU PARAMÈTRE FONDAMENTAL.

27. *Le paramètre Ψ fonction du trièdre central.* — Nous appellerons *fondamental* le paramètre Ψ qui figure seul dans la formule fondamentale. Il dépend de la droite a et de la corrélation G ; comme celle-ci est parfaitement définie par son trièdre trirectangle central Θ_0, on peut dire que Ψ est une fonction de ce trièdre central. C'est ainsi que, lorsqu'il s'agit de la relation d'Euler, le paramètre μ qui figure dans la formule

$$\frac{1}{r'} - \frac{1}{r} = \frac{1}{\mu},$$

dépend du choix de la normale et se trouve être égal à $\mu = k \sin \theta$, où k est la fonction que l'on sait des courbures des courbes roulantes.

Dans le cas actuel, le paramètre Ψ dépend de beaucoup plus d'éléments et son expression est nécessairement plus compliquée.

La signification des quantités ω_1, ω_2, u_1, u_2 qui y figurent est immédiate; celle de u' est un peu plus cachée. Nous allons en chercher le sens cinématique.

28. *Signification cinématique de la quantité u'.* — Conservons encore notre trièdre Θ, qui nous a été déjà si utile, de façon à nous rendre compte de la signification de u', car c'en est une assez peu nette que d'être la dérivée de u par rapport au temps.

Soit M un point de coordonnées X, X_1, X_2; ce point, mobile à la fois dans S et dans S', possède dans S une accélération dont les projections sur les axes a, a_1, a_2 du trièdre Θ sont égales respectivement à

$$(69)\qquad J_{0M} = \frac{d^2X}{dt^2}, \qquad J_{1M} = \frac{d^2X_1}{dt^2}, \qquad J_{2M} = \frac{d^2X_2}{dt^2}.$$

Nous représenterons de même par J'_{0M}, J'_{1M}, J'_{2M} les projections sur les mêmes axes de l'accélération du point M dans son mouvement dans le corps S'. Les expressions de ces quantités sont fournies par les formules de Bour [1],

$$(70)\qquad \left\{\begin{aligned} J'_{0M} &= \omega_1 v'_{2M} - \omega_2 v'_{1M} + \frac{dv'_{0M}}{dt},\\ J'_{1M} &= \omega_2 v'_{0M} - \omega\, v'_{2M} + \frac{dv'_{1M}}{dt},\\ J'_{2M} &= \omega\, v'_{1M} - \omega_1 v'_{0M} + \frac{dv'_{2M}}{dt}, \end{aligned}\right.$$

où v'_{0M}, v'_{1M} v'_{2M} sont les projections sur les axes a, a_1, a_2 de la vitesse du point M dans son mouvement dans le corps S'; ces projections sont du reste données par les formules

$$(71)\qquad \left\{\begin{aligned} v'_{0M} &= u\ + \omega_1 X_2 - \omega_2 X_1 + \frac{dX}{dt},\\ v'_{1M} &= u_1 + \omega_2 X\ - \omega\ X_2 + \frac{dX_1}{dt},\\ v'_{2M} &= u_2 + \omega\ X_1 - \omega_1 X\ + \frac{dX_2}{dt}. \end{aligned}\right.$$

En portant ces valeurs dans les formules (70) on obtiendra les expressions explicites des J'; mais l'expression de J'_{0M} nous suffira, on trouve

$$\begin{aligned} J'_{0M} = u' &+ \omega_1 u_2 - \omega_2 u_1 + \omega'_1 X_2 - \omega'_2 X_1\\ &+ \frac{\partial H}{\partial X} + 2\left(\omega_1 \frac{dX_2}{dt} - \omega_2 \frac{dX_1}{dt}\right) + \frac{d^2X}{dt^2}, \end{aligned}$$

---

(1) *Voir* nos *Leçons de Cinématique*, p. 130.

en posant

$$2H = (\omega X + \omega_1 X_1 + \omega_2 X_2)^2 - (\omega^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2)(X^2 + X_1^2 + X_2^2),$$

et u', ω_1', ω_2', désignant les dérivées de u, ω_1, ω_2.

Nous allons appliquer cette formule au point P du corps S qui coïncide constamment avec l'origine du trièdre Θ, auquel cas X, X_1, X_2 sont constamment nuls. La formule précédente donne dans ce cas

$$(72)\qquad J'_{0P} = u' + \omega_1 u_2 - \omega_2 u_1.$$

Considérons de même le point P′ du corps S′ qui coïncide actuellement, lui aussi, avec le point A. Puisque ce point est fixe dans le corps S′, sa vitesse dans ce corps est nulle; en désignant par X, X_1, X_2 ses coordonnées, on a donc

$$(73)\qquad \left\{\begin{aligned} 0 &= v'_{0P'} = u + \omega_1 X_2 - \omega_2 X_1 + \frac{dX}{dt},\\ 0 &= v'_{1P'} = u_1 + \omega_2 X - \omega X_2 + \frac{dX_1}{dt},\\ 0 &= v'_{2P'} = u_2 + \omega X_1 - \omega_1 X + \frac{dX_2}{dt}.\end{aligned}\right.$$

En différentiant la première des équations (73), il viendra

$$(74)\qquad 0 = u' + \omega_1' X_2 - \omega_2' X_1 + \omega_1 \frac{dX_2}{dt} - \omega_2 \frac{dX_1}{dt} + \frac{d^2 X}{dt^2},$$

mais X, X_1, X_2 étant actuellement nuls, puisque P′ est actuellement en A, on a, d'après les équations (73),

$$\frac{dX_1}{dt} = -u_1, \qquad \frac{dX_2}{dt} = -u_2$$

en sorte que $J_{0P'}$ étant la projection sur l'axe a de l'accélération du point P′ dans son mouvement dans le corps S, on a, d'après (74),

$$(75)\qquad J_{0P'} = \frac{d^2 X}{dt^2} = -u' + \omega_1 u_2 - \omega_2 u_1.$$

On a ainsi dans (72), (75) les expressions des projections sur l'axe a des accélérations respectives du point P dans le corps S′, du point P dans le corps S, où P, P′ sont les points respectivement solidaires

de S et de S' qui coïncident actuellement entre eux et avec le point A, sommet du trièdre central. On obtient par une simple soustraction :

$$u' = \frac{1}{2}(J'_{0P} - J_{0P}). \tag{76}$$

De là ce théorème :

La quantité u' est la demi-projection sur l'axe u du trièdre central de l'excès géométrique de l'accélération du point P *dans le corps* S' *sur celle du point* P' *dans le corps* S, *en appelant* P, P' *les points des corps* S *et* S' *qui coïncident actuellement avec le point* A.

Cette définition de u est indépendante, comme on voit, de toute hypothèse sur le choix des axes de coordonnées.

29. *Introduction d'un nouveau trièdre de référence.* — Dans les recherches précédentes nous avons utilisé deux trièdres Θ, Θ solidaires des corps S et S' et coïncidant actuellement avec le trièdre Θ_0. Ces trièdres avaient une importance en quelque sorte LOCALE puisque leur notion reposait sur celle du trièdre central Θ_0.

Nous allons maintenant adopter un trièdre dont le choix ne repose plus sur des considérations spéciales à tel axe particulier du corps S. Nous prendrons le trièdre T que j'ai déjà utilisé dans mes recherches sur les courbes conjuguées [1].

Je rappelle rapidement en quoi consiste ce trièdre. Considérons à un instant donné du mouvement le mouvement hélicoïdal ou torsion tangente; d représentera son axe et h son pas.

La droite d décrit dans chacun des corps S, S' une surface; ces deux surfaces (Φ), (Φ'), appelées quelquefois *axoïdes* pour rappeler qu'elles sont le lieu de l'axe d dans l'un et l'autre corps, se raccordent à chaque instant suivant l'axe d qu'elles ont en commun.

La corrélation homographique qui naît de la distribution des plans tangents tout le long de d est la même pour toutes les deux, soient O son point central et k son paramètre de distribution.

On prend O comme origine du trièdre T, d comme axe Oz, le plan

---

[1] C.C. (*Sav. Étr.*, t. XXXV), p. 17.

central pour plan zOx et la normale commune au point central commun O des deux surfaces comme axe Oy.

Ce trièdre T est mobile à la fois dans le corps S et dans le corps S′, en sorte qu'on peut parler des mouvements $\boxed{T, S}$ et $\boxed{T, S'}$ de T par rapport à S et S′, ainsi que de leurs inverses $\boxed{S, T}$, $\boxed{S', T}$.

Le mouvement $\boxed{S, S'}$ de S par rapport à S′ peut être regardé comme résultant des mouvements $\boxed{S, T}$ et $\boxed{T, S'}$.

Désignons, suivant les notations usuelles qui sont aussi celles que j'ai employées dans mon Mémoire sur les courbes conjuguées, par p, q, r les projections sur les axes du trièdre T du vecteur représentatif de la rotation dans le mouvement $\boxed{T, S}$ et par ξ, η, ζ les projections, sur les mêmes axes, de la vitesse, au cours du même mouvement, du point O origine du trièdre T.

Pareillement, p', q', r', ξ', η', ζ' désigneront les mêmes quantités pour le mouvement $\boxed{T, S'}$, en sorte que dorénavant l'accent prime cessera de représenter les dérivées, sauf avis exprès.

Eu égard au choix du trièdre T, on démontre aisément (¹) que les deux groupes de quantités $p, q, r, \xi, \eta, \zeta$; $p', q', r', \xi', \eta', \zeta'$ sont reliés par les relations suivantes qui sont nécessaires et suffisantes :

$$(77)\qquad \begin{cases} p' = p, & q' = q = 0, & r' \neq r & \text{(en général)}, \\ \xi' = \xi, & \eta' = \eta = 0, & \zeta' \neq \zeta & \text{(en général)}, \end{cases}$$

en sorte que les deux mouvements $\boxed{T, S}$, $\boxed{T, S'}$ ne diffèrent que par les valeurs de ζ et de r. D'ailleurs, le pas du mouvement hélicoïdal tangent au mouvement $\boxed{S, S'}$ et la vitesse angulaire ont pour valeurs

$$(78)\qquad h = \frac{\zeta' - \zeta}{r' - r}, \qquad \omega = r' - r,$$

tandis que le paramètre, déjà désigné par k, de la corrélation qui naît de la distribution des plans tangents aux axoïdes (Φ) (Φ′), a pour

(¹) C.C. (*Sav. Étr.*, t. XXXV), p. 27.

valeur

$$(79)\qquad k = -\frac{\xi'}{p'} = -\frac{\xi}{p}.$$

J'ajouterai que j'adopte également la notation [1]

$$(80)\qquad h_1 = -\frac{dh}{p\,dt}.$$

Avec ces notations, la vitesse d'entraînement d'un point $M(x, y, z)$ dans le mouvement $\boxed{S, S'}$ admet comme projections sur les axes Ox, Oy, Oz du trièdre T,

$$-(r'-r)y, \quad (r'-r)x, \quad h(r'-r).$$

Dès lors, le plan polaire de ce point M dans le complexe $\mathfrak{L}$, qui est normal en M à cette vitesse, aura pour équation

$$(81)\qquad -yX + xY + h(Z-z) = 0.$$

J'ai introduit [2] dans mon Mémoire précité la considération des normales stationnaires; elles appartiennent au complexe $\mathfrak{L}$ et au complexe linéaire $\mathfrak{L}'$ relatif à l'instant infiniment voisin. Elles font donc partie d'une congruence linéaire et appartiennent à tous les complexes linéaires d'un faisceau dont font partie les complexes $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}'$. Un des complexes de ce faisceau, que j'ai appelé le complexe *auxiliaire* $\mathfrak{L}_1$, a une définition particulièrement simple.

L'axe de ce complexe est parallèle à Oy, est tracé dans le plan de xy et a pour abscisse $x = h_1$. De plus, son pas ou paramètre est égal à $h - k$, en sorte que le plan polaire du point $M(x, y, z)$, dans ce complexe $\mathfrak{L}_1$, a pour équation

$$(82)\qquad z(X-x) + (h-k)(Y-y) + (h_1 - x)(Z-z) = 0.$$

L'intersection des deux plans (81), (82) donne la droite *normale stationnaire* qui passe en M et que je désigne par d_M^{nn}, l'indice M indiquant qu'elle passe en M et le double indice n indiquant qu'elle est normale à deux instants consécutifs aux trajectoires de tous ses points.

---

[1] C.C. (*Sav. Étr.*, t. XXXV), p. 40.
[2] C.C. (*Sav. Étr.*, t. XXXV), p. 40.

50. *Coordonnées du trièdre* Θ_0 *par rapport au trièdre* T. — Ceci rappelé, considérons le trièdre central Θ_0 considéré dans les Chapitres précédents. Nous désignerons par a, b, c les coordonnées de l'origine de ce trièdre, par α, β, γ les cosinus directeurs de l'axe a, par α_1, β_1, γ_1 ceux de l'axe a_1, enfin par α_2, β_2, γ_2 ceux de l'axe a_2. Ces neuf cosinus ne sont pas indépendants car ils sont liés par les conditions communes d'orthogonalité, qui ne laissent subsister que trois paramètres indépendants, comme on sait.

Mais ces trois paramètres, si le point A est donné, ne sont pas eux-mêmes quelconques. En effet, l'axe a doit appartenir au complexe $\mathcal{C}$, ce qui introduit la condition

$$-b\alpha + a\beta + h\gamma = 0. \tag{83}$$

Le trièdre Θ_0 dépend en résumé de cinq paramètres : les coordonnées a, b, c de son sommet et les deux paramètres que laisse arbitraires pour son orientation l'équation (83).

51. *Calcul des quantités* $\omega_1, \omega_2, u_1, u_2$. — Ce trièdre central étant choisi, les quantités ω_1, ω_2, u_1, u_2 sont immédiatement définies. En effet, la rotation dans le mouvement $\boxed{S, S'}$ se représente par un vecteur porté par d ou Oz mesuré par $(r' - r)$ [formule (78)].

En conséquence, puisque ω_1, ω_2 sont les projections de ce vecteur sur a_1, a_2, on aura

$$\omega_1 = (r' - r)\gamma_1, \qquad \omega_2 = (r' - r)\gamma_2. \tag{84}$$

Pareillement u_1, u_2 sont les projections sur a_1, a_2 de la vitesse d'entraînement du point A dans le mouvement $\boxed{S, S'}$. Les projections sur Ox, Oy, Oz de cette vitesse étant

$$-(r' - r)b, \qquad (r' - r)a, \qquad h(r' - r),$$

ses projections sur a_1, a_2 seront

$$\left\{\begin{aligned} u_1 &= (r' - r)(-b\alpha_1 + a\beta_1 + h\gamma_1), \\ u_2 &= (r' - r)(-b\alpha_2 + a\beta_2 + h\gamma_2). \end{aligned}\right. \tag{85}$$

52. *Calcul de* u'. — Cherchons maintenant à exprimer la quantité u'.

Nous avons, au moyen de l'équation (76), une définition de u' qui fournira une solution facile du problème, car on peut calculer aisément les projections des vecteurs $\overline{J_P}$ et $\overline{J_{P'}}$ au moyen des éléments qu'introduit l'emploi du trièdre de référence T.

Soient x, y, z les coordonnées d'un point M variable avec le temps par rapport au trièdre T. En représentant par $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ les dérivées premières de x, y, z par rapport au temps, les projections de la vitesse de ce point dans le corps S sur les axes du trièdre T ont pour valeurs

$$(86)\qquad \left\{\begin{aligned} v_{xM} &= \xi - ry + \dot{x},\\ v_{yM} &= rx - pz + \dot{y},\\ v_{zM} &= \zeta + py + \dot{z}. \end{aligned}\right.$$

Pareillement, les projections de la vitesse de M, dans son mouvement par rapport au corps S′, auront comme expressions :

$$(87)\qquad \left\{\begin{aligned} v'_{xM} &= \xi - r'y + \dot{x},\\ v'_{yM} &= r'x - pz + \dot{y},\\ v'_{zM} &= \zeta' + py + \dot{z}. \end{aligned}\right.$$

Les projections J_{xM}, J_{yM}, J_{zM}, de l'accélération du point M, dans son mouvement par rapport à S, seront données par les formules de Bour, déjà utilisées,

$$(88)\qquad \left\{\begin{aligned} J_{xM} &= -rv_{yM} + \frac{dv_{xM}}{dt},\\ J_{yM} &= rv_{xM} - pv_{zM} + \frac{dv_{yM}}{dt},\\ J_{zM} &= pv_{yM} + \frac{dv_{zM}}{dt}, \end{aligned}\right.$$

et, s'il s'agit de l'accélération de M dans son mouvement dans le corps S′, on aura de même

$$(89)\qquad \left\{\begin{aligned} J'_{xM} &= -r'v'_{yM} + \frac{dv'_{xM}}{dt},\\ J'_{yM} &= r'v'_{xM} - pv'_{zM} + \frac{dv'_{yM}}{dt},\\ J'_{zM} &= pv'_{yM} + \frac{dv'_{zM}}{dt}. \end{aligned}\right.$$

Supposons que le point M coïncide avec un point P fixe dans le corps S. Alors v_{xP}, v_{yP}, v_{zP} sont nulles, et les formules (86) donnent

$$(90) \qquad \xi - ry + \dot{x} = 0, \qquad rx - pz + \dot{y} = 0, \qquad \zeta + py + \dot{z} = 0;$$

d'où l'on peut tirer $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ et les porter dans les expressions de v'_{xP}, v'_{yP}, v'_{zP}. Les formules (87) deviennent alors

$$(91) \qquad v'_{xP} = -(r'-r)y, \qquad v'_{yP} = (r'-r)x, \qquad v'_{zP} = (r'-r)h.$$

Si l'on calcule alors, au moyen des formules (89), les projections J'_{xP}, J'_{yP}, J'_{zP} de l'accélération $\overline{J'_P}$ du point P dans le corps S', on aura

$$\begin{aligned}
J'_{xP} &= -r'(r'-r)x - \frac{d}{dt}(\overline{r'-r}y),\\
J'_{yP} &= -r'(r'-r)y - p(r'-r)h + \frac{d}{dt}(\overline{r'-r}x),\\
J'_{zP} &= \quad p(r'-r)x + \frac{d}{dt}(\overline{r'-r}h),
\end{aligned}$$

ou, en développant,

$$\begin{aligned}
J'_{xP} &= -r'(r'-r)x - (r'-r)\dot{y} - \frac{d(r'-r)}{dt}y,\\
J'_{yP} &= -r'(r'-r)y - p(r'-r)h + (r'-r)\dot{x} + \frac{d(r'-r)}{dt}x,\\
J'_{zP} &= \quad p(r'-r)x + (r'-r)\frac{dh}{dt} + \frac{d(r'-r)}{dt}h.
\end{aligned}$$

Les valeurs de $\dot{x}$, $\dot{y}$ qui figurent dans ces expressions sont fournies par les équations (90); de plus, d'après la formule (80), on a

$$\frac{dh}{dt} = -ph_1,$$

et si nous faisons ces substitutions dans les valeurs précédemment trouvées de J'_{xP}, J'_{yP}, J'_{zP}, elles deviennent

$$(92) \qquad \left\{\begin{aligned}
J'_{xP} &= -(r'-r)^2x - p(r'-r)z - \frac{d(r'-r)}{dt}y,\\
J'_{yP} &= -(r'-r)^2y - p(r'-r)h - \xi(r'-r) + \frac{d(r'-r)}{dt}x,\\
J'_{zP} &= \quad (r'-r)px - (r'-r)ph_1 + \frac{d(r'-r)}{dt}h.
\end{aligned}\right.$$

On peut se rappeler encore que le paramètre de distribution k a

pour valeur $k = -\frac{\xi}{p}$, ce qui permet de remplacer ξ par $-pk$. Nous obtenons ainsi le résultat définitif :

$$(93) \quad \begin{cases} J'_{xP} = -(r'-r)^2 x - p(r'-r)z - \frac{d(r'-r)}{dt} y, \\ J'_{yP} = -(r'-r)^2 y - p(r'-r)h + p(r'-r)k + \frac{d(r'-r)}{dt} x, \\ J'_{zP} = p(r'-r)x - p(r'-r)h_1 + \frac{d}{dt}(r'-r)h. \end{cases}$$

Maintenant, pour obtenir la projection J'_{0P} de cette accélération sur un axe $a(\alpha, \beta, \gamma)$, il suffira de former la combinaison

$$\begin{aligned} J'_{0P} &= \alpha J'_{xP} + \beta J'_{yP} + \gamma J'_{zP} \\ &= -(r'-r)^2(\alpha x + \beta y) - p(r'-r)[\alpha z + \beta(h-k) + \gamma(h_1 - x)] \\ &\quad + \frac{d(r'-r)}{dt}(-\alpha y + \beta x + \gamma h). \end{aligned}$$

Appliquons ceci au point P qui coïncide actuellement avec le point A et dont les coordonnées sont (a, b, c) en nous souvenant que les coordonnées de ce point et les cosinus α, β, γ de l'axe a sont liés par l'équation (83). Il viendra

$$J'_{0P} = -(r'-r)^2(\alpha a + \beta b) - p(r'-r)[\alpha c + \beta(h-k) + \gamma(h_1 - a)].$$

La parfaite symétrie du rôle que le trièdre T joue par rapport aux corps S et S' nous permet sans autre calcul d'écrire la valeur $J_{0P'}$ de la projection sur l'axe a de l'accélération dans le corps S du point P' du corps S' qui coïncide actuellement avec le point A, nous aurons en effet le résultat en échangeant simplement r et r', ζ et ζ', ce qui laisse p, h, k, h_1 invariables ; nous aurons de la sorte

$$J_{0P'} = -(r'-r)^2(\alpha a + \beta b) - p(r-r')[\alpha c + \beta(h-k) + \gamma(h_1 - a)].$$

On en déduit par soustraction :

$$(94) \quad u' = \frac{1}{2}(J'_{0P} - J_{0P'}) = -p(r'-r)[\alpha c + \beta(h-k) + \gamma(h_1 - a)].$$

Telle est l'expression cherchée de u'.

On ne manquera pas d'observer que $u' = 0$ équivaut à l'équation

$$\alpha c + \beta(h-k) + \gamma(h_1 - a) = 0,$$

laquelle, en vertu de l'équation (82), exprime que l'axe a, qui appartient déjà au complexe $\mathfrak{L}$, appartient aussi au complexe $\mathfrak{L}_1$, en sorte que, dans ce cas, la droite a coïncide avec la normale stationnaire a_A^{nn} qui est issue du point A.

33. *Calcul de $\varkappa$ et de Ψ.* — Il nous est actuellement possible d'exprimer, en fonction des coordonnées a, b, c, α, β, γ, α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2 du trièdre Θ_0, les deux quantités qui figurent dans la solution de notre problème, à savoir : le paramètre de distribution $\varkappa$ de la corrélation G et le paramètre fondamental Ψ.

En ce qui concerne $\varkappa$ que nous avons trouvé égal à

$$\varkappa = \frac{u_1}{\omega_1},$$

d'après les valeurs (84), (85) de ω_1, u_1, on aura

$$\varkappa = \frac{-b\alpha_1 + a\beta_1 + h\gamma_1}{\gamma_1}. \tag{95}$$

En ce qui concerne Ψ, le résultat est plus compliqué, car d'après (67)

$$\Psi = \frac{4u_1^2\omega_1^2 + (\omega_1 u_2 + \omega_2 u_1)^2}{2u'\omega_1 u_1};$$

d'où, d'après les équations (84), (85), (94),

$$\Psi = -\frac{r'-r}{2p}\,\frac{4\gamma_1^2(-b\alpha_1+a\beta_1+h\gamma_1)^2+[\gamma_1(-b\alpha_2+a\beta_2+h\gamma_2)+\gamma_2(-b\alpha_1+a\beta_1+h\gamma_1)]^2}{\gamma_1(-b\alpha_1+a\beta_1+h\gamma_1)[c\alpha+(h-k)\beta+(h_1-a)\gamma]}. \tag{96}$$

34. *Construction effective de Ψ.* — Mais la forme compliquée qui précède n'empêche pas que Ψ ne soit aisément constructible. Si, en effet, on se reporte à la définition de la droite AW qui fait avec l'axe a_1 l'angle α donné par la formule (63),

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{u_2}{u_1} + \frac{\omega_2}{\omega_1}\right),$$

les droites AV, AU étant elles-mêmes d'une construction facile, puisqu'il suffit pour les avoir de prendre la vitesse d'entraînement de A et la projection sur le plan (a_1, a_2) du vecteur issu de A équipollent au vecteur $(r'-r)$ porté par d ou Oz et que AW est la con-

juguée harmonique de a_2 par rapport à ces deux droites, on peut regarder l'angle α comme construit.

La construction de

$$\Psi = \frac{2u_1\omega_1}{u'\cos^2\alpha} = -2\frac{r'-r}{p\cos^2\alpha}\,\frac{(-b\alpha_1 + a\beta_1 + h\gamma_1)\gamma_1}{c\alpha + (h-k)\gamma + (h_1 - a)\gamma}$$

n'offre plus alors de difficulté.

On peut même remarquer que

$$c\alpha + (h-k)\beta + (h_1 - a)\gamma$$

est la projection sur l'axe a du vecteur dont les projections sur les axes Ox, Oy, Oz sont

$$c, \quad h-k, \quad h_1 - a.$$

Ce vecteur est la vitesse fictive qu'aurait le point A dans un mouvement hélicoïdal attaché au complexe linéaire $\mathcal{L}_1$ (c'est-à-dire ayant même axe et même pas) et dont la vitesse angulaire serait l'unité.

Quant au quotient $\frac{r'-r}{-p}$ qui figure en facteur de l'expression de Ψ, j'ai déjà eu l'occasion de le considérer dans mon Mémoire *Sur les courbes conjuguées* (1).

Si l'on désigne par β, β' les angles que font avec Oz (ou d) les tangentes aux deux lignes de striction des axoïdes (Φ), (Φ'), on trouve qu'on a

$$\text{(97)} \qquad \frac{r'-r}{-p} = \frac{k}{h}(\cot\beta' - \cot\beta).$$

On peut donc regarder comme établie la construction complète du paramètre principal Ψ.

(1) C.C. (*Sav. Étr.*, t. XXXV), p. 105. Dans ce Mémoire j'appelle α, α' les angles que je désigne ici par β, β'.

Kérity, octobre 1911.

Le calcul des intégrales définies;

Par Émile BOREL.

INTRODUCTION.

I. — Remarques historiques.

Les résultats acquis, dès la fin du XIXᵉ siècle, ont surabondamment prouvé combien était simpliste l'opinion d'après laquelle il serait possible de limiter le champ des Mathématiques à l'étude d'une catégorie déterminée de fonctions : fonctions continues, fonctions dérivables, fonctions analytiques, etc. Pour qu'une telle limitation ne fût pas à la fois arbitraire et vaine, il faudrait, en effet, qu'on pût être assuré de son invariance, à l'égard du moins d'une catégorie déterminée de transformations analytiques. Or, si l'on n'a pas le droit d'affirmer qu'une telle limitation sera toujours impossible, on doit reconnaître que sa réalisation prochaine est peu vraisemblable dans l'état actuel de la Science. Cette réalisation exigerait, entre autre choses, une étude approfondie au point de vue arithmétique de tous les nombres irrationnels qui peuvent s'introduire en Algèbre et en Analyse, et une telle étude est à peine ébauchée [1]. En effet, l'introduction d'un nombre irrationnel α d'une complication particulière dans une équation fort simple, telle que la suivante

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \alpha \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \varphi(x, y),$$

[1] Voir, par exemple, mes *Leçons sur la Théorie de la croissance*, dernier Chapitre.

entraîne une conséquence inattendue : en partant de conditions *analytiques*, l'équation définit une fonction des variables x et y *qui n'est analytique pour aucun système de valeurs de ces variables* (1) Dans un autre ordre d'idées, M. Lebesgue a tiré, de la considération des développements décimaux des nombres irrationnels les plus généraux, des conséquences presque paradoxales; en particulier, il en a déduit la définition d'une fonction qui n'est susceptible d'aucune représentation analytique (2).

C'est cette quasi-impossibilité d'établir une démarcation précise entre les êtres analytiques regardés comme « simples » et les autres, qui a été l'origine de travaux qui ont considérablement accru nos connaissances en Analyse. Ces travaux étaient nécessaires ; ils ne sont pas d'ailleurs définitifs sur tous les points et il sera encore utile, à mon avis, de s'occuper de ce qu'on a pu appeler la *pathologie* des fonctions. Mais il est permis de penser que le but définitif de ces recherches *pathologiques* doit être la délimitation des fonctions considérées comme *saines* (3). Là encore, nous nous heurtons à des difficultés qui sont loin d'être résolues.

Je voudrais essayer d'indiquer, dans ce Mémoire, un point de vue différent, qui n'est pas entièrement nouveau, mais qu'il m'a semblé possible, en utilisant divers travaux publiés dans ces vingt dernières années, de présenter sous une forme qui me paraît neuve. J'en donnerai, d'ailleurs, immédiatement une application concrète au calcul des intégrales définies, de manière à bien montrer qu'il ne s'agit pas d'une pure théorie spéculative, mais que la conception que je propose peut conduire à des résultats positifs et précis, indépendamment de toute opinion sur cette conception même.

---

(1) Borel, *Comptes rendus*, t. CXXI, 19 décembre 1895.

(2) *Sur les fonctions représentables analytiquement* (Journal de M. Jordan, 1905, p. 214). Sur le sens qu'il faut donner au mot *définition*, M. Lebesgue fait des observations fort justes qui entraînent des réserves sur le sens que peut avoir son énoncé, dont l'intérêt, à mon point de vue, est surtout négatif.

(3) J'ai déjà exprimé, à diverses reprises, cette opinion, en particulier en ce qui concerne la régularité des modes de croissance (*Leçons sur les fonctions entières*, Note III).

L'idée qui m'a guidé est l'utilité qui me paraît évidente de distinguer entre les calculs qui peuvent être réellement effectués et ceux qui ne peuvent pas l'être. Les premiers, seuls, sont actuellement utilisables dans les applications des Mathématiques. Je ne veux pas dire, bien entendu, que les applications soient l'unique but des Mathématiques ; rien n'est plus loin de ma pensée ; et, admettrait-on ce point, il n'en resterait pas moins que certaines spéculations, aujourd'hui sans rapport visible avec aucune application, se révéleront peut-être demain comme très fécondes en résultats pratiques. Ce que je dis simplement, c'est qu'il y a un grand intérêt théorique et pratique à étudier à part les nombres et les fonctions *calculables ;* nous verrons que ce champ d'études est beaucoup plus étendu qu'on n'aurait pu le penser il y a quelques années; c'est pourquoi je me suis décidé à cette publication, à laquelle je réfléchis depuis fort longtemps.

Ces réflexions, je n'ai pas besoin de le dire, n'ont pu être indépendantes de mes lectures, ni surtout de mes conversations. Il ne m'est pas possible de signaler tous ceux qui, par leurs paroles ou par leurs écrits, ont eu une part dans la formation des idées que je vais exposer : je ne les connais d'ailleurs pas tous, car ces influences sont parfois inconscientes. Je manquerais cependant à un devoir élémentaire de probité, si je ne signalais pas certaines conversations amicales dont il n'est pas resté de trace écrite et qui ont certainement joué un rôle essentiel : je veux parler de conversations avec M. Jules Drach qui remontent à plus de vingt ans et ont été souvent reprises depuis ; et ensuite, dans l'ordre chronologique, de conversations avec M. René Baire et avec M. Henri Lebesgue. Je conserve, cela va sans dire, toute la responsabilité de ce qui pourra paraître critiquable dans les considérations auxquelles je consacre cette Introduction ; mais je voudrais, si quelqu'une d'entre elles retient l'attention, qu'on sache qu'elle n'aurait probablement pas vù le jour sous sa forme actuelle, si je n'avais pas eu la bonne fortune d'échanger des idées avec les amis dont je viens de donner les noms.

II. — Nombres calculables.

Nous dirons qu'un nombre α est calculable lorsque, étant donné un nombre entier quelconque n, on sait obtenir ([1]) un nombre rationnel qui diffère de α de moins de $\frac{1}{n}$. Les nombres rationnels sont évidemment les plus simples des nombres calculables; lorsqu'un nombre n'est pas rationnel, on en calcule généralement les valeurs approchées, en faisant usage, soit des fractions décimales, soit des fractions continues. On peut se demander s'il faut considérer à part ceux des nombres irrationnels pour lesquels *la loi* d'un de ces développements est connue; il est clair qu'il en résulte un avantage pratique considérable, mais il faut observer que cet avantage est entièrement limité à un mode unique de représentation; le système décimal, en particulier, n'a aucune valeur théorique spéciale; il n'en est pas de même pour le développement en fraction continue, qui est unique en son genre, mais, d'autre part, un tel développement n'est pas invariant relativement à des opérations arithmétiques très simples ([2]). Il en ré-

([1]) Je laisse intentionnellement de côté la plus ou moins grande longueur pratique des opérations; l'essentiel est que chacune de ces opérations soit exécutable en un temps fini, par une méthode sûre et sans ambiguïté. Par exemple, un nombre décimal β, tel que sa $n^{ième}$ décimale soit égale à la décimale de π de rang $n!$ doit être regardé comme défini, bien que son calcul, avec seulement une dizaine de chiffres exacts, puisse exiger, dans l'état actuel de l'Analyse, un temps dépassant de beaucoup la longueur de la vie humaine. En réalité, la difficulté est la même pour tous les nombres incommensurables; si les premières décimales sont parfois aisées à calculer, l'impossibilité pratique reparaît si l'on exige quelques milliers de chiffres. Au point de vue pratique, on peut dire que les nombres dont on a effectivement besoin peuvent, en général, être effectivement calculés avec l'approximation désirable; d'autre part, il n'y a pas lieu d'élever des exigences de nature pratique, lorsqu'il s'agit de nombres dont l'importance pratique est nulle, comme le nombre β dont il vient d'être question.

([2]) Quelques recherches relatives à cette invariance ont été entreprises par M. Châtelet (*Bulletin de la Société mathématique*, 1912, t. XL, p. 1). Mais, malgré l'intérêt des résultats obtenus, ceux-ci sont encore très particuliers et leur extension paraît présenter de grandes difficultés. C'est là une des questions les plus importantes de l'Arithmétique, et il serait très désirable que les recherches de M. Châtelet soient continuées et étendues.

sulte que la connaissance de la loi d'un développement décimal (non périodique) doit être actuellement considérée comme n'ayant aucune valeur théorique [1] ni pratique, tandis que la connaissance de la loi d'un développement en fraction continue a un certain intérêt théorique, mais un intérêt pratique à peu près nul.

Le premier des problèmes qui se pose au sujet des nombres calculables est celui de l'égalité de deux de ces nombres [2]. Si deux nombres calculables sont inégaux, on s'en apercevra évidemment en calculant chacun d'eux avec une approximation suffisante, déterminée, mais généralement inconnue *a priori*. On réaliserait un progrès évident en déterminant une limite inférieure de la différence qui peut exister entre deux nombres calculables, dont les définitions satisfont à des conditions connues. Cette limite existe évidemment si les conditions sont telles qu'elles ne définissent qu'un nombre fini de nombres calculables ; j'ai déjà indiqué ailleurs cette manière de poser la question [3] ; je veux seulement faire observer ici que la fonction qui définit l'écart minimum de deux nombres de *hauteur* donnée [4] est calculable, pour chaque valeur finie de la hauteur, mais que son calcul effectif serait d'une longueur impraticable, s'il fallait le réaliser empiriquement, c'est-à-dire en calculant tous les nombres dont la hauteur

---

(1) Je suppose ici, bien entendu, que cette loi serait *tout* ce qu'on saurait sur le nombre. Au contraire, il y aurait un très grand intérêt théorique à connaître la loi des chiffres décimaux d'un nombre défini autrement que par cette loi, de $\sqrt{2}$ par exemple. Mais c'est là un sujet de recherches très difficile, et qui ne pourra être abordé qu'après celui dont il vient d'être question dans la note précédente.

(2) La connaissance des lois dont il vient d'être question permettrait de résoudre cette question pour deux nombres donnés *sous la même forme*, mais le problème n'a alors aucun intérêt. Ce qui importe, c'est de savoir reconnaître si deux nombres sont égaux, lorsqu'ils sont obtenus par des modes de calcul différents.

(3) *Comptes rendus*, décembre 1903.

(4) Je rappelle que la hauteur d'un nombre est une fonction croissante du nombre d'opérations nécessaires pour définir le nombre à partir de l'unité ; la définition est seulement assujettie aux conditions suivantes : 1° tout nombre calculable doit avoir une hauteur finie ; 2° il y a un nombre fini de nombres dont la hauteur est inférieure à une valeur donnée.

ne dépasse pas la valeur finie considérée. On n'est même pas absolument sûr, au point de vue théorique, qu'il ne se présenterait pas des difficultés insolubles, car on peut concevoir deux nombres tels que les suivants :

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2},$$

ayant un nombre quelconque de chiffres décimaux identiques, et dont on ne saurait pas prouver l'égalité (1). Il serait donc tout à fait désirable qu'on ait quelques résultats généraux non empiriques sur la limitation inférieure de l'écart en fonction de la hauteur (2). C'est un problème qui mérite d'attirer l'attention des analystes, malgré sa difficulté.

Un autre problème, bien plus difficile que le précédent et cependant plus souvent signalé comme digne d'intérêt, consiste à se demander si un nombre calculable appartient ou non à une catégorie énumérable (3) particulière : si le nombre π, ou la constante d'Euler C est ou non un nombre rationnel, ou quadratique, ou algébrique ? On sait que la question est résolue pour π, et ne l'est pas pour C. Il

(1) Il ne semble pas que ces difficultés se présentent *effectivement* dans la réalité ; pratiquement, toutes les fois que les mathématiciens ont constaté l'égalité *numérique* de deux nombres (à une approximation suffisante), ils ont su démontrer l'égalité rigoureuse. C'est là un fait important : dans tous les cas où l'on sait définir deux nombres dont les développements décimaux ont une centaine de chiffres communs, on sait aussi, ou bien qu'ils sont égaux, ou bien qu'ils sont inégaux en vertu de leur définition même (par exemple, l'un d'eux peut être défini comme égal à l'autre augmenté de 10^{-1000}). Il serait fort intéressant de pouvoir donner un exemple de deux nombres dont les développements décimaux coïncident *pratiquement*, sans que l'on sache s'ils sont égaux ou non. Ceci se rattache à la question de savoir dans quelle mesure une vérification empirique assure de l'exactitude d'un théorème d'Analyse, tel que le fameux théorème de Riemann sur les fonctions (§ 5).

(2) Voir mes *Leçons sur la théorie de la croissance*, loc. cit.

(3) J'emploie le terme *énumérable* dans le sens que j'ai donné aux mots : *effectivement énumérable*, réservant au terme *dénombrable* son sens usuel, sans m'inquiéter ici des critiques qu'on peut faire à cette notion d'ensemble dénombrable non effectivement énumérable (Voir *Annales de l'École Normale*, 1908, les *Paradoxes de la théorie des ensembles*).

ne semble pas possible, actuellement, d'aborder ce problème sous sa forme générale, pour les nombres qui peuvent être définis, à partir des nombres rationnels, par des conditions transcendantes. On peut le ramener au problème, à certains égards plus simple, qui consiste à *limiter la hauteur* des nombres rationnels qui peuvent être définis à partir des nombres entiers par des opérations algébriques ou analytiques de nature déterminée ; il est clair que si les procédés de définition sont tels qu'ils ne conduisent qu'à un nombre *fini* de nombres, la hauteur de ceux de ces nombres qui sont rationnels est limitée : mais cette remarque bien simple, si elle permet d'entrevoir la possibilité d'une solution, ne fournit, malheureusement, aucune méthode pour l'obtenir.

Je n'insiste pas davantage sur ces difficultés, qui sont aux frontières du sujet qui nous occupe ; je ne ferai que mentionner d'autres difficultés qui, à mon sens du moins, sont au delà des frontières des Mathématiques. Je fais allusion aux *définitions* telles que la suivante, qu'on peut varier à l'infini : le nombre a est égal à *zéro* si la constante d'Euler C est un nombre algébrique et à *un* dans le cas contraire. En d'autres termes, on fait dépendre la valeur du nombre *défini* d'une certaine éventualité inconnue ; la seule raison pour laquelle on regarde la *définition* comme mathématique est que l'éventualité inconnue est de nature mathématique et que, par suite, le nombre a est susceptible d'une *définition* analytique ; il suffirait d'un peu de patience pour écrire explicitement une formule donnant ce nombre a ; mais cette formule renfermerait plusieurs passages à la limite superposés et ne serait évidemment pas calculable. La *définition* analytique n'a donc aucune valeur mathématique ; elle est simplement la traduction, en un langage plus compliqué, de la *définition* primitive, de sorte qu'on est, de toute façon, ramené à faire dépendre la valeur du nombre a de la solution d'un problème pour le traitement duquel on ne possède aucune méthode régulière. Le fait que ce problème est mathématique me paraît être une circonstance accessoire et il me semble qu'on aurait une définition tout à fait analogue en disant que le nombre a est égal à *zéro* ou à *un*, suivant que le cuivre est ou non un corps composé. Il est, en effet, aussi peu vraisemblable pour les mathématiciens que C soit algébrique, qu'il est peu vraisem-

blable pour les chimistes que le cuivre soit un corps composé ; mais la preuve rigoureuse paraît presque également difficile dans les deux cas [1].

Nous nous en tiendrons donc à la définition des nombres calculables donnée au début de ce paragraphe ; les commentaires dont nous l'avons fait suivre n'avaient comme but que de mettre en évidence les restrictions que comporte une telle définition ; mais ces restrictions n'ont rien d'arbitraire ; elles s'imposent si l'on veut distinguer les mathématiques réelles de spéculations *logiques* purement verbales, dans lesquelles on ne se préoccupe que d'une qualité purement négative : l'absence de contradiction.

III. — Les fonctions calculables et les fonctions à définition asymptotique.

Nous dirons qu'une fonction est calculable, lorsque sa valeur est calculable pour toute valeur calculable de la variable [2]. En d'autres termes, si α est un nombre calculable, on doit savoir calculer la valeur de $f(\alpha)$ à $\frac{1}{n}$ près, quel que soit n. On ne doit pas perdre de vue que,

---

(1) On pourrait objecter à cet exemple, ainsi qu'à tout autre exemple tiré des sciences physiques, les difficultés possibles d'interprétation : la notion de corps simple peut être entièrement modifiée ; la continuité des phénomènes est une autre difficulté qui paraît être très profonde : entre deux alternatives naturelles, il y a toujours place pour le doute : le seul moyen sûr d'échapper au doute est de substituer au phénomène naturel un phénomène au moins en partie conventionnel et artificiel. Par exemple, on ne peut pas parler avec certitude du nombre des petites planètes qui seront découvertes avant le 31 décembre 1920, à minuit (temps de Paris), car une découverte peut avoir lieu précisément à minuit ; et, d'autre part, il peut y avoir doute sur la valeur d'une observation particulière ; mais on peut parler avec précision des découvertes qui auront été annoncées à cette date dans une publication déterminée, si cette publication, par suite de conventions humaines, paraît à des dates régulières telles qu'il ne puisse pas y avoir d'ambiguïté à redouter.

(2) Nous ne parlons que d'une variable pour abréger le langage ; il ne se présente aucune difficulté pour l'extension à n variables ou même à une infinité énumérable, sous certaines restrictions de convergence évidentes.

par définition, donner le nombre calculable α, c'est simplement donner le moyen d'obtenir α avec une approximation arbitraire. Une fonction ne peut donc être calculable que si elle est continue ([1]), au moins pour les valeurs calculables de la variable.

Si l'on donne les valeurs d'une fonction pour les valeurs calculables de la variable et si cette fonction est supposée continue, ses valeurs pour *toutes* les valeurs de la variable sont par cela même *déterminées*. On peut se demander si l'on peut attribuer un sens quelconque à la valeur d'une fonction complètement discontinue pour les valeurs non calculables de la variable, même si cette fonction était continue dans le champ des valeurs calculables. Il semble qu'on doive chercher à écarter, *a priori*, une singularité artificielle analogue à la suivante : une fonction serait égale à x pour x calculable et à x^2 pour x non calculable. En d'autres termes, la valeur de la fonction pour les valeurs non calculables serait égale à la limite d'une certaine fonction continue bien définie pour les valeurs calculables. Une telle convention apparaît, en effet, comme une discontinuité artificielle, analogue à celle qui consisterait à considérer une fonction de la variable complexe z, égale dans tout le plan à z, sauf pour $z = 0$, où sa valeur serait 27 ; on convient généralement de laisser de côté de telles fonctions qui ne posséderaient pas la propriété fondamentale des fonctions analytiques : deux fonctions analytiques qui coïncident dans le voisinage d'un point ont même domaine d'existence et coïncident dans tout ce domaine. De même, il peut sembler naturel de convenir qu'une fonction continue pour toutes les valeurs calculables doit être considérée comme continue pour les valeurs non calculables ; elle est par cela même *définie* pour ces valeurs autant qu'elle peut l'être.

Aux fonctions calculables, on peut opposer *les fonctions à définition asymptotique*. Je propose d'appeler ainsi les fonctions dont la valeur, pour une valeur déterminée de la variable, ne dépend que de la manière dont se comporte *à l'infini* un développement convergent de cette valeur de la variable. C'est là le type qui est le plus éloigné des

---

([1]) Pour que le calcul de la fonction soit effectivement possible à une approximation donnée, il faut, de plus, supposer connue la mesure de la continuité de la fonction, c'est-à-dire l'ordre infinitésimal (au sens généralisé) de la variation de la fonction comparée à la variation de la variable.

fonctions calculables; on pourrait évidemment concevoir des types mixtes : je ne m'y attarderai pas.

Un nombre peut être considéré comme défini par une suite énumérable d'entiers, tels que deux nombres soient infiniment voisins si, pour des valeurs de plus en plus grandes de n, les n premiers entiers de la suite coïncident, pour les deux nombres. On peut supposer que la valeur de la fonction est en partie déterminée par les n premiers entiers, ou, au contraire que, quel que soit n, elle ne dépend pas de ces n premiers entiers; ce sont les deux types extrêmes de la fonction continue et de la fonction à définition purement asymptotique. Pour compliquer encore, on pourrait essayer de ranger les entiers sous la forme d'une suite bien ordonnée correspondant à un nombre transfini de deuxième classe (variable) et admettre que, quel que soit le nombre α de deuxième classe, il est des valeurs de x telles que $f(x)$ ne dépende pas de la valeur des α premiers termes de la suite. Mais bien des réserves seraient à faire sur la légitimité d'une telle définition; je me bornerai aux définitions asymptotiques simples.

La plus classique des fonctions à définition asymptotique est la fonction souvent considérée qui est égale à 0 ou à 1, suivant que la variable x est un nombre rationnel ou irrationnel; nous y reviendrons tout à l'heure. On peut déduire des développements des nombres en fraction décimale ou en fraction continue bien des définitions plus ou moins compliquées, dans lesquelles intervient la loi asymptotique de ces développements. Un tel développement définit une suite énumérable de nombres entiers; on peut considérer, par exemple, une fonction de plusieurs nombres de cette suite dont les rangs varient suivant une certaine loi et envisager la plus grande ou la plus petite limite vers laquelle tend cette fonction, lorsque les rangs des nombres qui y figurent augmentent indéfiniment. C'est là un type déjà très général et qu'on pourrait encore compliquer. Je n'ai pas l'intention d'aborder ici l'étude générale de telles fonctions; je voudrais seulement faire observer que cette étude me paraît être du ressort de la théorie des probabilités. En effet, on ne peut se borner aux valeurs calculables de la variable; et une valeur non calculable ne peut être conçue comme définie que par le hasard; les propriétés de la fonction sont donc représentées par des coefficients de probabilité.

Un cas particulier important est celui où la fonction coïncide avec une fonction continue pour toutes les valeurs non calculables et diffère de cette fonction seulement pour certaines valeurs calculables. Tel est le cas d'une fonction égale, pour x irrationnel, à 1 ou à x et, pour x rationnel, à 0 ou à une fonction déterminée du numérateur et du dénominateur de la fraction irréductible égale à x. Dans ce cas, il est clair que, si un nombre est donné par une série dont on ignore la loi, il y a une probabilité égale à l'unité pour que ce nombre soit irrationnel, et l'on doit, par conséquent, choisir, dans le doute, comme valeur approchée de la fonction, la valeur qui correspond à cette hypothèse, infiniment plus probable que l'hypothèse contraire.

Une fonction à définition asymptotique est parfois immédiatement connue pour un grand nombre de valeurs calculables, lorsque ces valeurs sont données sous une forme particulière qui peut être, suivant les cas, arithmétique, algébrique ou analytique. Par exemple, on peut convenir qu'une fonction de deux variables x et y est nulle, sauf si $x + iy$ est égale à une période d'une fonction $\wp(u, g_2, g_3)$ à invariants rationnels, auquel cas la fonction est égale à 1. Il est clair que, si l'on se donne des nombres rationnels g_2 et g_3, ils définissent certains systèmes de valeurs x et y pour lesquels la fonction est connue. Mais si l'on donne, par une autre voie, un système de nombres x et y, nous ne connaissons actuellement aucun moyen de déterminer la valeur correspondante de la fonction [1]; le problème ainsi posé n'a qu'un rapport assez lointain avec la définition de la fonction : il mérite d'être étudié en lui-même, indépendamment de cette définition. On pourrait concevoir de même des fonctions non calculables à propos desquelles on serait ainsi amené à se poser les problèmes les plus divers; en ce sens, la théorie des fonctions non calculables comprendrait la Science tout entière [2] : c'est une raison sans doute suffisante pour ne pas l'aborder dans sa généralité; nous verrons plus loin sous

---

(1) Nous savons simplement calculer g_2 et g_3 avec une approximation indéfinie; c'est une propriété asymptotique de ces nombres d'être rationnels ou non.

(2) On peut dire en effet : telle fonction est égale à 0 ou à 1 pour $x = 0$, suivant que telle proposition (par exemple le dernier théorème de Fermat) est vraie ou fausse.

quelles conditions certaines fonctions non calculables peuvent être maniées.

IV. — Les ensembles mesurables.

La notion d'ensemble est un cas particulier de la notion générale de fonction; tout ensemble définit une fonction, égale à 0 pour les points de l'ensemble et égale à 1 pour les points qui n'appartiennent pas à l'ensemble. Inversement, toute fonction égale à *zéro* ou à *un* pour les points d'un domaine sépare les points de ce domaine en deux catégories, c'est-à-dire définit deux ensembles complémentaires. Une fonction quelconque définit une courbe, c'est-à-dire un ensemble particulier.

Si une fonction ne prenant que les valeurs 0 et 1 est continue en un point, elle est évidemment constante dans un intervalle contenant ce point; l'étude des fonctions continues conduit donc à celle des ensemble formés d'intervalles, les extrémités de ces intervalles jouant le rôle des points de discontinuité. On peut, d'ailleurs, considérer soit un ensemble E formé d'intervalles, soit l'ensemble E' complémentaire de E, soit enfin combiner les deux modes de formation; nous reviendrons sur ce point.

Je voudrais auparavant faire observer que si l'on applique à la définition des ensembles les remarques faites sur la définition des fonctions et qu'on appelle *bien définis* les ensembles qui correspondent aux fonctions calculables, on voit que les seuls ensembles *bien définis* sont ceux dont la définition peut être obtenue au moyen d'intervalles (additifs ou soustractifs), les *extrémités* des intervalles devant être étudiées à part. Si l'on ne tient pas compte de ces extrémités, on peut dire que l'ensemble est défini à un ensemble dénombrable près ([1]). Relativement aux ensembles énumérables, les difficultés soulevées par leur définition sont différentes suivant qu'ils sont réductibles ou denses dans un intervalle. Le cas le plus simple de l'ensemble réductible est l'ensemble comprenant un seul point a. Si un point x quel-

---

([1]) Cet ensemble est même *effectivement énumérable*, car il est toujours possible, en tenant compte des longueurs et des situations respectives des intervalles, de fixer un ordre précis dans lequel on les supposera rangés.

conque est donné par un procédé quelconque, et si x diffère de a, on s'en apercevra au bout d'un nombre d'opérations fini (mais non connu d'avance); si x coïncide avec a, la démonstration de ce fait ne résultera pas en général d'un calcul d'approximation fini, mais des définitions théoriques de x et de a (*Cf.*, p. 163). L'ensemble formé d'un seul point, serait-ce le point *zéro*, n'est donc pas bien défini en ce sens que le problème de savoir si un nombre donné appartient ou non à l'ensemble peut exiger, soit une infinité d'opérations, soit la résolution d'un problème difficile ou actuellement insoluble. Les difficultés sont plus grandes encore lorsqu'il s'agit d'un ensemble dense, par exemple de l'ensemble des nombres rationnels; étant donné un nombre x défini analytiquement, on ne sait généralement pas reconnaître s'il appartient ou non à l'ensemble ([1]).

Si l'on néglige les ensembles dénombrables, les ensembles *bien définis* sont précisément les ensembles que j'ai appelés autrefois *ensembles mesurables* ([2]). Depuis, M. Lebesgue a donné à ces ensembles le nom d'*ensembles mesurables* B et a considéré d'autres ensembles qu'il a nommés *ensembles mesurables*. J'adopterai cette dernière dénomination de M. Lebesgue, réservant le nom d'ensembles *bien définis*, pour les ensembles que j'avais appelés *mesurables*. La terminologie que j'avais adoptée dans mes *Leçons sur la théorie des fonctions* aurait pu, en effet, avoir l'inconvénient de laisser croire qu'on ne pouvait pas parler de la mesure d'un ensemble ne rentrant pas dans la catégorie des ensembles que j'appelais alors *mesurables* et que j'appelle maintenant *bien définis;* j'ai cependant indiqué, dans ce Livre même, en vertu de quels principes la définition de la mesure pouvait s'étendre à certains ensembles qui n'étaient pas bien définis

---

([1]) En réalité, la difficulté est *la même* pour *tout* ensemble dénombrable, qu'il se compose d'un seul point ou d'une infinité, lorsqu'on envisage le problème dans toute sa généralité, car il est aisé de former une expression analytique y qui s'annule dans le cas où x appartient à l'ensemble dénombrable et dans ce cas seulement. La question de savoir si x appartient à cet ensemble équivaut donc à celle de savoir si y appartient à l'ensemble formé du seul point *zéro*. Mais x peut être calculable et y non calculable; c'est la différence entre les deux cas.

([2]) *Leçons sur la théorie des fonctions*, Chap. III

[c'est-à-dire non mesurables, avec le langage que j'adoptais alors (¹)]; et j'ai indiqué une application de ces principes à un ensemble de mesure nulle (²). Lorsque M. Lebesgue a donné sa définition, il a eu soin de faire observer que tout ensemble mesurable E était compris dans un ensemble bien défini E_1 (*mesurable* B, dans le langage de M. Lebesgue) et comprenait un ensemble bien défini E_2, les ensembles E_1 et E_2 ayant même mesure. Ceci entraîne que la mesure de E est égale à la mesure commune de E_1 et de E_2; la mesure des ensembles mesurables se déduit donc de celle des ensembles bien définis, et la classe des ensembles, dont la mesure peut être déduite de mes définitions primitives, est identique à la classe des ensembles, dont la mesure peut être déduite des définitions de M. Lebesgue. Ce qui différencie la définition de M. Lebesgue de la mienne, ce n'est donc pas l'étendue de la catégorie des ensembles auxquels ces définitions s'appliquent (*voir* ci-dessous, Chap. I, § V), c'est le fait que M. Lebesgue indique une marche théorique pour obtenir la mesure d'un ensemble mesurable défini d'une manière quelconque; tandis que je m'étais occupé seulement d'arriver à la mesure de certains ensembles, en utilisant la définition de ces ensembles qui se présentait naturellement à l'occasion de mes recherches de théorie des fonctions. Je pense que si l'on se place au point de vue que j'ai exposé dans cette Introduction, la plus grande généralité ainsi obtenue par M. Lebesgue est plus apparente que réelle; la théorie de la mesure des ensembles, et aussi celle du calcul des intégrales définies, me paraît pouvoir être exposée d'une manière plus simple et plus élémentaire et, en même temps, aussi réellement générale, en suivant la marche que j'avais primitivement adoptée. C'est le mode d'exposition que je suivrai; il me conduirait

(¹) « Si un ensemble E contient tous les éléments d'un ensemble mesurable E_1 de mesure α, nous pouvons dire que la mesure de E est supérieure à α, sans nous inquiéter si E est mesurable ou non. Inversement, si E_1 contient tous les éléments de E, nous dirons que la mesure de E est inférieure à α. Les mots *supérieure* et *inférieure* n'excluent d'ailleurs pas l'égalité » (*Op. cit.*, p. 48).

(²) « L'ensemble des points de divergence a pour mesure zéro, nous ne sommes pas assurés que cet ensemble soit mesurable; en employant le langage de la page 48, nous devrions dire que la mesure est inférieure ou égale à zéro; mais la mesure n'est jamais négative » (*Op. cit.*, p. 67).

logiquement à passer sous silence les travaux de M. Lebesgue. Mais aucun lecteur ne s'y trompera; sans qu'il soit nécessaire que je redise ici toute l'estime scientifique que j'ai pour M. Lebesgue ([1]), il est évident, pour tous, que ses idées ont réagi sur les miennes et que, même si la définition de l'intégrale que je propose paraît plus simple et plus naturelle, c'est à lui que la Science restera redevable de quelques-uns des progrès les plus essentiels que la théorie des fonctions ait faits dans ces dix dernières années.

CHAPITRE I.

LA THÉORIE DE LA MESURE.

J'adopterai un mode d'exposition synthétique, en ne supposant connues que les parties classiques élémentaires de l'Analyse ([2]); je serai ainsi amené à revenir sur certaines propositions que j'ai déjà démontrées ou énoncées; mais j'en donnerai le plus souvent des démonstrations nouvelles et plus simples.

I. — Le premier théorème fondamental.

La théorie de la mesure est basée sur le théorème suivant, que nous appellerons premier théorème fondamental ([3]).

Si l'on a, sur un segment de droite, une infinité dénombrable d'intervalles, tels que tout point de la droite soit intérieur à au moins l'un d'eux, on peut choisir parmi eux un nombre limité d'in-

---

([1]) Voir mon article de la *Revue générale des Sciences*, t. XX, 1909, p. 315 : *La théorie des ensembles et les progrès récents de la théorie des fonctions.*

([2]) Voir la Préface de mes *Leçons sur la théorie des fonctions.*

([3]) On a donné parfois à ce théorème le nom de théorème de Heine-Borel, en raison de son analogie avec la démonstration donnée par Heine du fait que la continuité est uniforme (*Journal de Crelle*, 1872). Heine n'est d'ailleurs pas le seul à avoir utilisé implicitement ce théorème, dans un cas particulier, longtemps avant qu'il ait été énoncé sous une forme générale. M. Lebesgue a utilisé fré-

tervalles ayant la même propriété. Soit ab le segment donné ; tout point x de ab est, par hypothèse, *intérieur* à un intervalle $a_n b_n$, c'est-à-dire est compris entre a_n et b_n sans coïncider avec ces points ; le point a coïncide avec l'extrémité a_i d'un, au moins, des segments $a_i b_i$ et le point b avec l'extrémité b_j d'un, au moins, des segments $a_j b_j$ (on suppose que les points a, a_n sont respectivement à gauche des points b, b_n).

Cela étant, choisissons parmi les intervalles $a_i b_i$, tels que a_i coïncide avec a, celui pour lequel l'indice i est le moins élevé ; soit $a_{n_1} b_{n_1}$; soit, de même, $a_{n_2} b_{n_2}$ l'intervalle d'indice minimum renfermant le point b_{n_1}, et généralement $a_{n_k} b_{n_k}$ l'intervalle d'indice minimum renfermant $b_{n_{k-1}}$. Je dis qu'on atteint le point b au bout d'un nombre fini d'opérations, c'est-à-dire qu'il existe un nombre fini k tel que b_{n_k} coïncide avec b. Car si les b_{n_k} étaient un nombre infini, ils admettraient un point limite b' (qui pourrait être b) ; à ce point b', correspond un intervalle $a_n b_n$, tel que a_n soit à gauche de b' et b_n à droite de b' (ou coïncidant avec b' si b' est b) ; les b_{n_k} seraient donc compris à partir d'une certaine valeur de k à l'intérieur de l'intervalle $a_n b_n$ et, à partir de ce moment, les n_k devraient nécessairement être pris inférieurs à n, c'est-à-dire seraient en nombre limité.

Il résulte évidemment du théorème fondamental que *s'il est possible d'enfermer tous les points d'un intervalle ab à l'intérieur d'intervalles $a_n b_n$, la longueur totale de ces intervalles est supérieure à la longueur de ab*. C'est cette conséquence du théorème fondamental qui est essentielle dans la théorie de la mesure des ensembles (¹). Si

---

quemment le théorème généralisé dans l'énoncé duquel on supprime le mot *dénombrable*. On a proposé de donner à ce théorème généralisé le nom de *théorème de Borel-Lebesgue*. Voir aux *Comptes rendus* (t. 144, 1907), les Notes de MM. Lebesgue et Schœnflies; l'article de M. Zoretti dans l'*Encyclopédie française* et le livre de M. Paul Montel, *Sur les séries de polynomes*.

(¹) Si l'on admettait les définitions idéalistes, c'est-à-dire si l'on considérait comme donné un ensemble *non dénombrable* d'intervalles, on pourrait observer que la somme des longueurs de ces intervalles dépasse forcément ab, et que par suite, en ce cas, la conséquence est vraie sans que le théorème fondamental soit nécessaire. C'est ainsi que j'avais été conduit, ayant en vue cette conséquence, à introduire l'hypothèse de l'énumérabilité des intervalles dans l'énoncé du théorème fondamental (voir ma *Thèse*).

l'on observe qu'il suffit d'agrandir un intervalle d'une fraction aussi petite qu'on veut de sa longueur, pour que les extrémités de l'intervalle primitif soient intérieures (au sens étroit) à l'intervalle agrandi, on peut donner aussi l'énoncé suivant, parfois plus commode :

Si tout point d'un intervalle ab appartient à l'un au moins des intervalles $a_n b_n$, la somme des longueurs des $a_n b_n$ n'est pas inférieure à la longueur de ab.

Dans ce dernier énoncé, les extrémités d'un intervalle sont considérées comme appartenant à cet intervalle.

II. — La mesure des ensembles bien définis.

Lorsqu'un ensemble est formé d'un seul intervalle, sa mesure n'est pas autre chose que le rapport de sa longueur à la longueur choisie comme unité. Ce rapport est un nombre calculable, si les abscisses des extrémités de l'intervalle, évaluées avec l'unité choisie, sont ellesmêmes des nombres calculables [1].

Par définition, *la mesure d'un ensemble formé d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'intervalles sans points communs est égale à la somme de leurs mesures*. Il résulte du théorème fondamental que, si tous les points de l'ensemble sont intérieurs à un intervalle *ab*, la série qui définit la mesure est convergente et a une somme au plus égale à la mesure de *ab*. Nous choisirons, pour *ab* (*intervalle fondamental*, renfermant tous les ensembles que nous considérons), l'intervalle o — 1, de mesure égale à l'unité.

Il résulte de la définition, et des propriétés élémentaires des séries doubles à termes positifs, que *la mesure d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles sans points communs est égale à la somme de leurs mesures*.

---

[1] On pourrait concevoir un intervalle défini d'une manière telle que sa mesure soit calculable, sans que les abscisses de ses extrémités le soient; il suffit de supposer que ces abscisses sont x_1 et $x_1 + x_2$, x_1 n'étant pas calculable et x_2 étant calculable. Nous exclurons ce cas.

Les deux points précédents subsistent, lorsque les points communs sont en infinité dénombrable.

La mesure n'a été définie jusqu'ici que pour les ensembles formés d'intervalles (en nombre fini ou infini); si un tel ensemble E a pour mesure α, l'ensemble complémentaire par rapport à $0-1$ (l'ensemble des points de $0-1$, qui n'appartiennent pas à E) aura, par définition, pour mesure $1-\alpha$. Plus généralement, si deux ensembles, dont la mesure a été définie, sont tels que tous les points du second appartiennent au premier, *leur différence*, c'est-à-dire l'ensemble des points du premier qui n'appartiennent pas au second *a pour mesure la différence des mesures*. La définition de la mesure d'une somme d'ensembles sans partie commune s'étend aux nouvelles mesures ainsi définies, et la définition de la mesure de la différence s'étend aussi à ces nouvelles mesures; on arrive ainsi à obtenir la mesure de tout ensemble *bien défini* par les procédés même au moyen desquels l'ensemble a pu être bien défini.

J'ai indiqué cette marche dans mes *Leçons sur la théorie des fonctions;* comme j'avais surtout en vue les applications, je me suis contenté d'affirmer que le théorème fondamental, ou des procédés tout à fait analogues à ceux qu'on a employés pour démontrer ce théorème, permettent de justifier ces définitions en prouvant qu'elles ne sont jamais contradictoires entre elles. Mais j'ai omis toute démonstration, car la rédaction détaillée me paraissait devoir être longue et fastidieuse. Cette justification résulte indirectement des travaux de M. Lebesgue, publiés depuis, auxquels je pourrais renvoyer; mais il me semble préférable de développer complètement la théorie en restant au point de vue des définitions constructives; car c'est la forme sous laquelle j'ai été naturellement conduit à ces considérations, à propos de questions qui se sont posées dans mes recherches de théorie des fonctions (notamment dans ma *Thèse*) et c'est aussi la forme sous laquelle les questions se posent dans les applications. J'exposerai cette méthode *constructive* sous deux formes différentes, la première plus analytique et la seconde plus synthétique. La marche analytique est plus longue, mais me paraît être plus instructive; je vais tâcher de la résumer en conservant seulement les points essentiels.

Les deux opérations fondamentales, par lesquelles on construit des

ensembles bien définis au moyen d'intervalles, consistent à faire la somme d'une infinité énumérable d'ensembles déjà définis (sans point commun) et à prendre la différence de deux ensembles (dont l'un contient l'autre). Ces opérations peuvent évidemment être répétées une infinité énumérable de fois; on peut, d'ailleurs, concevoir des opérations qui supposent qu'on ait effectué préalablement une infinité énumérable d'opérations préliminaires, et ainsi de suite. On sait que tous les processus de ce genre sont susceptibles d'une étude générale, qui a été faite pour la première fois par M. Georges Cantor, à l'occasion des dérivés successifs d'un ensemble donné, et qui conduit à la notion des nombres transfinis de la seconde classe. Un nombre transfini de la seconde classe n'est pas autre chose qu'une notation abrégée, pour indiquer l'ordre dans lequel doivent être effectuées une infinité énumérable d'opérations, comportant une infinité énumérable de passages à la limite successifs ou superposés. Par exemple, la notation ω^2 désigne une infinité d'opérations $U_{n,p}$ correspondant aux couples d'entiers positifs n et p, et effectuées dans un ordre tel que l'opération $u_{n',p'}$ précède l'opération $u_{n,p}$ dans le cas où $n' < n$ et aussi dans le cas où $n' = n, p' < p$; l'opération $u_{1,o}$, par exemple, suppose donc effectuées préalablement les opérations $u_{o,p}$ quel que soit p, et fait intervenir les résultats de cette infinité d'opérations.

On doit considérer un nombre transfini comme bien défini, lorsque l'on connaît d'une manière précise l'ordre des opérations correspondantes; il est alors aisé d'indiquer une notation désignant ce nombre. Il est évident que l'ensemble des nombres transfinis qui peuvent être bien définis est dénombrable; mais il n'est pas effectivement énumérable; c'est une des formes du paradoxe du transfini, sur lequel je me suis expliqué ailleurs ([1]). On démontre habituellement que tout ensemble dénombrable bien ordonné définit un nombre transfini; mais il est aisé de voir que la démonstration suppose l'ensemble effectivement énumérable ([2]); en d'autres termes, il faut connaître une correspondance effective entre les éléments de l'ensemble et les entiers positifs; si l'on remplace chaque élément de l'ensemble par l'entier

([1]) *Annales de l'École Normale*, 1908.

([2]) Voir, par exemple, BAIRE, *Leçons sur les fonctions discontinues*.

correspondant, ceci revient à ranger les entiers positifs sous la forme d'un ensemble bien ordonné, semblable à l'ensemble considéré, c'est-à-dire que l'on suppose la connaissance effective de la description des opérations de passage à la limite successives qui correspondent au nombre transfini, c'est-à-dire précisément la connaissance effective de ce nombre transfini.

Cette digression sur les nombres transfinis n'avait point d'autre but que de délimiter exactement la portée de la méthode employée, au point de vue adopté dans ce Mémoire; cette méthode s'étend évidemment à *tous* les nombres transfinis de la seconde classe, pour ceux qui attachent un sens à ces mots; d'autre part, dans l'enseignement élémentaire, l'exposition peut en être simplifiée en se bornant aux opérations d'ordre inférieur à ω^ω (ce qui correspond, dans la théorie des fonctions, aux fonctions de classe finie de M. Baire); cette limitation suffit dans la plupart des applications.

Le problème consiste maintenant, un ensemble bien défini étant construit au moyen d'intervalles par une série d'opérations correspondant à un nombre transfini déterminé, à évaluer la mesure de cet ensemble bien défini à partir de sa construction, et à montrer qu'on ne peut être conduit ainsi à aucune contradiction.

On est ainsi amené à faire la somme d'un certain nombre de séries ayant pour termes les longueurs des intervalles, puis de nouvelles séries ayant pour termes les sommes précédentes ou certaines de leurs différences deux à deux, et ainsi de suite (la notation du nombre transfini précisant ce que veut dire *ainsi de suite*). Bien entendu, les extrémités des intervalles sont définies par des nombres calculables; pour que les opérations qui donnent la mesure puissent être effectuées, il faut que toutes les séries qui interviennent soient convergentes ([1]). De plus, pour que la définition de la mesure ne soit pas contradictoire, il est évidemment nécessaire qu'on soit assuré de trouver deux nombres égaux, si l'on définit la mesure d'un même ensemble E par

---

([1]) Il serait même nécessaire que la *rapidité* de la convergence en fût connue d'une manière précise; nous avons déjà observé que cette exigence devrait être formulée à propos de tous les calculs par séries convergentes; dans la pratique, on se contente habituellement de constater la convergence empiriquement.

deux procédés différents. Or, il résulte de la définition adoptée que, si un ensemble E a pour mesure α, l'ensemble complémentaire (par rapport à $0 - 1$) a pour mesure $1 - \alpha$; si donc on était amené à attribuer à un ensemble E, par deux procédés différents, deux mesures différentes α et β, on serait amené à attribuer à l'ensemble $0 - 1$ les mesures $1 - \alpha + \beta$ et $1 - \beta + \alpha$, nombres dont l'un est supérieur à l'unité [1]. Il suffit donc de faire voir que la définition de la mesure ne peut pas conduire à attribuer à l'ensemble des points compris entre 0 et 1 une mesure supérieure à *un;* la démonstration de ce fait comprendra celle de la convergence des séries à termes positifs qui interviennent dans la définition.

Considérons donc un processus arbitraire, mais bien déterminé, conduisant à la mesure de l'ensemble $(0 - 1)$ par une série d'opérations correspondant à un nombre transfini donné, c'est-à-dire comportant une infinité dénombrable de passages à la limite effectués dans un ordre connu, ces passages à la limite sont donc effectivement énumérables; les opérations comportent, en outre, des soustractions qui ne sont pas des passages à la limite, mais qui sont en quelque sorte enchevêtrées d'une manière arbitraire (mais connue aussi) au milieu de ces passages à la limite. Si nous voulons effectuer le calcul de la mesure avec une approximation donnée, c'est-à-dire en commettant une erreur inférieure à un nombre donné ε, nous sommes conduits à nous donner une série à termes positifs de somme ε

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n + \ldots$$

et à effectuer les opérations de passage à la limite (en infinité énumérable) avec des erreurs respectivement inférieures à $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$; c'est cette marche que nous allons suivre pas à pas.

Nous rencontrons d'abord des ensembles formés par la réunion d'une infinité énumérable d'intervalles sans partie commune; la somme des longueurs d'un nombre fini d'entre eux est évidemment

(1) Les deux procédés de construction qui conduisent aux mesures α et β correspondent, en général, à deux nombres transfinis différents, dont l'un est supérieur à l'autre. Le procédé de construction qui conduirait à attribuer à $0 - 1$ une mesure supérieure à l'unité correspond au plus grand de ces deux nombres.

inférieure à l'unité ; ils forment donc une série convergente, qu'on calculera à ε_j près, en ne conservant qu'un nombre fini de termes. Si l'on prend ensuite la différence des mesures de deux ensembles, dont les mesures sont connues respectivement à ε_j près et à ε_k près, l'erreur sur la différence sera au plus en valeur absolue $\varepsilon_j + \varepsilon_k$.

Avant d'effectuer des opérations sur les ensembles ainsi obtenus par une première application de la méthode de construction, il est utile d'examiner d'un peu plus près la structure de ces ensembles. Considérons d'abord ceux qui sont obtenus par des sommations (sans soustraction).

Chacun d'eux peut être considéré comme formé par la réunion de deux parties : des intervalles en nombre fini (*partie fondamentale*) : des intervalles en nombre infini, dont la somme des longueurs est inférieure à ε_j (*partie complémentaire*). Pour faire la différence de deux tels ensembles dont l'un contient l'autre, on est conduit à faire d'abord la différence des deux parties fondamentales. Il pourra se faire que la partie à retrancher, dont tous les points appartiennent par hypothèse à l'ensemble dont on retranche, n'appartienne pas toute entière à la partie fondamentale de cet ensemble ; mais les points qui n'appartiennent pas à cette partie fondamentale appartiennent à la partie complémentaire ; ils constituent un nombre fini d'intervalles de longueur inférieure à ε_j.

On est ainsi conduit à considérer, comme *la partie fondamentale de l'ensemble-différence*, l'ensemble formé d'un nombre fini d'intervalles qu'on obtient en faisant la différence des deux parties fondamentales, sans tenir compte, au cas où elles existeraient, des portions de la partie soustraite qui seraient à l'extérieur de la partie dont on soustrait. L'ensemble-différence est donc formé d'une partie fondamentale comprenant un nombre fini d'intervalles et d'une partie complémentaire de caractère nouveau, car elle comprend des intervalles additifs et des intervalles soustractifs ; j'insiste un peu sur cette notion nouvelle, car elle est essentielle. Je considère la *somme* des parties complémentaires des ensembles dont on fait la différence (en ne comptant qu'une fois les parties communes), c'est un ensemble dénombrable d'intervalles dont la somme des longueurs est inférieure à $\varepsilon_j + \varepsilon_k$. L'ensemble-différence peut alors être défini comme il suit :

il se compose de la partie fondamentale à laquelle on ajoute ou de laquelle on retranche, d'une manière qu'il ne sera pas nécessaire de préciser davantage, des points appartenant tous à cette partie complémentaire inférieure à $\varepsilon_j + \varepsilon_k$.

Considérons maintenant une infinité d'ensembles ainsi composés chacun d'une partie fondamentale (comprenant un nombre fini d'intervalles) et d'une partie complémentaire $\Sigma \varepsilon_j$ dont les points sont additifs ou soustractifs; les ε_j figurant dans les diverses parties complémentaires sont, bien entendu, tous distincts [1]; je dis tout d'abord que, si l'on considère une infinité de tels ensembles n'ayant deux à deux aucun point commun, la somme des longueurs de leurs parties fondamentales est une série convergente. Ces parties fondamentales peuvent avoir des parties communes; mais ces parties communes sont nécessairement intérieures [2] aux ε_j; la somme des longueurs d'un nombre fini des parties fondamentales est donc au plus égale à l'unité, augmentée de la somme des ε_j; la série est par suite convergente; nous avons, par hypothèse, fait correspondre à l'opération de passage à la limite qu'est la sommation de cette série convergente, un ε, soit ε_k; nous négligerons le reste de cette série convergente en prenant un nombre de termes tels que ce reste soit inférieur à ε_k: et la partie fondamentale de l'ensemble obtenu sera, par définition, la réunion des parties fondamentales, en nombre fini, qui subsistent lorsqu'on néglige ce reste; les autres parties fondamentales seront jointes à l'ensemble des parties complémentaires.

Nous obtenons donc, par un nouveau passage à la limite, un ensemble de même structure que ceux dont nous sommes partis; il est formé d'une partie fondamentale, comprenant un nombre fini d'intervalles, et d'une partie complémentaire consistant en intervalles com-

---

(1) Il n'est pas interdit de faire figurer une infinité de fois un même ensemble dans la définition; mais si un même passage à la limite est ainsi répété une infinité de fois, chacune de ces opérations occupe un rang distinct parmi l'infinité énumérable de toutes les opérations considérées, et il lui correspond par suite, chaque fois, un ε_j d'indice différent.

(2) Il peut même arriver que les parties fondamentales aient en commun plusieurs fois un même intervalle; il doit alors appartenir à plusieurs des ε distincts.

plémentaires $\Sigma \varepsilon_j$, dont les points sont additifs ou soustractifs. Il n'est pas besoin d'insister : la répétition des mêmes opérations conduira toujours à des résultats analogues ; on verra simplement apparaître, à chaque nouveau passage à la limite, un nouveau terme dans $\Sigma \varepsilon_j$: mais cette somme sera toujours inférieure à ε. En définitive, l'ensemble que l'on considère (et qui est actuellement l'ensemble $0 - 1$) est formé d'une partie fondamentale et d'une partie complémentaire inférieure à ε. Du moment que tous les points de l'ensemble $0 - 1$ sont intérieurs, soit aux intervalles de la partie fondamentale, soit aux intervalles de la partie complémentaire, la somme des longueurs de tous ces intervalles est, d'après le théorème fondamental, supérieure à 1 ; donc la mesure de la partie fondamentale est comprise entre $1 - \varepsilon$ et 1.

Mais cette mesure peut aussi être obtenue de proche en proche par les opérations au moyen desquelles on a construit l'ensemble ; la seule difficulté provient de ce que, lorsqu'on réunit des ensembles sans points communs, il peut arriver que leurs parties fondamentales aient des parties communes, si ces parties communes appartiennent par ailleurs à des intervalles d'exclusion négatifs. Mais il suffit, pour écarter cette difficulté, d'observer que les portions parasites ainsi introduites étant certains intervalles complémentaires, leur somme algébrique (car elles peuvent devenir négatives dans les opérations de soustraction) est, au plus, égale à $\Sigma \varepsilon_j$, c'est-à-dire à ε. Le nombre auquel on est conduit, pour la mesure, diffère donc de moins de ε de la mesure de la partie fondamentale : nous avons vu que cette dernière mesure est comprise entre $1 - \varepsilon$ et 1 ; la mesure de l'ensemble $0 - 1$, par le procédé considéré, est donc comprise entre $1 - 2\varepsilon$ et $1 + \varepsilon$; mais cette mesure est un nombre fixe et ε est arbitraire ; ce nombre fixe est donc rigoureusement égal à 1, ce que nous voulions démontrer.

J'ai tenu à exposer d'abord la marche analytique qui me paraît la plus naturelle, et qui a l'avantage de devenir extrêmement simple et élémentaire lorsqu'on se borne à considérer les nombres transfinis inférieurs à ω^ω. L'exposition se trouve en ce cas très simplifiée et met nettement en évidence la structure des ensembles formés.

Lorsqu'on ne limite pas les nombres transfinis qu'on introduit, l'exposition synthétique que je vais maintenant indiquer est plus brève ; la méthode est la même et consiste toujours à déduire les

ensembles nouveaux d'ensembles déja définis ; seulement, au lieu de partir des intervalles et de suivre la construction de proche en proche, on suppose que la construction a été faite jusqu'à un certain point et possède certaines propriétés, et l'on démontre que ces propriétés subsistent lorsqu'on avance d'un pas nouveau.

Nous donnerons le nom de *corps ouvert* d'ensembles à une infinité d'ensembles A ayant les propriétés suivantes :

1° Chaque ensemble A se déduit d'autres ensembles A au moyen des opérations fondamentales (addition d'une infinité énumérable d'ensembles A sans point commun; différence de deux ensembles A dont l'un contient l'autre); on peut ainsi, de proche en proche, ramener chaque ensemble A à être défini à partir des ensembles élémentaires (intervalles).

2° Quel que soit le nombre positif ε, chaque ensemble A peut être regardé comme formé d'une partie fondamentale (nombre fini d'intervalles), à des ensembles près positifs ou négatifs enfermés dans des intervalles d'étendue totale inférieure à ε.

3° On peut faire correspondre à chaque ensemble A un nombre, qu'on appelle *sa mesure*, et qui se déduit des mesures des intervalles par les mêmes opérations constructives au moyen desquelles l'ensemble A se déduit des intervalles (la mesure d'un intervalle est égale à sa longueur). La mesure de la partie fondamentale d'un ensemble A tend vers la mesure de A lorsque ε tend vers zéro. Cette propriété entraîne comme conséquence que, si l'on peut obtenir A de plusieurs manières différentes à partir des intervalles, la valeur de la mesure déduite de ces diverses constructions est la même.

Cela posé, on a le théorème suivant :

Si l'on adjoint à un corps ouvert la différence de deux ensembles A de ce corps dont l'un contient l'autre, ou la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles A du corps (sans parties communes), on obtient un autre corps ouvert [1] *ayant les mêmes propriétés,*

[1] Le *paradoxe du transfini* consiste précisément en ce que, par la répétition indéfinie de ce procédé, on n'obtiendra jamais un corps *fermé*, c'est-à-dire ne pouvant plus être étendu par la répétition des mêmes opérations. Pour les

ce qu'on peut exprimer brièvement en disant que les nouveaux ensembles obtenus sont aussi des ensembles A.

Il est évident que la différence de deux ensembles A est un ensemble A; je dis qu'il en est de même de la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, sans parties communes. Il suffira, en effet, de faire correspondre à chaque A_n un nombre ε_n tel que la série $\Sigma\varepsilon_n$ soit convergente. Soit E_n la partie fondamentale de A_n; la série des mesures des E_n est convergente (car les parties communes aux E_n sont des intervalles dont la somme est, au plus, $\Sigma\varepsilon_n$); on pourra donc choisir n tel que la somme des mesures des E_{n+k} $(k > 0)$ soit inférieure à ε. La réunion de $E_1, E_2, \ldots, E_n$ forme un ensemble analogue E (formé d'un nombre fini d'intervalles); l'ensemble A, réunion des $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, ne diffère donc de E que par des ensembles complémentaires enfermés dans des intervalles au plus égaux à $\varepsilon + \Sigma\varepsilon_n$.

Je dis, de plus, que si l'on a démontré que la mesure de la partie fondamentale de A_n est aussi voisine qu'on veut de la mesure de A_n, la même propriété subsiste pour A. En effet, la mesure de A est, par définition, la somme des mesures des A_n sans parties communes; elle diffère donc aussi peu qu'on veut de la somme des mesures des E_n; mais cette dernière somme ne diffère de la mesure de E que de $\varepsilon + \Sigma\varepsilon_n$, au plus; la différence entre la mesure de E et la mesure de A peut donc être rendue aussi petite qu'on veut. La mesure de A est, par suite, indépendante du procédé particulier par lequel A a été obtenu; elle serait la même, si A était construit au moyen d'autres ensembles du corps ouvert primitif.

---

raisons que j'ai déjà exposées ailleurs (*Annales de l'École Normale*, 1908) et sur lesquelles je ne reviens pas, la conception d'un tel *corps fermé*, bien que n'étant pas contradictoire en soi, ne me paraît pas être une véritable conception mathématique, parce qu'il n'est pas possible de décrire exactement, par un nombre fini de mots, la construction d'un tel corps. D'autre part, on n'aura jamais besoin, dans aucune application, que d'un des corps ouverts que nous avons définis. Pour les mathématiciens qui admettent l'existence de *tous* les nombres transfinis de seconde classe, les considérations du texte permettent, par l'application transfinie du même procédé, d'obtenir *un corps fermé* ayant les mêmes propriétés que les *corps ouverts*.

III. — Le second théorème fondamental.

Les considérations précédentes s'étendent, sans difficulté, au cas de n dimensions [1]. Je vais les énoncer en précisant les définitions.

J'appelle *ensemble élémentaire* l'ensemble des points dont les n coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vérifient les inégalités

$$a_1 \leqq x_1 \leqq b_1; \qquad \ldots, \qquad a_n \leqq x_n \leqq b_n.$$

Sa mesure est le produit

$$(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\ldots(b_n - a_n),$$

la réunion d'un nombre fini d'*ensembles élémentaires* constitue un *domaine simple*.

Les ensembles *bien définis* sont les ensembles qui peuvent être obtenus, à partir des ensembles élémentaires, au moyen des deux opérations fondamentales suivantes indéfiniment répétées :

1° Faire la différence des deux ensembles A et B déjà définis tels que tout point de B appartienne à A

$$\text{(D)} \qquad A - B;$$

2° Faire la somme d'une infinité d'ensembles déjà définis : A_1, A_2, ..., A_n, ..., sans parties communes

$$\text{(S)} \qquad A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots.$$

On peut alors énoncer le théorème suivant, que nous appellerons *second théorème fondamental :*

Étant donnés, dans un domaine borné, un ensemble bien défini quelconque E *et un nombre arbitraire* ε, *on peut trouver un domaine simple* D *tel que l'ensemble des points de* E, *qui n'appartiennent pas à* D, *et l'ensemble des points de* D *qui n'appartiennent pas à* E *puissent être enfermés dans une infinité dénombrable d'ensembles élémentaires, dont la somme des mesures soit inférieure à* ε.

(1) L'extension au cas d'un nombre infini de dimensions est aisée avec les hypothèses de convergence bien connues.

Plus brièvement, *tout ensemble* E *équivaut, à* ε *près, à un domaine simple* D.

Il est quelquefois commode d'adjoindre aux opérations (D) et (S) l'opération (P), qui consiste à prendre la partie commune aux ensembles A et B

$$(\text{P}) \qquad\qquad (\text{A}, \text{B}).$$

Si l'on part du *corps* constitué par l'ensemble des intervalles (qu'on peut supposer à extrémités calculables, pour préciser), il est clair que le résultat de l'opération (P) effectuée sur deux éléments A et B du corps, c'est-à-dire sur deux intervalles, peut être obtenu en appliquant les opérations (D) et (S) à d'autres éléments du corps. Je dis que si cette propriété est vraie pour un corps, elle subsiste lorqu'on étend ce corps en lui adjoignant les résultats des opérations (D) ou (S) effectuées sur ces éléments. Cela est à peu près évident en ce qui concerne (D); détaillons le calcul pour (S); soit

$$\text{A} = \text{A}_1 + \text{A}_2 + \ldots + \text{A}_n + \ldots,$$
$$\text{B} = \text{B}_1 + \text{B}_2 + \ldots + \text{B}_p + \ldots.$$

On a évidemment

$$(\text{A}, \text{B}) = \Sigma\Sigma(\text{A}_n, \text{B}_p).$$

On peut donc adjoindre l'opération (P) aux opérations (D) et (S); on obtiendra toujours des ensembles *bien définis;* mais la mesure de ces ensembles résultera moins directement de leur définition.

IV. — Les ensembles à points multiples.

On sait que si l'on étend à un contour plan fermé C l'intégrale curviligne

$$\text{J} = \frac{1}{2}\int_{\text{C}} x\,dy - y\,dx,$$

on obtient, si C est un contour simple, la valeur, au signe près, de l'aire intérieure à C. Si le contour C a des boucles, la valeur de l'intégrale J est, en général,

$$\text{J} = n\text{S}_n + (n-1)\text{S}_{n-1} + \ldots + \text{S}_1 - \text{S}'_1 - 2\text{S}'_2 - \ldots - p\text{S}'_p,$$

$S_n, S_{n-1}, \ldots, S_1, S'_1, \ldots, S'_p$ étant les sommes des aires de certains des domaines déterminés dans le plan par la courbe C. Chacun des points intérieurs à S_n est ainsi compté n fois.

On est ainsi naturellement conduit à envisager des ensembles, dont chaque point est affecté d'un nombre entier, représentant le nombre de fois que ce point figure dans l'ensemble. Nous nous bornerons au cas où ces nombres entiers sont tous positifs et nous les supposerons de plus, tout d'abord, inférieurs à un nombre fixe N.

Je signale en passant qu'on pourrait, en passant du cas des entiers au cas des nombres commensurables, puis incommensurables, déduire de ceci une théorie élémentaire de l'intégrale définie, au sens de M. Lebesgue; mais je ne m'y attarderai pas. Je vais, d'ailleurs, me borner, pour simplifier le langage, aux ensembles linéaires intérieurs à $0-1$.

Un tel ensemble sera obtenu, comme précédemment, par la réunion d'intervalles; mais les parties communes à deux ou plusieurs intervalles seront considérées comme comptant deux ou plusieurs fois. Nous continuerons à utiliser les opérations (D) et (S); pour ne pas introduire de nombres négatifs, nous ne considérerons que la différence $A - B$ d'ensembles A et B tels que tout point de B figure dans A à un degré de multiplicité au moins égal à celui qu'il a dans B; pour la somme, nous supposerons qu'il peut y avoir des parties communes, le degré de multiplicité de chaque point restant cependant inférieur à N.

Il est manifeste que l'ensemble des points de degré de multiplicité k est *bien défini;* si l'on désigne par σ_k sa mesure, la mesure de l'ensemble considéré est, par définition,

$$\sigma = \sum_1^N k\sigma_k.$$

Or, on a évidemment

$$\Sigma\sigma_k \leqq 1;$$

Il en résulte donc

$$\sigma \leqq N.$$

Si l'on avait $\Sigma\,\sigma_k < s$, il en résulterait $\sigma \leqq Ns$.

Cette inégalité conduit très aisément à un théorème que j'ai

énoncé, il y a plusieurs années [1], et dont je n'avais pas encore publié la démonstration.

Si l'on a dans l'intervalle o — 1 *une infinité dénombrable d'ensembles* (bien définis) E_n *tels que la mesure de chacun d'eux soit supérieure ou égale à* σ, *l'ensemble* E *des points communs à une infinité d'entre eux a une mesure qui n'est pas inférieure à* σ.

L'ensemble E est évidemment bien défini; nous allons montrer que l'hypothèse où sa mesure σ' serait inférieure à σ conduit à une contradiction. Soient, en effet, e_0 l'ensemble des points qui n'appartiennent à aucun des E_i, e_k l'ensemble des points qui appartiennent à k d'entre eux (et n'appartiennent pas à $k+1$); il est clair que tout point de o — 1 appartient à l'un et à un seul des ensembles E, e_0, e_1, ..., e_k, ...; si donc on désigne par σ_k la mesure de e_k, on a

$$\sigma' + \sigma_0 + \sigma_1 + \ldots + \sigma_k + \ldots = 1,$$

la série étant forcément convergente.

Le nombre σ' étant, par hypothèse, inférieur à σ, on peut choisir n assez grand pour qu'on ait

$$\sigma_{n+1} + \sigma_{n+2} + \ldots < \frac{\sigma - \sigma'}{2},$$

et il en résulte

$$\sigma' + \sigma_{n+1} + \sigma_{n+2} + \ldots < \sigma - \frac{\sigma - \sigma'}{2}.$$

Ceci posé, considérons l'ensemble à points multiples $\mathcal{E}$ formé par la réunion de E_1, E_2, ..., E_N; sa mesure est supérieure ou égale à $N\sigma$, puisque la mesure de chacun des E_i est supérieure ou égale à σ. Nous allons évaluer cette mesure par une autre voie. Il est clair que l'ordre de multiplicité d'un point de $\mathcal{E}$ ne peut dépasser N et que cet ordre est, d'autre part, au plus égal à l'ordre de multiplicité du même point dans l'ensemble de *tous* les ensembles E_i (ce dernier ordre pouvant être infini). On aura donc une limite supérieure de la mesure de $\mathcal{E}$, en la calculant comme si tous les points de e_k avaient dans $\mathcal{E}$ un ordre de multiplicité égal à k lorsque k est inférieur à N, et égal à N lorsque

---

[1] *Comptes rendus*, 7 décembre 1903.

k est égal ou supérieur à N, les points de E (d'ordre infini) étant aussi comptés comme d'ordre N dans $\mathcal{E}$. On trouve ainsi que la mesure de $\mathcal{E}$ est au plus égale à

$$\sigma_1 + 2\sigma_2 + \ldots + (N-1)\sigma_{N-1} + N(\sigma_N + \sigma_{N+1} + \ldots + \sigma');$$

mais, si N est supérieur à n, ceci est inférieur à

$$n(\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n) + N(\sigma_{n+1} + \sigma_{n+2} + \ldots + \sigma'),$$

c'est-à-dire à

$$n + N\left(\sigma - \frac{\sigma - \sigma'}{2}\right).$$

Or, n et σ étant fixes, on peut toujours prendre N assez grand pour que cette dernière expression soit inférieure à N σ; l'hypothèse $\sigma' < \sigma$ conduit donc à une contradiction.

Ce théorème conduit fort simplement à une propriété des séries, qui a dû être souvent rencontrée par ceux qui se sont occupés de ces questions, et dont j'ai indiqué une application à la théorie des fonctions, dans la Note que je viens de citer.

Soient une série convergente pour toutes les valeurs de x comprises entre o et 1, et ε_n un nombre positif quelconque. Étant donné un nombre positif $\sigma < 1$, on peut évidemment déterminer un ensemble E_n, de mesure supérieure à σ et tel que, pour tous les points de E_n, il existe un nombre N, tel que les restes de la série de rang égal ou supérieur à N soient inférieurs à ε_n pour tous les points de E_n. En effet, à tout point x correspond un nombre ν, tel que les restes de rang égal ou supérieur à ν soient inférieurs à ε_n; l'ensemble des valeurs de x, correspondant à un nombre donné ν, forment un ensemble e_ν; la somme des mesures de ces ensembles est convergente et égale à 1; on peut donc prendre N assez grand pour que le reste de cette série convergente soit inférieur à $1 - \sigma$.

Ceci étant, donnons-nous des nombres ε_n tendant vers o; à chacun d'eux correspond un ensemble E_n de mesure supérieure à σ; l'ensemble E des points communs à une infinité des E_n a une mesure supérieure à σ; sur l'ensemble E, la série est évidemment uniformément convergente; c'est la proposition dont je voulais parler. Nous en rencontrerons bientôt, par une autre voie encore plus simple, un cas

particulier, dont l'importance me paraît surpasser celle de la proposition générale.

V. — Les ensembles de mesure nulle.

D'après ce qui précède, un ensemble bien défini est de mesure nulle, lorsqu'il peut être enfermé, quelle que soit ε, à l'intérieur d'ensembles élémentaires de mesure totale inférieure à ε. Inversement, tout ensemble qui a cette propriété fait partie d'un ensemble bien défini de mesure nulle ; on ne peut donc lui attribuer une mesure autre que zéro. Cette remarque montre que, si l'on admet qu'il soit possible de considérer des ensembles autres que les ensembles bien définis, il peut exister des ensembles qui soient mesurables, en vertu de mes définitions, sans être bien définis ; ce sont les ensembles qu'on obtient en ajoutant à un ensemble bien défini (de mesure non nulle) une portion *arbitraire* d'un ensemble bien défini de mesure nulle. La classe d'ensembles mesurables ainsi définie est équivalente à la classe d'ensembles que M. Lebesgue appelle *mesurables*; cette remarque a déjà été faite par M. Lebesgue ; si je la rappelle, c'est pour éviter une confusion dont je suis responsable, car elle est la conséquence d'un langage mal choisi ; j'avais appelé *mesurables*, dans mes *Leçons sur la théorie des fonctions*, les ensembles que j'appelle maintenant *bien définis*; M. Lebesgue a donné à ces ensembles le nom de *mesurables* B et l'on a cru parfois que je n'avais pas défini la mesure pour les ensembles que je n'appelais pas mesurables, bien que j'indique dans ce même Ouvrage que, si un ensemble est complètement intérieur à un ensemble mesurable, on devra regarder sa mesure comme inférieure ou égale à celle de l'ensemble mesurable, sans s'inquiéter s'il est mesurable ou non. La mesure ainsi définie sera connue avec précision dans les cas où l'on pourra démontrer à la fois qu'elle est supérieure ou égale et qu'elle est inférieure ou égale à un même nombre ; c'est, en particulier, le cas pour les ensembles faisant partie d'un ensemble bien défini de mesure nulle ; c'est aussi le cas pour tous les ensembles mesurables de M. Lebesgue. Mais je n'insiste pas sur ce point, tenant à me borner aux ensembles bien définis.

Tout ensemble linéaire de mesure nulle est intérieur à l'un des

ensembles de mesure nulle, que j'ai nommés réguliers et qui sont définis au moyen d'une infinité dénombrable de points fondamentaux $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ On définit d'abord un ensemble E_k au moyen d'intervalles entourant chacun des points fondamentaux et dont la somme σ_k est convergente; lorsque k augmente, l'intervalle attaché à un point fondamental quelconque A_n tend régulièrement vers zéro, sans jamais croître; lorsque σ_k tend vers zéro, l'ensemble E_k a pour limite, par définition, un ensemble régulier de mesure nulle. Je n'insisterai pas sur cette théorie, sur laquelle j'ai donné des indications suffisantes dans une Note des *Comptes rendus* (1); l'extension de la théorie de la similitude aux ensembles à plusieurs dimensions appellerait d'ailleurs de nouvelles recherches. Il serait aussi du plus haut intérêt d'approfondir, sans complications inutiles, la théorie des ensembles à plusieurs dimensions, dont les projections sont de mesure nulle, par exemple des ensembles situés dans l'espace, dont les projections sur un plan quelconque sont de mesure nulle. Enfin, je puis signaler comme se rattachant au même ordre d'idées, la classification des ensembles de mesure nulle d'après la loi de décroissance asymptotique des intervalles au moyen desquels on peut les définir (2). Cette classification me paraît devoir être importante dans beaucoup de questions; mais je ne l'utiliserai pas dans ce Mémoire.

CHAPITRE II.

LA DÉFINITION DE L'INTÉGRALE.

Je me bornerai, bien entendu, à la considération des fonctions calculables, avec une restriction cependant, qui est capitale : si une fonction coïncide avec une fonction calculable presque partout, c'est-

(1) *Comptes rendus*, 6 mars 1911.

(2) *Comptes rendus*, 26 février 1912 : *La classsification des ensembles de mesure nulle et la théorie des fonctions monogènes uniformes*.

à-dire en tous les points qui n'appartiennent pas à un certain ensemble de mesure nulle, tout se passera, au point de vue de ses propriétés moyennes, comme si elle était calculable partout. En fait, nous constaterons qu'on peut ramener l'intégration des fonctions calculables à celle des polynomes, qui sont évidemment les plus simples des fonctions calculables.

I. — La définition des fonctions bornées et le troisième théorème fondamental.

Pour définir une fonction, on la considère généralement comme la limite d'une suite de fonctions connues; si l'on part des polynomes, considérés comme connus, on définira ainsi de proche en proche des fonctions de plus en plus compliquées. Un théorème de Weierstrass, dont nous n'aurons pas besoin, apprend que toute fonction continue peut être regardée comme limite vers laquelle tend *uniformément* une suite convergente de polynomes ([1]); ceci prouverait, s'il en était besoin, que les fonctions continues et les limites de fonctions continues et les limites de ces limites, etc. rentrent comme cas particuliers dans l'ensemble des fonctions que nous considérons. Mais il est évident, sans qu'il soit besoin du théorème de Weierstrass, que cet ensemble comprend toutes les fonctions définissables analytiquement, puisque tout procédé de définition analytique se ramène à un processus limite portant sur des fonctions antérieurement définies; et l'on doit remonter ainsi de proche en proche jusqu'à ce qu'on arrive à des fonctions connues; or, les fonctions élémentaires, définies directement (comme les fonctions circulaires par exemple), sont développables en séries entières et sont, par suite, des limites de polynomes.

Considérons donc une fonction $f(x, y, z)$, que nous supposons bornée dans un domaine D; nous dirons que *cette fonction est asymptotiquement équivalente à des polynomes, si à tout groupe de nombres positifs* ε *et* α *on peut faire correspondre un polynome*

$$P(x, y, z; \varepsilon, \alpha),$$

([1]) Voir mes *Leçons sur les fonctions des variables réelles*, Ch. IV.

tel que l'ensemble des points où la valeur absolue de la différence $f - P$ est supérieure à ε, soit de mesure inférieure à α, c'est-à-dire soit intérieur à une infinité dénombrable d'ensembles élémentaires d'étendue totale inférieure à α. Si de plus la fonction est bornée, nous supposerons les polynomes bornés dans leur ensemble.

Le théorème fondamental de la théorie des fonctions bornées est alors le suivant :

Troisième théorème fondamental. — *La limite supposée bornée d'une suite de fonctions bornées asymptotiquement équivalentes à des polynomes est elle-même asymptotiquement équivalente à des polynomes.* En d'autres termes, *toute fonction* |(*bornée*) (¹)| *définissable analytiquement est asymptotiquement équivalente à des polynomes.* Soient, en effet, $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ des fonctions données; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ des nombres positifs, dont la somme $\alpha = \Sigma\alpha_n$ est suffisamment petite; $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ des nombres positifs décroissants et tendant vers zéro. Nous supposons que les fonctions f_n tendent vers une limite f en tout point de l'intervalle dans lequel elles sont définies. La fonction f étant bornée, on peut supposer que les fonctions f_n sont bornées dans leur ensemble. Sinon, on remplacerait par o les valeurs que prend chacune d'elles, lorsqu'elles sont comprises en dehors de l'intervalle $-M-\varepsilon$, $M+\varepsilon$, si f est compris entre $-M$, $+M$; cette opération ne peut, en effet, modifier leur limite; nous raisonnerons sur les nouvelles fonctions f_n qui sont aussi asymptotiquement équivalentes à des polynomes.

A la fonction f_n et aux nombres ε_n et α_n correspond un polynome P_n, tel que la valeur absolue de $f_n - P_n$ soit inférieure à ε_n, sauf peut-être dans un ensemble de mesure α_n. Si donc, on exclut du domaine donné D l'ensemble de mesure au plus égale à α formé par la réunion de ces ensembles de mesure au plus égale à α_n, dans le domaine restant D′, la limite des P_n existera et sera égale à la limite des f_n.

Les polynomes P_n tendant vers une limite, à tout nombre η et à tout point $M(x, y, z)$ de D′ correspond un nombre $N(\eta, M)$, tel que

(¹) Voir, plus bas, § IV, comment les fonctions finies non bornées peuvent être définies comme limites de fonctions bornées.

les relations

$$n \geqq N, \qquad n' \geqq N$$

entraînent

$$(1) \qquad |P_n(x, y, z) - P_n(x, y, z)| < \eta.$$

Lorsque η est donné, il correspondra en général des nombres N différents aux différents points M de D', mais à tout point M correspond une valeur finie de N.

Je désigne l'ensemble $\Delta(N')$ des points M pour lesquels N peut être pris inférieur à N', cet ensemble diffère aussi peu qu'on veut de D', lorsque N' augmente indéfiniment ; s'il n'en était pas ainsi, c'est-à-dire si $\Delta(N')$ n'avait pas pour limite D', lorsque N' augmente indéfiniment, il y aurait dans D' des points n'appartenant à aucun des $\Delta(N')$, ce qui est absurde. On peut donc, étant donné un nombre arbitrairement petit β, faire correspondre à η un nombre N', tel que $\Delta(N')$ diffère de D' de moins de β.

Si nous nous donnons les nombres arbitrairement petits $\alpha + \beta$ et $\eta + \varepsilon_1$, ce qui précède nous montre que le polynome $P_N(x, y, z)$ diffère de moins de $\eta + \varepsilon_1$ de la fonction f, limite de f_n, sauf peut-être dans un ensemble de mesure au plus égale à $\alpha + \beta$. La fonction limite des f_n est donc asymptotiquement équivalente à des polynomes [1].

Remarque. — Chaque inégalité (1) définit un domaine algébrique (un nombre limité d'intervalles dans le cas d'une variable), qui peut être remplacé, si l'on veut, par un domaine simple avec une erreur aussi petite qu'on veut. Les ensembles, dont la mesure intervient dans la démonstration, s'obtiennent au moyen de ces domaines simples ; le calcul de leurs mesures ne présente aucune difficulté.

---

[1] On peut remarquer que, si l'on n'imposait pas aux polynomes la condition d'être bornés dans leur ensemble, la démonstration exigerait seulement que la limite existe, c'est-à-dire que f soit finie, mais non nécessairement que f soit bornée; elle subsisterait pourvu que l'ensemble des points singuliers, où les f_n seraient infinis et où la limite n'existerait pas, soit de mesure nulle.

II. — La définition de l'intégrale des fonctions bornées.

Le troisième théorème fondamental permet de définir d'une manière très simple l'intégrale des fonctions bornées, cette définition fournissant en même temps un procédé de calcul effectif. La marche suivie est exactement la même que pour la mesure des ensembles (Chap. I); les détails dans lesquels nous sommes entrés à cette occasion nous permettront d'être ici plus brefs.

Je suppose connue la définition élémentaire de l'intégration des polynomes et ses propriétés principales, notamment le premier théorème de la moyenne. J'appelle *intégrale élémentaire d'un polynome* l'expression

$$\int_a^x \int_b^y \int_c^z \mathrm{P}(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

L'intégrale définie étendue à un domaine simple s'exprime au moyen d'un nombre fini d'intégrales élémentaires. Occupons-nous d'abord des intégrales élémentaires des fonctions bornées.

Considérons une suite de polynomes $\mathrm{P}_n(x, y, z)$ asymptotiquement convergente dans un domaine D se réduisant à un *ensemble élémentaire* (parallélépipède rectangle), et supposons, en outre, que l'ensemble des polynomes P_n soit borné dans D, c'est-à-dire qu'il existe un nombre M, tel qu'on ait, quel que soit n et quels que soient x, y, z dans D,

$$|\mathrm{P}_n(x, y, z)| < \mathrm{M}.$$

Je dis que la suite des intégrales des P_n est uniformément convergente dans D; nous poserons, a, b, c étant le point de D dont les coordonnées sont les plus petites,

$$\mathrm{Q}_n(x, y, z) = \int_a^x \int_b^y \int_c^z \mathrm{P}_n(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

En effet, étant donnés les nombres ε et α, on peut déterminer N, tel que les inégalités

$$n \geqq \mathrm{N}, \qquad n' \geqq \mathrm{N}$$

entraînent

$$|P_n - P_{n'}| < \varepsilon,$$

sauf au plus dans un ensemble de mesure α.

On a, pour ces mêmes valeurs de n et n',

$$|Q_n - Q_{n'}| < \int_a^x \int_b^y \int_c^z |P_n - P_{n'}|\, dx\, dy\, dz < \varepsilon V + 2\alpha M,$$

V étant le volume de D. Les nombres V et M étant fixes, ε et α arbitrairement petits, la proposition est démontrée. Cette proposition légitime la *définition* suivante : *L'intégrale d'une fonction bornée dans un domaine élémentaire est égale à la limite des intégrales des termes d'une suite bornée de polynomes asymptotiquement convergente vers cette fonction.* Il est clair en effet que si deux suites bornées de polynomes convergent asymptotiquement vers une même fonction, l'ensemble des deux suites (suite obtenue en intercalant les termes successifs de l'une entre les termes de l'autre) est aussi une suite asymptotiquement convergente (car la réunion de deux ensembles de mesure inférieure à ε forme un ensemble de mesure inférieure à 2ε).

Il résulte du théorème de la moyenne et de notre second théorème fondamental que l'intégrale d'une fonction bornée, étendue à un ensemble bien défini quelconque, peut être définie comme égale à la limite de l'intégrale correspondant à un domaine simple, tendant vers cet ensemble bien défini. Car la valeur absolue de l'intégrale étendue à un ensemble élémentaire est au plus égale au produit de la mesure de cet ensemble par une limite supérieure de la valeur absolue de la fonction dans le domaine total considéré. Cette définition ne peut donc conduire à aucune contradiction.

On peut arriver par une autre voie à la définition de l'intégrale d'une fonction bornée dans un domaine D non élémentaire ; il suffit de remplacer les polynomes par d'autres polynomes asymptotiquement équivalents aux premiers dans D et asymptotiquement équivalents à zéro dans le complémentaire de D, par rapport à un domaine parallélépipédique Δ contenant D.

Étant donnés des polynomes P_n et un domaine D, on détermine

aisément des polynomes π_n différant aussi peu qu'on veut des P_n dans D et différant aussi peu qu'on veut de zéro dans la portion de Δ qui n'appartient pas à D (les régions dans lesquelles ces inégalités ne seraient pas vérifiées ayant des mesures inférieures à des nombres ε_n tendant vers zéro avec n).

En résumé, dans le cas d'une variable, toute fonction bornée définissable $f(x)$ est asymptotiquement équivalente à une suite de polynomes $P_n(x)$, suite qui est évidemment asymptotiquement convergente; par définition, l'intégrale indéfinie de $f(x)$ est la fonction continue définie par la suite uniformément convergente des $Q_n(x)$, intégrales des $P_n(x)$. On passe immédiatement de l'intégrale indéfinie à l'intégrale définie dans un domaine simple, puis dans un domaine quelconque au moyen du second théorème fondamental.

La méthode des approximations successives permet de ramener au calcul d'intégrales définies le calcul des solutions des équations différentielles, des équations intégrales et intégro-différentielles; si ces opérations renferment des fonctions bornées bien définies quelconques, on pourra les remplacer par une suite asymptotiquement équivalente de polynomes, c'est-à-dire, lorsqu'on aura fixé une limite de l'approximation qu'on désire obtenir, effectuer seulement les calculs sur des polynomes [1].

---

[1] Dans l'intervalle qui s'est écoulé entre la rédaction de ce Mémoire et son impression ont paru dans les *Comptes rendus* deux Notes sur l'intégration : *Sur quelques points de la théorie des fonctions sommables* par M. Frédéric Riesz (4 mars 1912) et *Sur les propriétés des fonctions mesurables* par M. N. Lusin (17 juin 1912). On trouvera dans ces Notes des renseignements bibliographiques intéressants sur des travaux antérieurs de MM. Weyl, F. Riesz, Egoroff et Lusin. Ce qui me paraît distinguer le point de vue de ces auteurs de celui que j'ai adopté, c'est que la définition de ce que j'appelle la *convergence asymptotique des suites de polynomes* ne repose que sur la mesure des domaines *algébriques* (dans le cas d'une variable, domaines formés d'un nombre *fini* d'intervalles). C'est cette conception nouvelle qui m'a permis d'exposer, d'une manière qui me paraît particulièrement simple, les déductions dont le principe se trouve dans mes premiers travaux sur la mesure et dans ma Note du 7 décembre 1903 (voir plus haut p. 188).

III. — Les propriétés de l'intégrale des fonctions bornées.

Il est manifeste que l'intégrale des fonctions bornées, telle que nous l'avons définie, possède les propriétés les plus importantes de l'intégrale des polynomes. Mais il en est une qu'elle ne peut évidemment posséder : l'intégrale $f(x)$ ne peut définir la fonction intégrée $g(x)$ qu'avec une précision limitée; car deux fonctions, qui ne diffèrent qu'aux points d'un ensemble de mesure nulle, ont la même intégrale (leur différence est asymptotiquement équivalente à une suite de polynomes, dont tous les termes sont identiquement nuls).

On peut se proposer de rechercher la plus simple des fonctions qui admet comme intégrale $f(x)$; cet énoncé a-t-il un sens?

Si $g(x)$ a pour intégrale $f(x)$, on a, quels que soient x_1 et x_2,

$$f(x_2)-f(x_1)=\int_{x_1}^{x_2} g(x)\,dx.$$

La fonction $g(x)$, la plus simple qui satisfasse à cette condition, est évidemment la fonction constante

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

Je n'insisterai pas sur l'étude des fonctions dérivées à laquelle on est ainsi conduit, car je n'aurais rien à ajouter d'essentiel aux beaux résultats de M. Lebesgue, dont le principal me paraît être que la dérivée de $f(x)$ existe, sauf en un ensemble de points de mesure nulle au plus; il semble donc naturel de choisir pour $g(x)$ cette dérivée aux points où elle existe; sa définition aux autres points (pourvu qu'elle reste bornée) ne modifie pas la valeur de l'intégrale ([1]).

([1]) Je signale en corrigeant ces épreuves, deux Notes fort intéressantes de M. Denjoy, où ce jeune savant indique comment on peut résoudre d'une manière complète le problème inverse de la dérivation (intégrations de toutes les fonctions dérivées) (*Comptes rendus*, 1er et 22 avril 1912). Je me permets de signaler aussi la définition de la *dérivée en moyenne*, à laquelle j'ai été conduit par l'étude des fonctions qu'on rencontre dans la mécanique statistique (*Comptes rendus*, 29 avril 1912).

La propriété fondamentale de l'intégrale est de définir ce qu'on peut appeler la valeur moyenne d'une fonction dans un domaine; il faut, pour cela, diviser la valeur de l'intégrale définie par la mesure du domaine. Cette valeur moyenne, lorsqu'on la connaît seule et que le domaine est suffisamment petit, doit être considérée comme la valeur probable de la fonction en un point quelconque, si l'on n'a sur cette fonction aucun autre renseignement. On voit que la considération des intégrales définies prouve que, si les fonctions tant soit peu compliquées ne sont pas calculables, du moins leurs valeurs probables dans un intervalle si petit qu'il soit, mais fini, existent toujours et sont calculables. C'est la raison pour laquelle on peut se borner à considérer les fonctions élémentaires calculables, tant qu'on n'a pas à envisager l'influence spéciale de points de discontinuité où la fonction devient infinie. C'est ce qu'on a fait généralement jusqu'ici dans les applications des mathématiques à la philosophie naturelle ; même dans les théories atomiques où interviennent des discontinuités, ce sont les valeurs moyennes qui jouent un rôle essentiel. Mais il n'est pas certain qu'on ne sera pas conduit à faire intervenir plus explicitement la discontinuité dans l'étude des phénomènes ; c'est ce qui justifie l'étude, que nous allons faire, du cas des fonctions non bornées.

IV. — L'intégration des fonctions non bornées.

Une fonction non bornée peut admettre des points d'infinitude (où sa valeur est $+\infty$ ou $-\infty$) et des points d'indétermination ; si l'ensemble de ces divers points n'était pas de mesure nulle, il est clair qu'on ne pourrait pas calculer l'intégrale de la fonction. Nous supposerons donc cet ensemble de mesure nulle. La fonction non bornée $f(x)$ est donc égale asymptotiquement à la limite de fonctions bornées ; il suffit de considérer une fonction f_n égale à $f(x)$ si $|f(x)| < n$ et à $\pm n$ si $|f(x)| > n$, ou si $f(x)$ est infini ou indéterminé. Les fonctions $f_n(x)$ ont pour limite $f(x)$, sauf aux points d'infinitude ou d'indétermination ; chacune de ces fonctions est bornée et bien définie, si $f(x)$ est défini analytiquement ; on peut donc remplacer $f_n(x)$ par un polynome $P_n(x)$, tel que l'ensemble des $P_n(x)$ soit asymptotique-

ment équivalent à l'ensemble des $f_n(x)$, c'est-à-dire tende vers la limite $f(x)$, en excluant un ensemble de mesure aussi petite qu'on veut. On peut définir l'intégrale de $f(x)$ comme la limite de l'intégrale de $P_n(x)$, si cette limite existe; comme les P_n ne sont pas bornés, nous ne savons pas si cette limite existe. Cette définition est équivalente à la définition de M. Lebesgue.

Nous allons en donner une autre, qui donnera le même résultat quand elles s'appliqueront toutes deux, mais dont le champ d'application est plus étendu. Nous éviterons de considérer les séries divergentes (à somme infinie ou indéterminée); car on ne peut pas limiter l'étendue du domaine de divergence d'une telle série; par exemple, les séries

$$x + x + x + x + x + \ldots,$$
$$x - x + x - x + x - \ldots$$

divergent partout, sauf pour $x = 0$. Nous préférons, pour ce motif, considérer plutôt des séries dont les termes sont eux-mêmes des fonctions non bornées, ces séries étant généralement convergentes.

On sait comment on définit, dans les éléments, l'intégrale d'une fonction non bornée, telle que $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x - c}}$; ou bien

$$f(x) = \frac{1}{x - c} \sin \frac{1}{x - c};$$

on pose :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon = 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon' = 0} \int_{c+\varepsilon'}^b f(x)\,dx.$$

L'intégrale existe, par définition, lorsque les limites existent. J'ai proposé de remplacer cette définition par la suivante; on sait que si l'on pose

$$h_i = x_i - x_{i-1}, \qquad x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i, \qquad x_0 = a, \qquad x_n = b,$$

on a, par définition, n augmentant indéfiniment et les h_i tendant vers zéro,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \sum h_i f(\xi_i).$$

Lorsqu'il y a un point singulier c, on entourera ce point d'un *intervalle d'exclusion*, $c-\varepsilon$, $c+\varepsilon'$, et l'on supposera que les points de division x_i sont tous extérieurs à cet intervalle. Si l'on a

$$x_{i-1} < c-\varepsilon < c+\varepsilon' < x_i,$$

on posera

$$h_i = x_i - (c+\varepsilon') + c - \varepsilon - x_{i-1} = x_i - x_{i-1} - \varepsilon - \varepsilon',$$

et l'on supposera ξ_i compris entre x_{i-1} et $c-\varepsilon$, ou entre $c+\varepsilon'$ et x_i, mais non entre $c-\varepsilon$ et $c+\varepsilon'$.

Si la *somme de Riemann*, ainsi définie, tend vers une limite, quels que soient ε et ε' et si cette limite tend elle-même vers une limite lorsque ε et ε' tendent vers zéro, cette dernière limite est, par définition, l'intégrale.

Il est manifeste que cette modification de la définition est purement formelle, lorsqu'il n'y a qu'un nombre limité de points singuliers; il n'en est pas de même, si les points singuliers sont denses dans un intervalle; il faut d'ailleurs supposer en ce cas, non seulement que chaque intervalle d'exclusion tend vers zéro, mais que leur somme tend aussi vers zéro. On est ainsi conduit à la définition suivante (qui s'étendrait sans changement au cas des intégrales multiples, mais qui, en ce cas, paraît moins utile) :

Soit $f(x)$ une fonction non bornée, non intégrable au sens de Riemann; supposons qu'on puisse déterminer dans le champ d'intégration une infinité énumérable de points $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ ayant la propriété suivante : si l'on entoure le point A_n d'un intervalle d'exclusion $B_n C_n$, tel que la série $\Sigma\, B_n C_n$ soit convergente et de somme ε, les sommes de Riemann généralisées tendent vers une limite, quels que soient les intervalles, et cette limite tend elle-même vers une limite, lorsque ε tend vers zéro; cette dernière limite est, par définition, l'intégrale, au sens de Riemann, généralisée. Les sommes de Riemann généralisées sont les sommes

$$\Sigma h_i f(\xi_i),$$

dans lesquelles on suppose :

1° Que les points de division x_i n'appartiennent pas aux intervalles d'exclusion ;

2° Que h_i est égal à $x_i - x_{i-1}$, diminué, s'il y a lieu, de la longueur des intervalles d'exclusion ;

3° Que ξ_i est situé entre x_{i-1} et x_i, mais n'appartient pas non plus aux intervalles d'exclusion.

On étudie la limite de ces sommes de Riemann dans l'hypothèse que les h_i tendent vers zéro et l'on fait tendre ensuite vers zéro les intervalles d'exclusion.

V. — Comparaison avec l'intégrale de M. Lebesgue.

Il est aisé de voir que, dans le cas des intégrables multiples, la nouvelle définition est équivalente à celle de M. Lebesgue; on sait, en effet, que l'intégrale multiple d'une fonction ne peut converger que si l'intégrale de la valeur absolue converge ; et, dans une somme absolument convergente, l'ordre des termes est indifférent.

Au contraire, dans le cas des intégrales simples, l'intégrale, au sens de M. Lebesgue, ne peut exister que si l'intégrale de la valeur absolue existe, tandis qu'il n'en est pas de même pour l'intégrale au sens de Riemann. Ceci tient, on le sait, à ce que la définition de Riemann conduit, en somme, à une série dont la convergence peut être assurée par l'alternance des signes. Tel est le cas pour la fonction $\frac{\sin x}{x}$ à l'infini ou pour la fonction $\frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ pour $x = 0$.

Il est clair que la propriété d'être intégrable au sens de M. Lebesgue, c'est-à-dire d'avoir une valeur absolue intégrable, étant une propriété plus restrictive, est, par cela même, plus commode à utiliser dans certaines applications, de même que les séries absolument convergentes sont plus aisées à manier que les séries simplement convergentes. Mais ce n'est peut-être pas une raison pour qu'on néglige complètement l'étude des intégrales ou des séries qui ne convergent pas absolument.

Si deux fonctions sont intégrables au sens de Riemann généralisé, et si leur somme est intégrable, l'intégrale de la somme est égale à la somme des intégrales. Mais la somme peut ne pas être intégrable avec notre définition, parce que les intervalles d'exclusion de l'une des fonctions peuvent être, dans des cas particuliers, choisis précisément

de manière à rendre divergente l'intégrale de l'autre fonction. On peut convenir d'étendre la définition et de dire que : si une fonction n'est pas intégrable d'après la définition du paragraphe précédent, mais peut être décomposée en la somme de deux fonctions intégrables d'après cette définition, son intégrale est, par définition, la somme des intégrales de ces fonctions. Pour que cette nouvelle extension de la notion d'intégrale de Riemann généralisée ne soit pas contradictoire, il faut faire voir qu'elle ne peut pas conduire à attribuer deux valeurs différentes à l'intégrale d'une même fonction. Or, c'est ce qui est aisé à démontrer. Soit

$$f = f_1 + f_2 = g_1 + g_2;$$

par hypothèse, les intégrales riemanniennes généralisées de f_1 et de f_2 existent, et aussi celles de g_1 et de g_2. Il s'agit de prouver qu'on a

$$\int f_1\,dx + \int f_2\,dx = \int g_1\,dx + \int g_2\,dx.$$

Désignons respectivement par (A_1), (A_2), (B_1), (B_2) les ensembles de points singuliers qui interviennent dans les définitions des intégrales de f_1, f_2, g_1, g_2. Par définition, à tout nombre ε correspondent des nombres ε_1, ε_2, η_1, η_2, tels que si l'étendue des intervalles d'exclusion correspondant aux (A_1) est inférieure à ε_1, la limite des sommes riemanniennes correspondantes diffère de moins de ε de l'intégrale $\int f_1\,dx$: mais, si l'on excluait, dans le calcul de cette intégrale, des intervalles arbitraires correspondant aux (A_2), (B_1), (B_2), on ne sait pas si la convergence subsisterait. Ce qu'il suffit de faire voir, c'est qu'il est possible de changer infiniment peu la valeur de cette intégrale par un *choix particulier* des intervalles d'exclusion (B_1), ce choix particulier étant assujetti seulement à avoir une étendue inférieure à η_1. Or, cela est évident, car l'intégrale riemannienne généralisée d'une fonction f_1, possède évidemment la propriété fondamentale

$$\int_a^b f_1\,dx = \int_a^c f_1\,dx + \int_c^b f_1\,dx,$$

chacune des intégrales du second membre existant si celle du premier

membre existe. Les intégrales de f_1 dans l'intérieur de chacun des intervalles d'exclusion (B_1) existent donc, et l'on peut prendre chacun de ces intervalles assez petit pour que la valeur correspondante de l'intégrale soit aussi petite qu'on veut.

Il est donc possible de faire un *choix particulier* des intervalles d'exclusion (A_1), (A_2), (B_1), (B_2), tels que chacune des intégrales soit calculée, à moins de 2ε près, lorsqu'on exclut tous ces intervalles; il en résulte que

$$\int f_1\,dx + \int f_2\,dx - \int g_1\,dx - \int g_2\,dx$$

diffère de moins de 8ε de la même expression, où les intégrales seraient étendues seulement au domaine qui subsiste lorsqu'on enlève tous les intervalles d'exclusion ; or, cette expression est alors égale à

$$\int (f_1 + f_2 - g_1 - g_2)\,dx = 0.$$

L'égalité à démontrer est donc vérifiée à 8ε près; elle est donc rigoureusement établie.

Comme exemple de fonctions f_1 et f_2, telles que leur somme ne soit pas directement intégrable alors que chacune d'elles l'est, on peut prendre

$$f_1(x) = \frac{1}{x}\sin\frac{\pi}{x},$$

$$f_2(x) = \sum_1^\infty \frac{e^{-n}}{\sqrt{2-(2n+1)x}}.$$

Si l'on désirait considérer une infinité de fonctions non bornées telles que, non seulement la somme, mais les produits deux à deux de deux fonctions quelconques de l'ensemble appartiennent à l'ensemble, il faudrait partir d'un nombre fini (ou infini) de fonctions telles que chacune soit intégrable ainsi que toutes ses puissances. Tel est le cas des fonctions telles que la suivante :

$$\sum e^{-n} \log\left| x - \frac{1}{n} \right|.$$

On est naturellement conduit par ce qui précède à étudier les séries

généralement convergentes de fonctions non bornées, c'est-à-dire les séries qui convergent presque partout, les portions exclues étant les points singuliers et un certain entourage asymptotique de ces points. C'est en réalité cette étude qui m'avait conduit à considérer, pour la première fois, des ensembles de mesure nulle et à utiliser leurs principales propriétés, étude d'où j'ai déduit ensuite la définition précise de la mesure. Je reviendrai plus bas (Ch. III, § III) sur ce sujet, et sur les conséquences qu'on peut en tirer pour l'étude des fonctions de variables complexes. Je voudrais simplement faire observer ici que si l'on suppose que l'ensemble des points de divergence soit de mesure nulle, le troisième théorème fondamental subsiste, avec cette différence toutefois que, lorsque α tend vers o, les polynomes P_n ne sont pas bornés dans leur ensemble.

On n'est donc pas assuré de l'existence de l'intégrale; il faut effectivement que la fonction ne croisse pas trop vite dans le voisinage des points singuliers. La convergence est assurée, si l'ordre des points singuliers est inférieur à un nombre fixe inférieur à 1; elle peut être réalisée aussi dans certains cas où cet ordre est asymptotique à l'unité (par valeurs inférieures), par exemple, pour la fonction

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n}}{\left(x - \frac{1}{n}\right)^{1-\frac{1}{n}}}.$$

CHAPITRE III.

LE CALCUL EFFECTIF DES INTÉGRALES. APPLICATIONS.

I. — Le calcul par la définition.

Pour qu'une intégrale puisse être effectivement calculée par les méthodes précédentes, il est évidemment nécessaire et suffisant que l'ensemble des points où la fonction à intégrer n'est pas calculable soit de mesure nulle. Ceci pourrait sembler impossible, si l'on con-

sidère qu'une fonction ne peut être calculable que pour les valeurs calculables des variables et que l'ensemble de ces valeurs est de mesure nulle; mais l'on peut regarder une fonction comme calculable pour certaines valeurs non calculables des variables, si l'on sait que, pour ces valeurs, la fonction coïncide avec une fonction continue calculable. A ce point de vue, notre troisième théorème fondamental apparaît comme indispensable : sans ce théorème (ou une proposition équivalente), il serait complètement dénué de sens de parler d'intégrale d'une fonction discontinue, car les opérations par lesquelles pourrait être calculée cette intégrale seraient absolument inexécutables, non seulement au point de vue pratique, mais au point de vue théorique : je veux dire qu'on ne pourrait imaginer aucun moyen, si long fût-il, de les exécuter.

Voici, en nous bornant à une variable pour simplifier l'écriture, comment se pose pratiquement le problème. Une fonction $f(x)$ est définie comme la limite de fonctions connues (ou du moins plus simples) $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$. Nous admettons qu'on sache calculer les intégrales de chacune de ces fonctions avec une approximation donnée. Le problème de l'intégration de $f(x)$ est immédiatement résolu dans le cas où la suite $f_n(x)$ converge uniformément et où l'on a la mesure de cette convergence uniforme. S'il n'en est pas ainsi, on devra tout d'abord chercher à obtenir une limite supérieure M du module de f et des f_n. On cherchera ensuite, au moyen de la démonstration même du fait que f_n tend vers une limite, à déterminer un nombre ε_n supérieur *en général* à $f - f_n$, et l'on désignera par α_n l'étendue du domaine où $f - f_n$ dépasse ε_n; on aura alors

$$\left| \int_a^b f\,dx - \int_a^b f_n\,dx \right| < \alpha_n \mathrm{M} + \varepsilon_n (b - a).$$

On aura une approximation donnée en prenant n assez grand pour que ε_n et α_n soient inférieurs à des nombres fixés, et en calculant l'intégrale de f_n avec une approximation suffisante.

On voit que le calcul sera le plus avantageux possible, si l'on sait s'arranger pour que ε_n et α_n soient sensiblement du même ordre de grandeur. Il est difficile de donner sur ce point des indications générales. Mais les choses se simplifient beaucoup si l'on se borne à la

considération d'une catégorie déterminée de fonctions, même si cette catégorie est très étendue. On pourrait aisément reprendre à ce point de vue l'exposition donnée dans ce Mémoire (voir plus haut Chap. I, § II).

II. — L'emploi des probabilités dénombrables.

Pour calculer certaines intégrales, il est plus commode d'utiliser la notion de probabilité. J'ai montré ailleurs [1] comment on peut évaluer la probabilité pour qu'un nombre x (compris entre 0 et 1) satisfasse à une condition déterminée, ce nombre x étant défini par une infinité dénombrable de conditions simples, dont les probabilités respectives sont connues. Cette théorie se superpose tout à fait à la théorie de la mesure; de même, on pourrait développer une théorie de l'espérance mathématique dans les cas dénombrables qui se superposerait à la théorie de l'intégrale définie. Le premier cas revient à ne s'occuper que de l'intégration des fonctions prenant seulement les valeurs 0 et 1; le problème de l'intégration de ces fonctions est identique au problème de la mesure des ensembles. J'ai indiqué des exemples de calculs de ce genre dans le Mémoire que je viens de citer. Je n'y reviendrai pas; je voudrais seulement signaler brièvement une question qui me paraît intéressante : est-il possible de définir une fonction $f(x)$ qui soit intégrable au moyen des probabilités dénombrables, sans pouvoir être ramenée aux fonctions calculables? Tel serait le cas pour une fonction telle que, dans tout intervalle si petit qu'il soit, les valeurs 0 et 1 seraient également probables. Son intégrale entre les limites 0 et 1 serait alors évidemment égale à $\frac{1}{2}$, tandis que sa valeur, si l'on n'en savait rien de plus que ce que nous venons de dire, ne pourrait être connue pour aucune valeur de la variable (et, en tous cas, quelle que soit sa définition, ne pourrait jamais être connue pour toutes les valeurs, mais seulement au plus pour une infinité dénombrable de valeurs de la variable).

Mais il ne semble pas qu'il soit possible d'arriver, au moyen des probabilités dénombrables, à la définition d'une telle fonction; on se

---

[1] *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 1909, t. XXVII, p. 247 à 271. — Voir aussi *Comptes rendus*, t. 154, 29 avril 1912, p. 1150.

trouve, en effet, soit dans le cas de convergence, soit dans le cas de divergence, et la probabilité limite (désignée par A_∞ dans le Mémoire cité) est égale, suivant le cas, à 0 ou à l'unité, sans avoir jamais une valeur intermédiaire. Il faudrait donc tout au moins compliquer notablement les définitions de ce Mémoire et arriver à définir des probabilités successives dépendant les unes des autres suivant une loi suffisamment compliquée pour que l'on soit à la fois dans le cas de convergence et dans le cas de divergence. Mais cela ne paraît pas aisé.

Ce résultat peut paraître contradictoire avec celui qu'a obtenu M. Lebesgue, qui est arrivé à « nommer » une fonction non définissable analytiquement; mais il faut observer que la fonction de M. Lebesgue ne diffère qu'aux points d'un ensemble de mesure nulle d'une fonction définissable analytiquement; elle est donc équivalente à une telle fonction au point de vue de l'intégration ([1]).

La question peut être posée sous une forme équivalente, peut-être plus saisissante : est-il possible, ou non, de définir avec propriété *asymptotique* des nombres irrationnels, telle que cette propriété et son contraire soient également probables? Par propriété asymptotique on entend, s'il s'agit, par exemple, de nombres décimaux, une propriété dont la définition ne dépend pas des n premières décimales, quel que soit n, c'est-à-dire reste la même pour tous les nombres dans lesquels ces n premières décimales seules diffèrent. On peut dire aussi qu'une propriété asymptotique est entièrement homogène au continu, c'est-à-dire se présente sous la même forme pour deux intervalles égaux se déduisant l'un de l'autre par une translation commensurable. Il me paraît résulter, des considérations développées dans ce Mémoire et de la théorie des probabilités dénombrables, que les seuls ensembles homogènes au continu sont les ensembles de mesure nulle;

([1]) Je laisse ici de côté les objections qu'on peut faire à l'*existence* de la fonction « nommée » par M. Lebesgue. M. Lebesgue indique lui-même la différence qu'il y a entre *nommer* et *définir* une fonction; mais je serais volontiers plus catégorique que lui; partout où interviennent effectivement *tous* les nombres transfinis de seconde classe (et non pas seulement ceux qui sont inférieurs à l'un d'eux fixé d'avance), on me paraît sortir du domaine des Mathématiques. Voir mon article sur *La philosophie des Mathématiques et l'infini* (*Revue du mois*, 10 août 1912).

on ne peut obtenir des ensembles de mesure non nulle qu'en faisant intervenir explicitement certains intervalles, c'est-à-dire que les seuls ensembles de mesure non nulle qui puissent être définis sont mesurables.

Je ne me dissimule pas que les raisons que j'invoque à l'appui de cette conclusion ne paraîtront pas satisfaisantes à tous ; il me semble néanmoins qu'elle s'impose à ceux qui considèrent qu'une définition mathématique doit fournir quelque procédé de calcul.

III. — L'extension de l'intégrale de Cauchy.

Je voudrais, en terminant, dire quelques mots d'une question qui a été, en réalité, l'origine de toutes mes recherches sur la mesure, aussi bien des recherches anciennes qui m'ont conduit à la notion fondamentale d'ensemble mesurable, que des recherches récentes exposées dans ce Mémoire. Cette question est l'étude des séries de fonctions monogènes ayant une infinité de points singuliers denses dans une aire et cependant convergentes en général dans cette aire ; et, par extension, l'étude de fonctions définies *a priori* (au sens de Riemann) et monogènes *en général* dans une aire. Dire qu'une fonction

$$f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$$

est monogène *en général*, c'est dire que l'on peut définir des *domaines d'exclusion* d'étendue aussi petite que l'on veut tels que, dans le domaine restant, les fonctions P et Q admettent des dérivées satisfaisant aux conditions fondamentales de Cauchy :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Le problème de l'étude générale de telles fonctions $f(z)$ exige l'extension des propriétés essentielles des intégrales de Cauchy :

$$\int f(z)\,dz, \quad \int \frac{f(z)\,dz}{z-\zeta}.$$

Je suis arrivé, pour la première fois, à cette extension au moyen de

la théorie de l'intégration développée ci-dessus (voir *Comptes rendus*, 26 février 1912). Depuis, je suis arrivé à un mode d'exposition qui rend cette théorie des fonctions monogènes non analytiques, indépendante des théories nouvelles de l'intégrale définie. C'est ce mode d'exposition que j'adopterai dans le Mémoire détaillé qui paraîtra aux *Acta mathematica*. Mais j'ai tenu à indiquer ici le lien entre ces deux questions, car, pour les géomètres qui sont familiers avec la théorie des ensembles mesurables, le mode d'exposition où l'on utilise cette théorie sera sans doute plus intuitif; ils le reconstitueront sans peine en utilisant mes Notes des *Comptes rendus* déjà citées ainsi que les suivantes : *Les séries de fonctions analytiques et les fonctions quasi analytiques* (3 juin 1912) et *Sur la théorie du potentiel logarithmique* (17 juin 1912). Je me bornerai donc à renvoyer à ces Notes et au Mémoire à paraître dans les *Acta mathematica*.

Théorie géométrique, pour un corps non rigide, des déplacements bien continus, ainsi que des déformations et rotations de ses particules;

PAR J. BOUSSINESQ (1).

Sommaire. — I. Déplacements et déformation d'une particule élémentaire. — II. Existence, dans la particule, d'un trièdre de fibres principales et de feuillets principaux, qui reste rectangulaire. — III. Rotations de ce trièdre et dilatations principales de la particule. — IV. Cas particulier des grandes déformations que n'accompagne aucune rotation de la particule.

I. — Déplacements et déformation d'une particule élémentaire.

1. Soit un corps déformable comprenant une multitude de points matériels, assez rapprochés pour qu'il puisse être censé en posséder un dans toute *situation* (x, y, z) comprise à son intérieur ; et admettons, de plus, que ces points matériels (x, y, z), ainsi distingués les uns des autres par les coordonnées x, y, z de leurs situations *primitives*, viennent à éprouver suivant les axes *fixes* des x, y, z trois *déplacements* respectifs ξ, η, ζ (accroissements de leurs coordonnées), bien définis et *continus*, c'est-à-dire exprimés par des fonctions de x, y, z graduellement variables ou à dérivées partielles premières en x, y, z

(1) Comme il est peu probable que je puisse jamais publier le *Cours sur l'élasticité*, qui a fait plusieurs fois déjà l'objet de mon enseignement à la Sorbonne, il m'a paru utile de résumer ici quelques idées particulièrement élémentaires de sa première Partie, en raison de l'extrême simplicité que j'ai réussi, ce me semble, à leur donner et de la précision, nouvelle (je crois) pour bien des géomètres, à laquelle j'ai amené la notion de la *rotation* des particules que Cauchy appelle leur *rotation moyenne*.

très sensiblement les mêmes dans toute étendue de grandeur un peu perceptible, comme serait celle d'une particule presque microscopique taillée idéalement dans le corps.

Si

$$x' = x + \xi, \qquad y' = y + \eta, \qquad z' = z + \zeta$$

sont les nouvelles cordonnées de l'un, M, de ces points, et

$$x'_1 = x_1 + \xi_1, \qquad y'_1 = y_1 + \eta_1, \qquad z'_1 = z_1 + \zeta_1,$$

celles d'un point, K, *voisin* (appartenant, par exemple, à la même particule), les projections *primitives* $x_1 - x, y_1 - y, z_1 - z$ de la droite MK joignant le point (x, y, z) au point (x_1, y_1, z_1), projections que nous appellerons simplement h, k, l, détermineront entièrement, dans la particule, les *nouvelles* projections de la même droite, $x'_1 - x', y'_1 - y'$, $z'_1 - z'$, que nous appellerons pareillement h', k', l'. Car, à très peu près, l'on aura, par un développement de Taylor évident,

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} h' = h + (\xi_1 - \xi) = h + \dfrac{d\xi}{dx} h + \dfrac{d\xi}{dy} k + \dfrac{d\xi}{dz} l, \\ k' = k + \dfrac{d\eta}{dx} h + \ldots, \qquad l' = l + \dfrac{d\zeta}{dx} h + \ldots. \end{array} \right.$$

Et ces *nouvelles* projections h', k', l' seront bien pareilles pour les droites de jonction de tous les couples de points chez lesquels les premières h, k, l l'étaient, vu la quasi-constance, *dans toute la particule*, des neuf dérivées partielles premières de ξ, η, ζ en x, y, z.

Appelons λ la longueur *primitive* et α, β, γ les trois cosinus directeurs *primitifs* de la droite considérée de jonction MK, de manière à avoir $h = \lambda\alpha$, $k = \lambda\beta$, $l = \lambda\gamma$. Soient, de plus, α', β', γ' les cosinus directeurs de la même droite de jonction *après les déplacements* et ∂ sa *dilatation* (linéaire), c'est-à-dire $1 + \partial$ le rapport, essentiellement positif, de sa nouvelle longueur à λ. Il viendra donc

$$h' = \lambda(1 + \partial)\alpha', \qquad k' = \lambda(1 + \partial)\beta', \qquad l' = \lambda(1 + \partial)\gamma';$$

et les expressions (1) ci-dessus de h', k', l' donneront, pour calculer les nouveaux cosinus directeurs α', β', γ' de la droite, ainsi que sa

dilatation ∂ (positive ou négative), les trois formules fondamentales

$$(2)\quad \begin{cases} (1+\partial)\alpha' = \left(1+\dfrac{d\xi}{dx}\right)\alpha + \dfrac{d\xi}{dy}\beta + \dfrac{d\xi}{dz}\gamma, \\ (1+\partial)\beta' = \dfrac{d\eta}{dx}\alpha + \ldots, \qquad (1+\partial)\gamma' = \dfrac{d\zeta}{dx}\alpha + \ldots. \end{cases}$$

2. La dilatation ∂ et la nouvelle direction $(\alpha', \beta', \gamma')$ de la droite MK ne dépendent donc, dans la particule, que de la direction primitive (α, β, γ). C'est dire que deux droites de la particule primitivement orientées de même ont encore une même orientation après les déplacements et se sont allongées ou accourcies dans un même rapport.

D'où il suit :

1° Que toute *file* ou *fibre* élémentaire, *rectiligne*, de points matériels *reste rectiligne* et se contracte ou se dilate *uniformément;*

2° Que deux fibres voisines primitivement *parallèles* restent indéfiniment voisines et *parallèles*, et qu'elles éprouvent une dilatation ∂ *commune* (positive ou négative);

3° Que tout *feuillet* matériel *plan*, élémentaire, lieu de fibres parallèles croisées par une même fibre droite d'une autre direction, ne cesse pas de comprendre toutes ces fibres et *reste un feuillet plan;*

4° Enfin, que deux pareils feuillets, parallèles avant les déplacements ou comprenant, chacun, de telles fibres respectivement parallèles dans les deux, ne cesseront pas d'être, dans la particule, deux plans matériels *constamment parallèles*.

Cela posé, taillons idéalement la particule en forme de parallélépipède, avec arêtes parallèles à trois fibres intérieures droites MA, MB, MC, émanées (non dans un plan unique) du même point central M (x, y, z); et supposons l'angle trièdre de celles-ci défini par les trois cosinus, compris entre 1 et -1, des angles plans BMC, CMA, AMB (aigus ou obtus). Après les déplacements, ces trois fibres MA, MB, MC auront éprouvé des dilatations que nous appellerons respectivement ∂_a, ∂_b, ∂_c, et les cosinus de leurs angles auront subi des accroissements dits respectivement les *glissements mutuels* des fibres MB et MC, MC et MA, MA et MB, glissements que nous appellerons g_a, g_b, g_c. Il est clair que le parallélépipède, en se déformant, sera

toujours un parallélépipède, à arêtes sans cesse parallèles aux trois fibres intérieures MA, MB, MC; et que son angle solide d'où partiront trois arêtes orientées comme les fibres MA, MB, MC, angle sans cesse égal au trièdre MABC, aura ses changements de forme complètement définis, comme ceux même de MABC, par les trois glissements g_a, g_b, g_c, tandis que ces arêtes du parallélépipède auront éprouvé les trois dilatations ∂_a, ∂_b, ∂_c.

Par conséquent, la figure apparente de la particule, après les déformations, pourra être construite, si l'on donne, outre sa configuration primitive, les *six déformations élémentaires* g_a, g_b, g_c, ∂_a, ∂_b, ∂_c.

5. Mais il y a plus. C'est la configuration *interne*, elle-même, de la particule qui aura son changement défini au moyen des six mêmes déformations g_a, g_b, g_c, ∂_a, ∂_b, ∂_c.

Rapportons, en effet, chaque point matériel, K, de la particule aux trois fibres MA, MB, MC prises comme axes de coordonnées. Soient a, b, c, relativement à ce système d'axes, les trois coordonnées primitives de K. Nous aurons, pour représenter ces coordonnées et, d'abord, c, une fibre JK, parallèle soit à MC, soit à son prolongement en deçà de M, suivant que c est positif ou négatif, et issue d'un point J, du *feuillet* AMB, d'où elle aboutit à la molécule K; puis, pour représenter b, une fibre IJ du feuillet, parallèle de même à MB ou à son prolongement en deçà de M, suivant que b est positif ou négatif, et issue d'un point, I, de la fibre MA (ou de son prolongement en deçà de M), d'où elle va au pied J de la fibre précédente JK; enfin, pour représenter a, la portion MI, positive ou négative, de la fibre MA ou de son prolongement en sens opposé. Les trois fibres élémentaires $a = \text{MI}$, $b = \text{IJ}$, $c = \text{JK}$ auront constamment, dans tous les états successifs de la particule, les directions des axes matériels (à orientations changeantes) MA, MB, MC, dont les angles respectifs BMC, CMA, AMB se trouveront sans cesse déterminés par les accroissements g_a, g_b, g_c de leurs cosinus à partir de l'état primitif. De plus, après les déplacements, les longueurs MI, IJ, JK auront éprouvé les trois dilatations ∂_a, ∂_b, ∂_c; en sorte que les nouvelles coordonnées, a', b', c', du point K, par rapport aux axes matériels mobiles MA, MB, MC, seront

(3) $$a' = a(1 + \partial_a), \qquad b' = b(1 + \partial_b), \qquad c' = c(1 + \partial_c).$$

Quand on aura construit, grâce aux trois données g_a, g_b, g_c, la nouvelle figure de l'angle trièdre MABC dont les arêtes servent sans cesse d'axes, les formules (3) feront donc connaître, pour le point matériel quelconque K (de la particule) à coordonnées primitives a, b, c, ses nouvelles coordonnées a', b', c', qui permettront de rattacher ce point au trièdre et, par suite, de se représenter la configuration complète du corps aux environs de la molécule M.

4. Considérons spécialement les points (a, b, c) de la particule qui constituent, avant les déplacements, une surface matérielle quelconque, par exemple, une *nappe* dont l'équation, $f(a, b, c) = 0$, soit algébrique et de degré n. Après les déplacements ξ, η, ζ, cette nappe aura évidemment pour équation, par rapport au trièdre de référence MABC pris avec sa nouvelle figure, la relation que donne

$$f(a, b, c) = 0$$

par la substitution à a, b, c de leurs valeurs tirées de (3), savoir

$$f\left(\frac{a'}{1+\partial_a}, \frac{b'}{1+\partial_b}, \frac{c'}{1+\partial_c}\right) = 0.$$

La nappe transformée est donc du même degré que la nappe primitive et d'une équation peu différente (de structure). Ainsi, *les déformations subies par toute surface matérielle algébrique tracée dans la particule, lui laissent son degré et une forme analogue à la première.*

Supposons maintenant que cette surface soit, primitivement, l'ellipsoïde

$$\frac{a^2}{\varepsilon^2} + \frac{b^2}{\varepsilon'^2} + \frac{c^2}{\varepsilon''^2} = 1, \tag{4}$$

ayant trois demi-diamètres conjugués, ε, ε', ε'', suivant les fibres (quelconques) MA, MB, MC de la particule. Elle deviendra, après les déplacements,

$$\frac{a'^2}{\varepsilon^2(1+\partial_a)^2} + \frac{b'^2}{\varepsilon'^2(1+\partial_b)^2} + \frac{c'^2}{\varepsilon''^2(1+\partial_c)^2} = 1. \tag{5}$$

Donc, *toute particule taillée en forme d'ellipsoïde reste ellipsoïdale;* et ce sont, *dans ses états* successifs, *les mêmes fibres* qui *constituent ses systèmes de diamètres conjugués.*

En effet, on peut choisir comme état primitif n'importe quel état de la particule, pour passer de celui-là à tout autre; et l'on voit que les fibres constituant un système de diamètres conjugués dans le premier en constituent également un dans tous les autres.

II. — Existence, dans la particule, d'un trièdre de fibres principales et de feuillets principaux, qui reste rectangulaire.

5. Mais donnons désormais à la particule, dans l'état primitif, la forme sphérique, en choisissant $\varepsilon'' = \varepsilon' = \varepsilon$. Tous ses systèmes de diamètres conjugués seront rectangulaires, y compris celui qui, après les déplacements proposés ξ, η, ζ, devient le système des axes de l'ellipsoïde transformé (5). Donc, *le système particulier de fibres rectangulaires qui, dans la particule sphérique, fournit après déformation les axes de l'ellipsoïde, constitue un trièdre trirectangle, dont la figure n'est pas altérée par cette déformation.*

Nous admettrons qu'on ait précisément choisi ces fibres pour MA, MB, MC; et, par définition même, les trois glissements mutuels g_a, g_b, g_c seront nuls, chacune des trois, MA, ou MB, ou MC, étant restée normale aux deux autres et aussi, par suite, au feuillet matériel BMC, ou CMA, ou AMB, qui lui était déjà perpendiculaire avant les déplacements.

Il existe donc, pour toute particule qui subit une déformation *déterminée*, trois directions, rectangulaires entre elles, dites *directions principales*, et rien que trois, généralement, suivant lesquelles les fibres de la particule conservent leur normalité aux feuillets qui leur étaient perpendiculaires avant la déformation. Par suite, celle-ci se fait *symétriquement* de part et d'autre des feuillets en question, de BMC, par exemple. Car si l'on admet, pour fixer les idées, qu'on maintienne le feuillet BMC dans son plan, deux points matériels symétriques K et K_1 situés de part et d'autre, ou dont la fibre de jonction KJK_1 était perpendiculaire au feuillet en son milieu J, se déplaceront sans cesser d'être symétriques, leur droite de jonction KJK_1 conservant sa normalité au feuillet et ses deux moitiés KJ, K_1J se dilatant (ou se contractant) pareillement.

Ainsi, la déformation de la particule se fait toujours symétriquement de part et d'autre de trois certains feuillets rectangulaires, qu'on appellera les *plans principaux*, et qui seront ceux s'intersectant suivant les *fibres principales*.

6. Il était inévitable que les fibres principales émanées de M constituassent les demi-axes de la particule d'abord sphérique et devenue ellipsoïdale. Car, tandis que, dans la sphère, toutes les fibres émanées du centre étaient normales aux feuillets plans menés à leurs extrémités tangentiellement à la particule, les demi-axes de l'ellipsoïde seuls, d'après leur définition même, offriront cette normalité aux feuillets plans qui leur sont sans cesse tangents, et, par conséquent, l'auront seuls conservée : ce qui est justement la propriété caractéristique des fibres principales.

De plus, un tel rayon *normal* à l'ellipsoïde se distingue des autres, obliques, en ce que *sa différentielle*, obtenue en passant de lui à ses voisins, *est nulle*, c'est-à-dire d'un ordre de petitesse supérieur à celui du déplacement de son pied sur la surface ou du changement corrélatif de sa direction. Et comme ici, l'inégalité relative des rayons, tous fibres émanées de M, est due uniquement à la dilatation linéaire ∂ qu'ils ont subie dans la déformation, il en résulte que les *fibres principales* différeront de fibres quelconques émanées de M et définies respectivement par leurs cosinus directeurs primitifs α, β, γ, en ce qu'on aura, *pour elles et pour elles seules*, l'équation $d\partial = 0$, où ∂ désigne la dilatation générale des fibres, exprimée en fonction de α, β, γ, et où α, β, γ varieront infiniment peu de toutes les manières possibles, à partir de leurs valeurs relatives à la fibre principale considérée [1].

---

[1] Le changement de direction et la dilatation de chaque *rayon* matériel émané de M, dans la particule sphérique devenue ellipsoïdale, s'obtiennent aisément, par rapport au trièdre MABC des fibres principales, en combinant deux constructions planes basées sur les formules (3) et que j'ai fait connaître dans un court Mémoire inséré en 1877 au *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (*Sur la construction géométrique des pressions que supportent les divers éléments plans se croisant en un même point d'un corps et sur celle des déformations qui se produisent autour d'un tel point*; t. III, p. 147 à 152). Ces constructions planes rendent immédiate, par exemple, la recherche des

III. — Rotations de ce trièdre et dilatations principales de la particule.

7. Concevons les mouvements effectifs des divers points de la particule rapportés à des axes locaux que nous appellerons *axes des h, k, l*, issus du point mobile M et constamment *parallèles* aux axes généraux *fixes* des x, y, z. Par rapport à de tels axes qu'entraîne la translation du point M ou de la particule, ces mouvements se réduiront évidemment : 1° à celui de *déformation*, censé se faire de part et d'autre des trois plans principaux BMC, CMA, AMB *maintenus, un instant, fixes*, ou propre à donner ainsi *la vraie configuration nouvelle de la particule*, sans se compliquer d'aucune rotation du trièdre MABC qui a ces trois plans pour faces; et, 2° à une *rotation*, autour du sommet M, de la figure du trièdre (lié à la particule), rotation capable d'amener ensuite les trois plans principaux dans leurs directions et situations définitives.

Or, x, y, z étant les coordonnées primitives et ξ, η, ζ les déplacements de M par rapport aux axes fixes, x_1, y_1, z_1 et ξ_1, η_1, ζ_1 les coordonnées et déplacements analogues du point voisin quelconque K,

$$h = x_1 - x, \quad k = y_1 - y, \quad l = z_1 - z \quad \text{et} \quad \xi_1 - \xi, \quad \eta_1 - \eta, \quad \zeta_1 - \zeta$$

étant aussi, par suite, les coordonnées primitives et les déplacements de K par rapport aux axes mobiles, cherchons, en fonction de h, k, l, les expressions que recevront $\xi_1 - \xi$, $\eta_1 - \eta$, $\zeta_1 - \zeta$, pendant ces deux mouvements bien distincts, supposés produits l'un après l'autre.

8. Donnons-nous les trois dilatations principales ∂_1, ∂_2, ∂_3 de la particule, ou dilatations respectives des trois fibres principales MA, MB, MC, ainsi que *leurs* cosinus directeurs (α_1, β_1, γ_1), (α_2, β_2, γ_2), (α_3, β_3, γ_3) par rapport aux x, y, z ou aux h, k, l, cosinus directeurs des fibres MA, MB, MC elles-mêmes, *à orientation constante durant la déformation supposée*.

---

rayons *les plus déviés* et, par suite, celle des fibres qui éprouvent dans la déformation les plus grands glissements relatifs, ou dont les angles mutuels changent le plus.

Entre les deux systèmes de coordonnées primitives a, b, c et h, k, l, nous aurons évidemment les relations

$$a = \alpha_1 h + \beta_1 k + \gamma_1 l, \qquad b = \alpha_2 h + \ldots, \qquad c = \alpha_3 h + \ldots.$$

D'autre part, des relations analogues existent entre les déplacements corrélatifs à la déformation, que nous appelons $\xi_1 - \xi, \eta_1 - \eta, \zeta_1 - \zeta$ suivant les h, k, l et qui, d'après (3), se réduisent, suivant les a, b, c, à $\partial_a a$, $\partial_b b$, $\partial_c c$ ou à $\partial_1 a$, $\partial_2 b$, $\partial_3 c$. Ces relations sont

$$\xi_1 - \xi = \alpha_1 \partial_1 a + \alpha_2 \partial_2 b + \alpha_3 \partial_3 c, \quad \eta_1 - \eta = \beta_1 \partial_1 a + \ldots, \quad \zeta_1 - \zeta = \gamma_1 \partial_1 a + \ldots.$$

Remplaçons, dans celles-ci, a, b, c par leurs valeurs précédentes en h, k, l; et, si nous posons, pour abréger,

$$(6) \quad \begin{cases} A = \alpha_1^2 \partial_1 + \alpha_2^2 \partial_2 + \alpha_3^2 \partial_3, & B = \beta_1^2 \partial_1 + \ldots, & C = \gamma_1^2 \partial_1 + \ldots, \\ D = \beta_1 \gamma_1 \partial_1 + \beta_2 \gamma_2 \partial_2 + \beta_3 \gamma_3 \partial_3, & E = \gamma_1 \alpha_1 \partial_1 + \ldots, & F = \alpha_1 \beta_1 \partial_1 + \ldots, \end{cases}$$

il viendra

$$(7) \quad \xi_1 - \xi = Ah + Fk + El, \quad \eta_1 - \eta = Fh + Bk + El, \quad \zeta_1 - \zeta = Eh + Dk + Cl \text{ [1]}.$$

9. Tels sont les déplacements partiels que produit suivant les h, k, l la déformation *pure*, abstraction faite du changement d'orientation qu'éprouve le trièdre MABC des fibres principales. Il n'y a donc plus, pour avoir les déplacements totaux $\xi_1 - \xi$, $\eta_1 - \eta$, $\zeta_1 - \zeta$, qu'à y joindre ceux qu'engendre la rotation effective de ce trièdre, censée se faire une fois qu'est produite la nouvelle configuration de la particule.

Évaluons ces derniers déplacements partiels, dans l'hypothèse *habi-*

---

[1] Jusqu'ici nos démonstrations et nos formules n'ont nullement supposé petits ni les déplacements, ni les déformations; elles s'appliqueront donc quelque grandes que soient les neuf dérivées partielles de ξ, η, ζ en x, y, z, pourvu toutefois, d'après les relations (7) comparées à (1), que ces dérivées se réduisent à six distinctes, A, B, C, D, E, F, ou qu'elles donnent, dans la particule,

$$\frac{d\eta}{dz} = \frac{d\zeta}{dy}, \quad \frac{d\zeta}{dx} = \frac{d\xi}{dz}, \quad \frac{d\xi}{dy} = \frac{d\eta}{dx};$$

ce qui implique, comme on voit, *déformation pure, sans mélange de rotation*. Mais, à partir du numéro suivant, nos calculs deviendront seulement approchés, et supposeront négligeables les carrés et produits de ces neuf dérivées partielles (censées alors toutes distinctes) à côté de leurs premières puissances. On sait d'ailleurs que la théorie classique se borne à ce cas.

tuelle que *la rotation soit petite* et que *la déformation elle-même de la particule se soit trouvée assez faible pour n'avoir apporté aux coordonnées primitives h, k, l que de très petites altérations relatives* $\xi_1 - \xi$, $\eta_1 - \eta$, $\zeta_1 - \zeta$. Soient alors ω_x, ω_y, ω_z les trois composantes, suivant les x, y, z ou suivant les h, k, l, de la petite rotation effective Ω du trièdre des fibres principales autour de leur point M de croisement. On sait que les accroissements respectifs qui en résulteront, pour les trois coordonnées du point quelconque K (h, k, l) de la particule, seront

$$\omega_y l - \omega_z k, \qquad \omega_z h - \omega_x l, \qquad \omega_x k - \omega_y h. \tag{8}$$

Ceux-ci s'ajoutent donc à (7) pour donner, comme déplacements totaux cherchés, relatifs aux axes mobiles des h, k, l à orientation fixe,

$$\left\{\begin{aligned} \xi_1 - \xi &= \mathrm{A}h + (\mathrm{F} - \omega_z)k + (\mathrm{E} + \omega_y)l, \\ \eta_1 - \eta &= (\mathrm{F} + \omega_z)h + \mathrm{B}k + (\mathrm{D} - \omega_x)l, \\ \zeta_1 - \zeta &= (\mathrm{E} - \omega_y)h + (\mathrm{D} + \omega_x)k + \mathrm{C}l. \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Ils sont les excédents $h' - h$, $k' - k$, $l' - l$ des nouvelles coordonnées des points de la particule, après les déplacements, sur les coordonnées primitives h, k, l; en sorte qu'ils égalent identiquement les derniers membres des formules (1) diminués respectivement de h, k, l. Or leur identification à ceux-ci donne, comme valeurs des neuf dérivées partielles de ξ, η, ζ en x, y, z au centre M de la particule :

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d\xi}{dx} = \mathrm{A}, && \frac{d\xi}{dy} = \mathrm{F} - \omega_z, && \frac{d\xi}{dz} = \mathrm{E} + \omega_y; \\ &\frac{d\eta}{dx} = \mathrm{F} + \omega_z, && \frac{d\eta}{dy} = \mathrm{B}, && \frac{d\eta}{dz} = \mathrm{D} - \omega_x; \\ &\frac{d\zeta}{dx} = \mathrm{E} - \omega_y, && \frac{d\zeta}{dy} = \mathrm{D} + \omega_x, && \frac{d\zeta}{dz} = \mathrm{C}. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

10. Ces relations reviennent à poser :

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d\xi}{dx} = \mathrm{A}, && \frac{d\eta}{dy} = \mathrm{B}, && \frac{d\zeta}{dz} = \mathrm{C}; \\ &\frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy} = 2\mathrm{D}, && \frac{d\zeta}{dx} + \frac{d\xi}{dz} = 2\mathrm{E}, && \frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx} = 2\mathrm{F}; \\ &\frac{d\eta}{dz} - \frac{d\zeta}{dy} = -2\omega_x, && \frac{d\zeta}{dx} - \frac{d\xi}{dz} = -2\omega_y, && \frac{d\xi}{dy} - \frac{d\eta}{dx} = -2\omega_z. \end{aligned}\right. \tag{11}$$

Considérons d'abord les trois dernières formules (11), parce que leur interprétation est immédiate. Elles signifient que les demi-différences, bien connues,

$$(12)\qquad \frac{1}{2}\left(\frac{d\zeta}{dy}-\frac{d\eta}{dz}\right),\quad \frac{1}{2}\left(\frac{d\xi}{dz}-\frac{d\zeta}{dx}\right),\quad \frac{1}{2}\left(\frac{d\eta}{dx}-\frac{d\xi}{dy}\right),$$

appelées par Cauchy *rotations moyennes*, peuvent être nommées simplement les *rotations de la particule* (x, y, z) du corps; car ce sont bien de vraies rotations, des mouvements d'ensemble, autour de M, d'une figure à trois dimensions appartenant à la particule; savoir, les rotations effectives ω_x, ω_y, ω_z du trièdre *géométrique* des fibres principales, *qui a constitué*, en quelque sorte, *la charpente idéale de la particule*, ou comme une substruction résistante formée de plans de symétrie et cachée sous la matière, substruction ou charpente dont la déformation de celle-ci a respecté intégralement les angles et la figure [1].

11. Passons maintenant aux six premières formules (11).

Définissons la déformation de la particule par le moyen des *six* dilatations ou glissements, que nous appellerons ∂_x, ∂_y, ∂_z, g_x, g_y, g_z, de trois fibres, MX, MY, MZ, sensiblement parallèles aux axes généraux des x, y, z : nous les nommerons les *six déformations principales relatives aux* x, y, z. Pour fixer les idées (sans rien changer d'ailleurs aux résultats approchés cherchés ici), supposons ces fibres de la particule rigoureusement parallèles aux x, y, z dans l'état primitif, ou définies par les valeurs respectives $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ des cosinus directeurs α, β, γ; et cherchons, avec leurs *petites* dilatations ∂_x, ∂_y, ∂_z, les variations, censées également petites, de leurs cosinus directeurs.

A cet effet, dégageons d'abord des formules (2) les expressions générales approchées de la *petite* dilatation ∂ d'une fibre *quelconque* et de ses nouveaux cosinus directeurs α', β', γ'. Il suffira, pour avoir ∂, d'ajouter ces trois équations (2), multipliées préalablement par α',

---

[1] Quant au même trièdre, mais *physique*, ou à faces et arêtes *matérialisées* dans les *feuillets* principaux et les *fibres* principales, il a éprouvé les trois dilatations ∂_1, ∂_2, ∂_3.

β', γ', puis d'observer : d'une part, que le cosinus $\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'$ du petit angle des deux directions primitive et finale d'une même fibre se confond très sensiblement avec son maximum 1; d'autre part que, dans les termes du second membre où figurent les neuf petites dérivées de ξ, η, ζ en x, y, z, les facteurs α', β', γ' sont réductibles à α, β, γ. Après quoi, ∂ étant connu, les quotients des formules (2) par $1 + \partial$, ou leurs produits par $1 - \partial$ avec suppression des termes non linéaires, donneront α', β', γ'. On trouve ainsi :

$$(13) \qquad \partial = \frac{d\xi}{dx}\alpha^2 + \frac{d\eta}{dy}\beta^2 + \frac{d\zeta}{dz}\gamma^2 + \left(\frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy}\right)\beta\gamma + \left(\frac{d\zeta}{dx} + \frac{d\xi}{dz}\right)\gamma\alpha + \left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}\right)\alpha\beta,$$

$$(14) \quad \alpha' = \left(1 - \partial + \frac{d\xi}{dx}\right)\alpha + \frac{d\xi}{dy}\beta + \frac{d\xi}{dz}\gamma, \quad \beta' = \frac{d\eta}{dx}\alpha + \ldots, \quad \gamma' = \frac{d\zeta}{dx}\alpha + \ldots$$

Or, l'application de la formule (13) aux trois fibres MX, MY, MZ donne d'abord

$$(15) \qquad \partial_x = \frac{d\xi}{dx}, \qquad \partial_y = \frac{d\eta}{dy}, \qquad \partial_z = \frac{d\zeta}{dz}.$$

Et il résulte ensuite des formules (14), pour les nouveaux cosinus directeurs, par exemple, de MY et MZ,

$$\left(\frac{d\xi}{dy}, 1, \frac{d\zeta}{dy}\right), \quad \left(\frac{d\xi}{dz}, \frac{d\eta}{dz}, 1\right).$$

Le cosinus du nouvel angle YMZ, somme des produits deux à deux de ceux-ci, est donc sensiblement $\frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy}$, alors que le cosinus primitif était nul. L'augmentation de ce cosinus constituant le glissement g_x, auquel g_y et g_z seront analogues, on aura donc

$$(16) \qquad g_x = \frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy}, \qquad g_y = \frac{d\zeta}{dx} + \frac{d\xi}{dz}, \qquad g_z = \frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}.$$

Ainsi, les six premières formules (11) expriment que les trois dilatations linéaires ∂_x, ∂_y, ∂_z, relatives aux axes coordonnés, et les trois demi-glissements corrélatifs $\frac{1}{2}g_x$, $\frac{1}{2}g_y$, $\frac{1}{2}g_z$ sont précisément les six quantités A, B, C, D, E, F, que les formules (6) rattachent d'une

manière simple aux trois dilatations principales ∂_1, ∂_2, ∂_3 et à leurs cosinus directeurs par rapport aux x, y, z.

12. La voie géométrique principalement suivie ici nous a donc fait connaître les six déformations élémentaires ∂_x, ∂_y, ∂_z, g_x, g_y, g_z en fonction des trois dilatations principales ∂_1, ∂_2, ∂_3, censées données en grandeur et en direction. Or, il y a lieu, le plus souvent, de faire l'inverse, c'est-à-dire de chercher les dilatations principales et leurs cosinus directeurs, étant donnés les dilatations A, B, C relatives aux x, y, z et les demi-glissements corrélatifs D, E, F. Terminons ce travail en rappelant la marche à suivre pour cela, d'après le n° 6.

On a vu, à la fin de ce n° 6, qu'il faudra d'abord former l'expression générale de la dilatation ∂ des fibres émanées du centre M de la particule, puis, égaler à zéro sa différentielle totale en α, β, γ pour tous les rapports mutuels possibles de $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$. La formule (13) revient, vu les six premières (11), à

$$(17) \qquad \partial = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + 2D\beta\gamma + 2E\gamma\alpha + 2F\alpha\beta;$$

d'où il résulte, pour les demi-dérivées partielles de ∂ en α, β, γ,

$$(18) \qquad A\alpha + F\beta + E\gamma, \qquad F\alpha + B\beta + D\gamma, \qquad E\alpha + D\beta + C\gamma.$$

Or, comme la relation $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ donne toujours

$$\alpha\, d\alpha + \beta\, d\beta + \gamma\, d\gamma = 0,$$

l'annulation identique de la différentielle totale de ∂, à partir de la direction (α, β, γ) d'une fibre principale, équivaut à écrire l'égalité des trois rapports des demi-dérivées partielles (18) à α, β, γ. Un quatrième rapport égal s'obtient en multipliant ceux-ci, *haut et bas*, par α, β, γ et ajoutant terme à terme; ce qui, vu (17), donne simplement ∂. Enfin, l'égalité à ∂ des trois premiers rapports conduit à écrire, en α, β, γ, les trois équations du premier degré, homogènes,

$$(19) \qquad \begin{cases} (\partial - A)\alpha - F\beta - E\gamma = 0, \\ -F\alpha + (\partial - B)\beta - D\gamma = 0, \\ -E\alpha - D\beta + (\partial - C)\gamma = 0. \end{cases}$$

La compatibilité de celles-ci exigeant l'annulation de leur détermi-

nant, il vient, pour calculer les trois dilatations principales cherchées ∂_1, ∂_2, ∂_3, l'équation en ∂ du troisième degré

$$(20)\quad (\partial-A)(\partial-B)(\partial-C)-D^2(\partial-A)-E^2(\partial-B)-F^2(\partial-C)-2DEF=0.$$

La résolution de cette équation, qu'on sait, par avance, avoir ses trois racines réelles, fera donc connaître les trois dilatations principales ∂_1, ∂_2, ∂_3; après quoi, deux des trois équations (19) devenues ainsi compatibles détermineront les rapports mutuels de α, β, γ et, par suite, la direction (α, β, γ) de la fibre principale qui éprouve la dilatation considérée. On sait déjà que ces trois directions, (α_1, β_1, γ_1), (α_2, β_2, γ_2), (α_3, β_3, γ_3), seront mutuellement rectangulaires.

Le problème actuel, bien moins simple que son inverse traité précédemment, exige donc la résolution de l'équation du troisième degré (20).

13. Le premier membre de celle-ci, (20), ordonné suivant les puissances décroissantes de ∂, c'est-à-dire mis sous la forme

$$\partial^3-(A+B+C)\partial^2+(BC+CA+AB-D^2-E^2-F^2)\partial$$
$$-(ABC-D^2A-E^2B-F^2C+2DEF),$$

est, comme on sait, identique au produit $(\partial-\partial_1)(\partial-\partial_2)(\partial-\partial_3)$, ou à

$$\partial^3-(\partial_1+\partial_2+\partial_3)\partial^2+(\partial_2\partial_3+\partial_3\partial_1+\partial_1\partial_2)\partial-\partial_1\partial_2\partial_3;$$

ce qui donne, entre les trois dilatations principales ∂_1, ∂_2, ∂_3 de la particule et les six déformations élémentaires ∂_x, ∂_y, ∂_z, g_x, g_y, g_z, ou A, B, C, 2D, 2E, 2F, relatives à des x, y, z rectangulaires quelconques, les trois relations, respectivement des premier, deuxième et troisième degrés :

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} &\partial_1+\partial_2+\partial_3=A+B+C,\\ &\partial_2\partial_3+\partial_3\partial_1+\partial_1\partial_2=BC+CA+AB-D^2-E^2-F^2,\\ &\partial_1\partial_2\partial_3=ABC-D^2A-E^2B-F^2C+2DEF.\end{aligned}\right.$$

Les seconds membres de ces relations sont donc, dans la particule, des *invariants* de la déformation, c'est-à-dire des expressions indépendantes des x, y, z choisis. Le premier de ces invariants exprime, comme on sait, la *dilatation cubique* de la particule. Le second, du

deuxième degré, est aussi très important, de même que celui-ci, également du second degré, qui résulte de sa combinaison avec le premier,

$$(22)\quad \partial_1^2+\partial_2^2+\partial_3^2=(\partial_1+\partial_2+\partial_3)^2-2(\partial_2\partial_3+\partial_3\partial_1+\partial_1\partial_2)$$
$$=(A+B+C)^2-2(BC+CA+AB-D^2-E^2-F^2)$$
$$=A^2+B^2+C^2+2(D^2+E^2+F^2).$$

On les vérifie, du reste, en y remplaçant A, B, C, D, E, F par leurs valeurs (6) en fonction des dilatations principales, et en constatant alors que les neuf cosinus directeurs de celles-ci s'éliminent à raison des six relations dues, entre eux, à la rectangularité des deux systèmes d'axes.

Il y a lieu de joindre aux invariants du deuxième degré ci-dessus, un invariant évident, du même degré, concernant, *non plus la déformation* de la particule, mais sa *rotation* Ω : c'est la somme de carrés

$$(23)\qquad \Omega^2=\omega_x^2+\omega_y^2+\omega_z^2.$$

Enfin, si l'on ajoute le double de celui-ci au précédent (22), en remplaçant A, B, C, D, E, F, ω_x, ω_y, ω_z par leurs valeurs tirées de (11), il vient l'invariant *mixte* assez intéressant, toujours du second degré,

$$(24)\quad \partial_1^2+\partial_2^2+\partial_3^2+2\Omega^2=\frac{d\xi^2}{dx^2}+\frac{d\xi^2}{dy^2}+\frac{d\xi^2}{dz^2}$$
$$+\frac{d\eta^2}{dx^2}+\frac{d\eta^2}{dy^2}+\frac{d\eta^2}{dz^2}+\frac{d\zeta^2}{dx^2}+\frac{d\zeta^2}{dy^2}+\frac{d\zeta^2}{dz^2}.$$

IV. — Cas particulier des grandes déformations que n'accompagne aucune rotation de la particule.

14. Il est intéressant de voir la signification simple que prennent, en toute rigueur, les trois directions rectangulaires (α, β, γ), définies par les équations (19), ainsi que les racines ∂ correspondantes de l'équation (20), dans le cas particulier de déformations de la particule aussi grandes qu'on voudra, mais produites de manière que les dérivées premières en x, y, z des déplacements ξ, η, ζ vérifient, dans

cette particule, la triple égalité

$$(25) \qquad \frac{d\eta}{dz} = \frac{d\zeta}{dy}, \qquad \frac{d\zeta}{dx} = \frac{d\xi}{dz}, \qquad \frac{d\xi}{dy} = \frac{d\eta}{dx}.$$

Alors, en appelant respectivement D, E, F ces six dérivées *obliques*, égales deux à deux, et A, B, C les trois dérivées *directes* $\frac{d\xi}{dx}$, $\frac{d\eta}{dy}$, $\frac{d\zeta}{dz}$, il y a bien toujours, comme solutions (α, β, γ) du système (20) et (19), trois directions rectangulaires, savoir, celles des axes de la surface du second degré à centre dont l'équation est

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy = \text{const.}$$

Or, d'autre part, les équations (2) (p. 213), qui déterminent les nouveaux cosinus directeurs (α', β', γ') et la dilatation ∂ d'une fibre quelconque, deviennent

$$(26) \quad (1+\partial)\alpha' = \alpha + (A\alpha + F\beta + E\gamma), \quad (1+\partial)\beta' = \beta + \ldots, \quad (1+\partial)\gamma' = \gamma + \ldots;$$

et si, pour ne rien préjuger sur la signification physique (dans la question) des racines ∂ de (20) qui rendent compatible le système (19), on désigne provisoirement ces racines par ρ, les équations (26) prennent, vu (19), la forme

$$(27) \quad (1+\partial)\alpha' = (1+\rho)\alpha, \qquad (1+\partial)\beta' = (1+\rho)\beta, \qquad (1+\partial)\gamma' = (1+\rho)\gamma,$$

où, le binome $1 + \partial$ étant positif, α', β', γ' ont respectivement mêmes signes et, entre eux, mêmes rapports que $(1+\rho)\alpha$, $(1+\rho)\beta$, $(1+\rho)\gamma$.

13. Il en résulte la proportionnalité de α', β', γ' à α, β, γ. Donc, dans la particule, chacune des trois fibres rectangulaires MA, MB, MC orientées suivant les trois directions (α_1, β_1, γ_1), (α_2, β_2, γ_2), (α_3, β_3, γ_3), a gardé sa direction ou pris la direction contraire. Or, il est impossible qu'une seule des trois ait renversé sa direction; car cette fibre aurait alors percé le feuillet déterminé par le plan des deux autres. D'ailleurs, dans le cas où deux fibres auraient renversé leurs directions, une rotation d'une demi-circonférence autour de la troisième, rotation qu'on peut supposer effectuée par la particule, amènerait ces

deux fibres dans leurs directions premières; et, d'après ce qu'on vient de voir, il n'est pas possible que la troisième fibre se trouve alors renversée. Donc, en résumé, si l'on fait tout au plus abstraction d'une rotation de 180°, on aura $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$, $\gamma' = \gamma$, et les formules (27) donneront alors $\rho = \partial$.

Ainsi, dans une particule où les neuf dérivées partielles de ξ, η, ζ en x, y, z se trouvent réduites à six distinctes par la triple égalité (25), les équations (19) font connaître trois fibres rectangulaires qui gardent leurs directions, malgré les déplacements opérés, si grands qu'ils soient; et, pour chacune d'elles, la racine correspondante ∂ de l'équation (20) exprime la dilatation linéaire subie. Les équations (20) et (19) déterminent donc alors *rigoureusement*, en grandeur et en direction, les trois dilatations principales, quelque grands que soient déplacements et déformations.

En joignant ce résultat à celui qu'exprimaient, au n° **8**, les formules (7), on voit que *les trois relations* (25) *caractérisent parfaitement le fait d'une déformation pure, sans mélange de rotations.*

Il résultera d'ailleurs, évidemment, des équations (19) et (20), pour les fortes déformations *sans rotation*, l'existence des invariants (21), (22) et (24), dans tous les systèmes d'axes rectangulaires des x, y, z.

A ce propos, on remarquera que la *dilatation cubique*, accroissement de volume d'une particule par unité de son volume primitif, peut être obtenue au moyen d'un parallélépipède taillé, dans la particule, suivant les trois feuillets principaux BMC, CMA, AMB, et qu'elle admet, par suite, l'expression

$$(1 + \partial_1)(1 + \partial_2)(1 + \partial_3) - 1 = (\partial_1 + \partial_2 + \partial_3) + (\partial_2\partial_3 + \partial_3\partial_1 + \partial_1\partial_2) + (\partial_1\partial_2\partial_3).$$

Elle sera donc la somme algébrique des trois invariants (21) [1].

---

[1] Le présent Mémoire a été résumé dans une Note insérée aux *Comptes rendus* (t. 154, 15 avril 1912, p. 949).

Sur la propagation des ondes dans les membranes flexibles;

PAR **LOUIS ROY**.

INTRODUCTION.

Une membrane parfaitement flexible est une surface matérielle d'épaisseur infiniment petite, qu'on suppose capable d'éprouver toutes les déformations qui n'altèrent pas sa continuité. Si l'on considère en un point de cette surface un élément d'aire dS, cet élément aura une masse $\rho\, dS$, ρ désignant, par définition, la densité superficielle de la membrane au point considéré.

Si la membrane est partout de même nature, ce que nous supposerons, l'état physique d'un élément de la membrane sera uniquement défini par la densité superficielle ρ de l'élément, par sa température absolue T et son aire dS; la position relative des divers éléments qui constituent la membrane est supposée ne pas intervenir dans la définition de chacun d'eux.

Dans ces conditions, la membrane admettra un potentiel thermodynamique interne Φ qui sera de la forme

$$\Phi = \int \varphi(\rho, T)\, dS,$$

l'intégration s'étendant à la surface entière de la membrane et φ désignant une fonction continue des deux seules variables ρ, T mises en évidence.

Les forces extérieures qui peuvent être appliquées à la membrane seront de deux sortes :

1° Chaque élément linéaire, de longueur ds, du contour de la

membrane sera soumis à une force dont les composantes, suivant les axes de coordonnées ox, oy, oz seront désignées par

$$(T_x, T_y, T_z)\,ds;$$

2° Chaque élément superficiel, d'aire dS, de la membrane, sera soumis à une force dont les composantes suivant les mêmes axes seront désignées par

$$\rho(X, Y, Z)\,dS.$$

Tel est le point de départ qui nous servira à former les équations générales du mouvement et de l'équilibre des membranes.

La recherche des conditions d'équilibre des membranes date de Lagrange, qui a indiqué sommairement comment ces conditions pouvaient être établies ([1]). Cette théorie fut reprise plus tard par Poisson ([2]), puis par Lamé ([3]), et enfin par M. Duhem ([4]), qui lui a donné une forme entièrement satisfaisante en partant des principes de la Thermodynamique générale. Tous ces auteurs se sont bornés à considérer une membrane de température uniforme.

Quant aux équations du mouvement, elles n'ont été établies, jusqu'ici, à notre connaissance, que dans le cas extrêmement particulier des petits mouvements d'une membrane plane uniformément tendue, dénuée de viscosité et de température uniforme et constante. L'équation du mouvement transversal a été obtenue la première, d'abord par Euler ([5]), au moyen de considérations peu rigoureuses; ensuite, par Lagrange et Poisson.

Les équations du mouvement tangentiel n'ont été trouvées que plus tard, d'abord par Poisson, ensuite par Lamé. Mais ces deux derniers géomètres, par ce fait même qu'ils déduisaient les équations des mem-

---

([1]) Lagrange, *Mécanique analytique*, édition 1853, 1re Partie, t. I, section V, Ch. III, § II.

([2]) Poisson, *Mémoire sur les surfaces élastiques*, lu à l'Académie des Sciences le 1er août 1814.

([3]) Lamé, *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*, neuvième leçon.

([4]) P. Duhem, *Hydrodynamique, Élasticité, Acoustique*, t. II, Liv. III, Ch. V, p. 78.

([5]) L. Euler, *Novi Commentarii Academiæ Petropolitanæ*, t. X, p. 247.

branes de celles des plaques élastiques, transportaient dans la théorie des membranes le désaccord qui les séparait dans la théorie de l'élasticité relativement aux deux coefficients λ et μ. Et, en effet, les équations du mouvement tangentiel qu'ils ont données l'un et l'autre diffèrent par la valeur des coefficients. Enfin, M. Duhem, partant de la définition précise de la membrane que nous avons reproduite en commençant, et d'après laquelle une membrane apparaît comme un fluide à deux dimensions dont la continuité ne peut être altérée, a donné à ces équations leur forme définitive [1]. Celle-ci a été adoptée, depuis, par tous les géomètres qui se sont proposés d'étudier les propriétés analytiques des équations des petits mouvements d'une membrane plane.

Mais, comme nous l'avons dit, ces équations supposent en particulier la température uniforme et constante et la viscosité nulle. Or, si le fait de négliger les variations de température est une hypothèse simplificatrice, qui n'a pas plus d'importance restrictive dans le cas actuel que dans le cas des fluides, il en est tout autrement de l'hypothèse qui consiste à supposer la membrane dénuée de viscosité.

Il existe en effet, dans la nature, des fluides, tels que les gaz et les liquides très mobiles, dont le fluide parfait de l'Hydrodynamique constitue une image suffisamment approchée, tandis qu'au contraire toutes les membranes connues présentent une viscosité considérable, qu'on reconnaît très bien à l'amortissement prononcé qu'éprouvent les mouvements qui font varier la densité ; et cette viscosité existe même pour celles qui se rapprochent le plus de la membrane idéale parfaitement flexible comme la membrane de caoutchouc. L'étude des mouvements où la viscosité intervient, faite en partant d'équations qui la négligent, ne peut donc même pas fournir des résultats de première approximation ; et c'est ce qui arrive précisément pour les équations du mouvement tangentiel.

Ainsi, l'étude du mouvement des membranes est incontestablement moins avancée que celle du mouvement des fluides. On sait, en effet, que les géomètres ont abordé depuis longtemps, en Hydrodynamique, l'étude des mouvements finis et recherché l'influence de la viscosité et des variations de température. Les équations les plus géné-

---

[1] P. Duhem, *loc. cit.*, p. 136.

rales obtenues dans ce domaine ont été données récemment par M. Duhem ([1]), qui a proposé une théorie de la viscosité dont les formules renferment, comme cas particulier, celles qu'avaient proposées Navier, Cauchy, Barré de Saint-Venant et Stokes. De plus, M. Duhem a étendu aux fluides réels la théorie de la propagation des ondes, ébauchée par Hugoniot ([2]), précisée et développée par M. Hadamard ([3]) dans le cas des fluides parfaits; et l'on sait que cette théorie, jointe à celle des tourbillons, représente le progrès le plus important fait par l'Hydrodynamique moderne.

Nous nous sommes proposé, dans le présent Mémoire, le même but que M. Duhem en Hydrodynamique, en prenant également comme base les principes de la Thermodynamique générale. Il nous fallait tout d'abord obtenir les équations générales du mouvement des membranes, en tenant compte de la viscosité et des variations de température. C'est ce que nous avons fait dans le Chapitre I, où nous avons traité de la viscosité dans les membranes, en nous inspirant de la théorie générale de la viscosité donnée par M. Duhem ([4]).

Les Chapitres suivants sont exclusivement consacrés à la théorie de la propagation des ondes. Bien des résultats auxquels nous sommes parvenu ont leurs analogues en Hydrodynamique; c'est ce qui arrive chaque fois que la membrane admet un plan tangent unique en chaque point de l'onde et que le vecteur discontinuité se trouve dans ce plan. Mais, si ce vecteur n'est pas contenu dans le plan tangent, les résultats auxquels on parvient sont spéciaux aux membranes. Cela tient à ce qu'en Hydrodynamique on étudie le mouvement d'un milieu continu à trois dimensions dans un espace à trois dimensions: quelle que soit alors l'orientation du vecteur discontinuité, celui-ci se trouve nécessairement dans le milieu étudié. Il n'en est plus de même dans le cas des membranes, puisqu'une membrane est un milieu à deux dimensions, mobile dans un espace à trois dimensions. C'est ce qui

---

([1]) P. Duhem. *Recherches sur l'Hydrodynamique*, Paris, 1903-1904.

([2]) Hugoniot, *Mémoire sur la propagation du mouvement dans un fluide indéfini* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4e série, t. III et IV).

([3]) J. Hadamard. *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'Hydrodynamique*, Paris, 1903.

([4]) P. Duhem. *Théorie thermodynamique de la viscosité, du frottement et des faux équilibres chimiques*, Paris, 1896.

fait, par exemple, qu'une membrane affectée de viscosité peut propager des ondes correspondant à une discontinuité normale à la membrane, tandis que les fluides visqueux n'en propagent pas.

Bien que la membrane dénuée de viscosité nous apparaisse comme une pure abstraction, d'après ce que nous avons dit, nous étudierons néanmoins la propagation des ondes dans les membranes dénuées de viscosité, parce que bien des résultats auxquels nous conduira cette étude correspondent à d'autres résultats obtenus dans l'Hydrodynamique des fluides parfaits.

CHAPITRE I.

LES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT DES MEMBRANES.

§ I. — Préliminaires.

Soient

$$x = f(u, v, t), \qquad y = g(u, v, t), \qquad z = h(u, v, t) \tag{1}$$

les équations de la membrane à l'instant t, (u, v) désignant les coordonnées curvilignes d'un point quelconque M de la membrane, dont les coordonnées cartésiennes rectangulaires par rapport à trois axes fixes sont x, y, z. En employant les variables dites de Lagrange, chaque point matériel de la membrane se trouve, à chaque instant, caractérisé par le même couple de valeurs (u, v) des paramètres, de sorte que, pour suivre un point matériel déterminé dans son mouvement, il faut faire varier t seul dans les équations (1), qui représentent alors la trajectoire de ce point.

Posons, suivant les notations classiques,

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{E} &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = \Sigma x_u'^2, \\ \mathrm{F} &= \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = \Sigma x_u' x_v', \\ \mathrm{G} &= \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = \Sigma x_v'^2, \\ \mathrm{H} &= \sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}; \end{aligned}\right. \tag{2}$$

l'élément linéaire ds relatif aux valeurs $(u, v : u + du, v + dv)$ des paramètres et l'élément d'aire dS correspondant auront pour expressions

$$(3) \qquad \begin{cases} ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \\ dS = H\,du\,dv. \end{cases}$$

Comme les lignes du réseau correspondent toujours aux mêmes lignes matérielles, si le réseau est orthogonal à un instant t_0, il ne le sera généralement plus à un instant $t \neq t_0$, de sorte que nous devons considérer le cas général des coordonnées curvilignes obliques.

A la membrane de forme variable et de contour variable Γ correspond, dans le plan des (u, v), une aire invariable de contour fixe C et dont chaque point, de coordonnées rectangulaires (u, v), est l'image du point de la membrane qui a pour coordonnées curvilignes (u, v). Nous supposerons la correspondance univoque entre les points de l'aire et ceux de la membrane. A un élément ds de Γ dont l'expression est donnée par la première des égalités (3), correspond un élément $d\sigma$ de C tel que

$$d\sigma^2 = du^2 + dv^2.$$

Dès lors, α, β désignant les cosinus directeurs de la normale extérieure menée au contour C en un point de l'élément $d\sigma$, on aura

$$du = \mp \beta\,d\sigma, \qquad dv = \pm \alpha\,d\sigma,$$

le signe à prendre dépendant de la position du point $(u + du, v + dv)$ par rapport au point (u, v), et il viendra

$$ds = k\,d\sigma,$$

en posant

$$(4) \qquad k = \sqrt{G\alpha^2 - 2F\alpha\beta + E\beta^2}.$$

Le contour Γ n'est, en somme, qu'une courbe particulière tracée sur la membrane ; considérons, maintenant, une courbe quelconque γ à laquelle correspond, dans le plan des (u, v), une image c. Nous nous proposons de calculer les cosinus directeurs a, b, c de la demi-normale $\mathrm{M}n$ à la courbe γ, menée en un point M de cette courbe dans le plan tangent en M à la membrane et dans un sens tel qu'il corres-

ponde à celui d'une demi-normale de cosinus directeurs α, β menée à la courbe c au point m image de M.

Soit M′ un autre point de la demi-normale Mn de coordonnnées $x+dx, y+dy, z+dz$, et correspondant aux valeurs $(u+du, v+dv)$ des paramètres (u, v). En appelant dn sa distance au point M, on aura

(5) $$a = \frac{dx}{dn} = \frac{x'_u\,du + y'_v\,dv}{\sqrt{\mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2}},$$

avec des expressions analogues pour b et c. Exprimons que l'élément dn est normal à γ. Pour cela, soient $x+\mathrm{D}x$, $y+\mathrm{D}y$, $z+\mathrm{D}z$ les coordonnées d'un point M″ de γ voisin de M ; on devra avoir

$$\Sigma\,\mathrm{D}x\,dx = 0.$$

Mais, le long de γ, u et v sont fonctions d'un même paramètre ω, de sorte que, si $\omega + \mathrm{D}\omega$ est la valeur de ce paramètre au point M″, on aura

$$\mathrm{D}x = \left(x'_u\frac{\partial u}{\partial\omega} + x'_v\frac{\partial v}{\partial\omega}\right)\mathrm{D}\omega,$$

et l'égalité précédente deviendra

$$\sum\left(x'_u\frac{\partial u}{\partial\omega} + x'_v\frac{\partial v}{\partial\omega}\right)(x'_u\,du + x'_v\,dv) = 0.$$

Or, soient $(u+\mathrm{D}u, v+\mathrm{D}v)$ les coordonnées du point m'' image de M″ ; on a la condition de perpendicularité

$$\alpha\mathrm{D}u + \beta\mathrm{D}v = 0,$$

ou

$$\alpha\frac{\partial u}{\partial\omega} + \beta\frac{\partial v}{\partial\omega} = 0.$$

La condition de perpendicularité peut donc s'écrire

$$\Sigma(\beta x'_u - \alpha x'_v)(x'_u\,du + x'_v\,dv) = 0,$$

d'où nous déduisons

$$\frac{du}{\mathrm{G}\alpha - \mathrm{F}\beta} = \frac{dv}{-\mathrm{F}\alpha + \mathrm{E}\beta}.$$

Si nous remplaçons alors, dans la formule (5), du et dv par leurs

quantités proportionnelles, il viendra

$$a = \pm \frac{x'_u(G\alpha - F\beta) + x'_v(-F\alpha + E\beta)}{H\sqrt{G\alpha^2 - 2F\alpha\beta + E\beta^2}}.$$

Pour choisir le signe, il suffit de remarquer que si les équations de la membrane se réduisent à $x = u$, $y = v$, $z = 0$, celle-ci peut être amenée à coïncider avec son image et, par suite, la courbe γ avec son image c : on devra avoir ainsi $a = \alpha$. Il faut donc prendre le signe $+$, et l'on a, en définitive, en tenant compte de la formule (4),

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} a &= \frac{x'_u(G\alpha - F\beta) + x'_v(-F\alpha + E\beta)}{kH},\\ b &= \frac{y'_u(G\alpha - F\beta) + y'_v(-F\alpha + E\beta)}{kH},\\ c &= \frac{z'_u(G\alpha - F\beta) + z'_v(-F\alpha + E\beta)}{kH}. \end{aligned}\right.$$

Les formules ci-dessus vont nous fournir presque immédiatement la valeur de la dérivée d'une fonction de point suivant la normale Mn ; cette dérivée a pour expression générale

$$(7)\qquad \frac{d}{dn} = \frac{\partial}{\partial u}\frac{du}{dn} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{dv}{dn}.$$

Or, les égalités (5) nous donnent les suivantes

$$a = x'_u\frac{du}{dn} + x'_v\frac{dv}{dn},$$

$$b = y'_u\frac{du}{dn} + y'_v\frac{dv}{dn},$$

$$c = z'_u\frac{du}{dn} + z'_v\frac{dv}{dn}.$$

En les multipliant respectivement par x'_u, y'_u, z'_u, puis en les ajoutant membre à membre, on obtient la première des égalités

$$E\frac{du}{dn} + F\frac{dv}{dn} = \Sigma a x'_u,$$

$$F\frac{du}{dn} + G\frac{dv}{dn} = \Sigma a x'_v,$$

la deuxième s'obtenant d'une manière analogue. Tenons compte alors des formules (6) et nous trouverons

$$k\mathrm{H}\frac{du}{dn} = \mathrm{G}\alpha - \mathrm{F}\beta, \qquad k\mathrm{H}\frac{dv}{dn} = -\mathrm{F}\alpha + \mathrm{E}\beta.$$

L'égalité (7) nous donne ainsi le résultat cherché

$$(8) \qquad k\mathrm{H}\frac{d}{dn} = \alpha\left(\mathrm{G}\frac{\partial}{\partial u} - \mathrm{F}\frac{\partial}{\partial v}\right) + \beta\left(-\mathrm{F}\frac{\partial}{\partial u} + \mathrm{E}\frac{\partial}{\partial v}\right).$$

§ II. — Équation de continuité.

Soit

$$dm = \rho\, d\mathrm{S} = \rho \mathrm{H}\, du\, dv$$

la masse de l'élément $d\mathrm{S}$, ρ désignant la densité superficielle ; cette masse demeurant la même quand le temps varie, on a

$$\rho \mathrm{H} = \rho_0 \mathrm{H}_0,$$

l'indice zéro se rapportant à un instant t_0 choisi une fois pour toutes. On en déduit l'équation de continuité

$$(9) \qquad \frac{\partial(\rho \mathrm{H})}{\partial t} = 0,$$

analogue à celle de Lagrange en Hydrodynamique. Cette équation peut encore se mettre sous une autre forme : donnons à la membrane, à l'instant t, un déplacement virtuel défini par les accroissements $\delta\,(x, y, z)$, fonctions continues de (u, v), des coordonnées de ses différents points. Il en résultera, pour les quantités E, F, G, H, des variations qui, d'après les formules (2), seront

$$(10) \quad \begin{cases} \delta\mathrm{E} = 2\sum x'_u \dfrac{\partial\, \delta x}{\partial u}, \quad \delta\mathrm{F} = \sum\left(x'_u \dfrac{\partial\, \delta x}{\partial v} + x'_v \dfrac{\partial\, \delta x}{\partial u}\right), \quad \delta\mathrm{G} = 2\sum x'_v \dfrac{\partial\, \delta x}{\partial v}, \\ 2\mathrm{H}\,\delta\mathrm{H} = \mathrm{G}\,\delta\mathrm{E} - 2\mathrm{F}\,\delta\mathrm{F} + \mathrm{E}\,\delta\mathrm{G} \end{cases}$$

et l'on aura, en outre,

$$\delta\, d\mathrm{S} = \delta\mathrm{H}\, du\, dv.$$

La dilatation superficielle sera ainsi

$$\frac{\delta\, dS}{dS} = \frac{\delta H}{H}.$$

Supposons maintenant que le déplacement virtuel considéré coïncide avec le déplacement réel élémentaire à l'instant t; en appelant

$$(11) \qquad (U, V, W) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial t}$$

les composantes de la vitesse du point M (x, y, z), on aura

$$\delta(x, y, z) = (U, V, W)\, dt$$

et

$$(12) \qquad \delta E = E'\, dt, \qquad \delta F = F'\, dt, \qquad \delta G = G'\, dt, \qquad \delta H = H'\, dt,$$

en posant

$$(13) \qquad \begin{cases} E' = \dfrac{\partial E}{\partial t} = 2 \sum x'_u \dfrac{\partial U}{\partial u}, \\ F' = \dfrac{\partial F}{\partial t} = \sum \left(x'_u \dfrac{\partial U}{\partial v} + x'_v \dfrac{\partial U}{\partial u} \right), \\ G' = \dfrac{\partial G}{\partial t} = 2 \sum x'_v \dfrac{\partial U}{\partial v}, \end{cases}$$

$$2HH' = GE' - 2FF' + EG'.$$

Soit alors $\theta\, dt$ la dilatation superficielle réelle, on aura

$$(14) \qquad \theta = \frac{H'}{H} = \frac{GE' - 2FF' + EG'}{2H^2},$$

d'où, d'après l'équation (9),

$$(15) \qquad \rho\theta + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

ce qui est une autre forme de l'équation de continuité. En tenant compte des égalités (13) et (14), cette dernière équation peut s'écrire d'une manière plus explicite

$$(15') \qquad \frac{\rho}{H^2} \sum \left[(G x'_u - F x'_v) \frac{\partial U}{\partial u} + (-F x'_u + E x'_v) \frac{\partial U}{\partial v} \right] + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

§ III. — Travail élémentaire des actions de viscosité (¹).

Imposons à la membrane un déplacement virtuel $\delta(x, y, z)$; l'élément linéaire éprouvera une variation δds telle que

$$2\,ds\,\delta\,ds = \delta E\,du^2 + 2\,\delta F\,du\,dv + \delta G\,dv^2,$$

$\delta(E, F, G)$ étant donnés par les formules (10), et la dilatation correspondante ∂ de l'élément ds sera

$$(16)\qquad \partial = \frac{\delta\,ds}{ds} = \frac{1}{2}\,\frac{\delta E\,du^2 + 2\,\delta F\,du\,dv + \delta G\,dv^2}{E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2}.$$

Soient, d'autre part, ds et Ds deux éléments linéaires issus du même point $M(x, y, z)$ de la membrane et correspondant aux accroissements respectifs (du, dv), (Du, Dv) des paramètres; ils font entre eux un angle φ tel que

$$\cos\varphi = \frac{E\,du\,Du + F(du\,Dv + dv\,Du) + G\,dv\,Dv}{ds\,Ds}.$$

Après la déformation élémentaire, ds est devenu $ds_1 = ds + \delta ds$, Ds est devenu $Ds_1 = Ds + \delta Ds$, et l'angle φ est devenu l'angle φ_1 tel que

$$\cos\varphi_1 = \frac{E_1\,du\,Du + F_1(du\,Dv + dv\,Du) + G_1\,dv\,Dv}{ds_1\,Ds_1},$$

formule où l'on a posé

$$E_1 = E + \delta E, \qquad F_1 = F + \delta F, \qquad G_1 = G + \delta G.$$

Pour que la déformation conserve les angles et les longueurs, il faut et il suffit, d'après les égalités précédentes, que $\delta(E, F, G)$ soient nuls; dans ces conditions, la surface déformée est applicable sur la surface primitive et l'élément dS est égal à l'élément transformé. La déformation de dS se trouve donc entièrement définie par les trois quantités δE, δF, δG.

Soit δT la variation infiniment petite de la température absolue T

(¹) *De la viscosité dans le mouvement des membranes flexibles* (*Comptes rendus*, t. CLIII, 4 décembre 1911, p. 1032).

de l'élément dS dans la modification virtuelle considérée; abstraction faite du déplacement d'ensemble dans l'espace éprouvé par cet élément, la modification virtuelle qu'il subit est entièrement déterminée par les quatre quantités

$$\delta E, \quad \delta F, \quad \delta G, \quad \delta T,$$

que nous supposerons constituer un système de variations normales (¹).

D'après cela, le travail élémentaire de viscosité intrinsèque de l'élément dS sera de la forme

$$-(\mathcal{E}\,\delta E - 2\mathcal{F}\,\delta F + \mathcal{G}\,\delta G)\,dS,$$

$\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ désignant les *actions de viscosité*, fonctions des paramètres qui définissent l'état de l'élément et qui sont la densité ρ et la température absolue T, et aussi fonctions des dérivées E', F', G' données par les formules (13).

Les liaisons entre les divers éléments dS étant des *soudures* au sens de M. Duhem, le travail virtuel de viscosité $\delta\mathcal{T}_v$ relatif à la membrane entière sera la somme des travaux de viscosité intrinsèque étendue à tous les éléments dS, soit

$$(17) \qquad \delta\mathcal{T}_v = -\int(\mathcal{E}\,\delta E - 2\mathcal{F}\,\delta F + \mathcal{G}\,\delta G)\,dS.$$

Il résulte de cette expression que le travail de viscosité est nul dans toute déformation transformant la membrane en une autre applicable sur la première, et ceci est bien conforme à l'idée que nous nous faisons de la membrane parfaitement flexible.

Dans une modification réelle élémentaire, le travail de viscosité devient

$$(18) \qquad d\mathcal{T}_v = -dt\int(\mathcal{E}E' - 2\mathcal{F}F' + \mathcal{G}G')\,dS,$$

et l'on sait que cette expression doit être essentiellement négative. D'autre part, les actions de viscosité $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ doivent s'annuler en même temps que les dérivées E', F', G'; l'hypothèse la plus simple

(¹) *Voir* P. Duhem, *Théorie thermodynamique de la viscosité, du frottement et des faux équilibres chimiques*, 1ʳᵉ Partie, Ch. I.

qu'on puisse faire est donc de regarder ces actions comme des fonctions linéaires et homogènes de E', F', G', dont les coefficients soient de simples fonctions de ρ, T. Lord Rayleigh suppose de plus l'existence d'une *fonction dissipative* 2Φ, c'est-à-dire d'une forme quadratique de E', F', G', dont les coefficients soient simplement fonctions de ρ, T, et telle qu'on ait

$$(19) \qquad \mathcal{E} = \frac{\partial \Phi}{\partial E'}, \qquad -2\mathcal{F} = \frac{\partial \Phi}{\partial F'}, \qquad \mathcal{G} = \frac{\partial \Phi}{\partial G'}.$$

On a dès lors

$$2\Phi = \mathcal{E}E' - 2\mathcal{F}F' + \mathcal{G}G',$$

de sorte que l'égalité (18) devient

$$(20) \qquad d\mathcal{T}_v = -dt \int 2\Phi \, dS.$$

Le travail élémentaire de viscosité relatif à une modification réelle devant être essentiellement négatif, il en résulte que la fonction dissipative 2Φ doit être une forme quadratique définie positive. Nous verrons dans un instant les conditions qui doivent être vérifiées pour qu'il en soit ainsi.

Cela posé, pour obtenir l'expression de 2Φ, nous devons écrire que cette fonction, en un point de la membrane et à l'instant t, a une valeur indépendante du réseau de coordonnées curvilignes tracé sur la surface et exprimer que la membrane est isotrope. Auparavant, voyons comment la déformation réelle (12) est caractérisée géométriquement.

Au point $M(u, v)$ de la surface à l'instant t et dans la direction (du, dv), portons une longueur $MP = \frac{ds}{ds_1} = \frac{1}{1+\partial}$ et cherchons, dans le plan tangent en M, le lieu du point P, dont nous appellerons ξ, η les coordonnées par rapport à deux axes $(M\xi, M\eta)$ respectivement tangents aux deux lignes du réseau (Mu, Mv) qui se coupent au point M. On a

$$ds_1^2 = E_1\,du^2 + 2F_1\,du\,dv + G_1\,dv^2,$$

avec

$$(21) \qquad E_1 = E + E'\,dt, \qquad F_1 = F + F'\,dt, \qquad G_1 = G + G'\,dt.$$

Comme, d'autre part,

$$\frac{\xi}{\sqrt{E}\,du} = \frac{\eta}{\sqrt{G}\,dv} = \frac{MP}{ds} = \frac{1}{ds_1},$$

il résulte de ces égalités qu'on a

$$\frac{E_1}{E}\xi^2 + 2\frac{F_1}{\sqrt{EG}}\xi\eta + \frac{G_1}{G}\eta^2 = 1.$$

Nous voyons que le lieu du point P est une ellipse ayant le point M comme centre; on l'appelle *ellipse des dilatations* au point M. Cherchons les axes de cette ellipse en écrivant que leurs directions (du, dv), (Du, Dv) sont deux diamètres conjugués rectangulaires.

Tout d'abord, pour que deux directions soient conjuguées, il faut qu'elles forment un faisceau harmonique avec les directions asymptotiques de l'ellipse; de là la première relation

$$E_1\,du\,Du + F_1(du\,Dv + dv\,Du) + G_1\,dv\,Dv = 0,$$

qu'on doit joindre à la condition de perpendicularité

$$E\,du\,Du + F(du\,Dv + dv\,Du) + G\,dv\,Dv = 0.$$

Les expressions données précédemment de $\cos\varphi$ et de $\cos\varphi_1$ montrent ainsi qu'il n'existe que deux directions en chaque point, qui, perpendiculaires avant la déformation, restent perpendiculaires après la déformation. Ce sont celles qui sont dirigées suivant les axes de l'ellipse des dilatations; les directions de ces axes s'appellent les *directions principales* au point M. En tenant compte des égalités (21), on déduit des deux dernières

$$\frac{E'\,du + F'\,dv}{E\,du + F\,dv} = \frac{F'\,du + G'\,dv}{F\,du + G\,dv} = \frac{E'\,du^2 + 2F'\,du\,dv + G'\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2} = 2D,$$

$D\,dt$ représentant, d'après la formule (16), la dilatation principale relative à la direction (du, dv). Les dilatations principales sont ainsi données par l'équation

$$\begin{vmatrix} E' - 2ED & F' - 2FD \\ F' - 2FD & G' - 2GD \end{vmatrix} = 0.$$

qui s'écrit d'une manière plus explicite

$$(22) \qquad 4H^2D^2 - 2(GE' - 2FF' + EG')D + E'G' - F'^2 = 0.$$

Dès lors, si D_1 et D_2 désignent les racines de cette équation, les demi-axes de l'ellipse des dilatations auront pour longueurs respectives

$$1 - D_1\,dt, \quad 1 - D_2\,dt.$$

Ce premier résultat obtenu, revenons aux trois quantités $\delta(E, F, G)$ qui définissent la déformation éprouvée par un élément dS de la membrane; celles-ci peuvent s'exprimer linéairement en fonction de trois autres quantités qui sont :

1° La dilatation linéaire ∂_u suivant la ligne Mu du réseau le long de laquelle v est constant;

2° La dilatation linéaire ∂_v suivant la ligne Mv du réseau le long de laquelle u est constant;

3° L'accroissement $\delta\psi$ de l'angle formé au point M par les deux lignes (Mu, Mv) du réseau et défini par l'égalité

$$\cos\psi = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

Nous aurons l'expression de ∂_u en faisant dans l'égalité (16) $dv = 0$ et $\partial = \partial_u$; nous obtenons ainsi la première des formules

$$\delta E = 2E\,\partial_u, \qquad \delta G = 2G\,\partial_v,$$

la deuxième s'obtenant d'une manière analogue. D'autre part, la différentiation de l'expression de $\cos\psi$ nous donne par un calcul facile et en tenant compte des deux précédentes formules

$$\delta F = F(\partial_u + \partial_v) - H\,\delta\psi.$$

Supposons maintenant que la déformation virtuelle considérée coïncide avec la modification réelle

$$(12) \qquad \delta E = E'\,dt, \qquad \delta F = F'\,dt, \qquad \delta G = G'\,dt, \qquad \delta H = H'\,dt;$$

dans cette modification, nous poserons

$$\partial_u = D_u\,dt, \qquad \partial_v = D_v\,dt, \qquad \delta\psi = \psi'\,dt.$$

de sorte qu'il viendra

$$E' = 2ED_u, \qquad F' = F(D_u + D_v) - H\psi', \qquad G' = 2GD_v.$$

D'après ces formules, nous pouvons, dans l'expression de la fonction dissipative $2\mathfrak{O}$, substituer aux variables (E', F', G') les variables (D_u, D_v, ψ'); $2\mathfrak{O}$ devient ainsi une forme quadratique des variables (D_u, D_v, ψ') qui doit avoir une valeur indépendante du réseau tracé sur la membrane à l'instant t. Substituons alors aux coordonnées (u, v) d'autres coordonnées curvilignes (u', v') telles que les deux lignes du nouveau réseau (Mu', Mv') qui se coupent au point M soient dirigées suivant les axes principaux de dilatation en ce point. On aura

$$D_{u'} = D_1, \qquad D_{v'} = D_2,$$

et comme le réseau est resté orthogonal pendant la modification réelle considérée, à la place des variables (D_u, D_v, ψ'), on a les variables $(D_1, D_2, 0)$. La fonction dissipative $2\mathfrak{O}$ devient donc une forme quadratique par rapport à D_1, D_2.

Tenons compte, alors, de ce que la membrane est isotrope tout autour du point M : dans ces conditions, la fonction dissipative $2\mathfrak{O}$ doit garder la même valeur, soit que la dilatation principale ait la valeur $D_1\,dt$ suivant Mu', la valeur $D_2\,dt$ suivant Mv', soit qu'on permute entre elles ces deux valeurs. Il en résulte que $2\mathfrak{O}$ est non seulement une forme quadratique de D_1, D_2, mais encore une fonction symétrique de ces mêmes variables; elle s'exprime donc forcément par l'égalité

$$2\mathfrak{O} = A(D_1 + D_2)^2 + BD_1D_2,$$

A et B étant deux quantités qui dépendent seulement de l'état de la membrane au point M à l'instant t, c'est-à-dire de la densité et de la température.

Mais, d'après l'équation (22) et l'égalité (14),

$$D_1 + D_2 = \theta, \qquad D_1 D_2 = \frac{E'G' - F'^2}{4H^2};$$

si donc on pose

$$\Lambda = \frac{A}{H^2}, \qquad M = \frac{B}{4H^2},$$

il viendra

$$(23)\qquad 2\mathfrak{D} = \Lambda H^2 \mathfrak{I}^2 + M(E'G' - F'^2)$$

et la fonction dissipative se retrouvera exprimée au moyen des variables E', F', G'. Comme H ne dépend que de la densité, en vertu de l'équation de continuité, les quantités Λ et M sont, ainsi que A et B, de simples fonctions de ρ, T, qu'on appelle les *coefficients de viscosité* de la membrane.

Les égalités (14), (19) et (23) nous donnent les expressions suivantes pour les actions de viscosité

$$(24)\qquad \begin{cases} 2\mathcal{E} = \Lambda G\mathfrak{I} + MG', \\ 2\mathcal{F} = \Lambda F\mathfrak{I} + MF', \\ 2\mathcal{G} = \Lambda E\mathfrak{I} + ME'. \end{cases}$$

Il reste à exprimer que la fonction dissipative $2\mathfrak{D}$ est une forme quadratique définie positive. Le discriminant de la fonction $2\mathfrak{D}H^2$ a pour expression

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\Lambda}{2}G^2 & -\Lambda FG & \frac{\Lambda}{2}EG + MH^2 \\ -\Lambda FG & 2(\Lambda F^2 - MH^2) & -\Lambda EF \\ \frac{\Lambda}{2}EG + MH^2 & -\Lambda EF & \frac{\Lambda}{2}E^2 \end{vmatrix};$$

les conditions pour que la forme quadratique considérée soit définie positive sont alors

$$\frac{\Lambda}{2}G^2 > 0, \qquad 2(\Lambda F^2 - MH^2) > 0, \qquad \frac{\Lambda}{2}E^2 > 0,$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\Lambda}{2}G^2 & -\Lambda FG \\ -\Lambda FG & 2(\Lambda F^2 - MH^2) \end{vmatrix} > 0, \qquad \Delta > 0.$$

Tous calculs faits, on trouve pour le discriminant Δ

$$\Delta = 2H^6M^2(\Lambda + M),$$

de sorte qu'on voit facilement que les conditions nécessaires et suffisantes sont

$$(25)\qquad M < 0, \qquad \Lambda + M > 0.$$

Si les inégalités précédentes sont vérifiées, aucun des deux coefficients de viscosité Λ et M ne peut être nul; dans ces conditions, toute modification élémentaire pour laquelle on n'a pas à la fois

$$E' = 0, \qquad F' = 0, \qquad G' = 0,$$

entraîne un travail négatif des actions de viscosité. Qu'arriverait-il si l'une des deux inégalités (25) se changeait en une égalité?

1° Supposons qu'on ait $M = 0$; la deuxième inégalité se réduira à

$$\Lambda > 0$$

et l'égalité (23) deviendra

$$2\varpi = \Lambda H^2 \theta^2; \tag{26}$$

dans ces conditions, le travail de viscosité sera nul dans toute modification ne faisant pas varier la densité.

2° Supposons qu'on ait $\Lambda + M = 0$; la première des inégalités (25) s'écrira indifféremment

$$\Lambda > 0, \qquad \text{ou} \qquad M < 0$$

et l'égalité (23) deviendra

$$2\varpi = \Lambda(H^2\theta^2 - E'G' + F'^2),$$

ou, en tenant compte de ce que, d'après l'équation (22),

$$D_1 + D_2 = \theta, \qquad D_1 D_2 = \frac{E'G' - F'^2}{4H^2},$$

$$2\varpi = \Lambda H^2 (D_1 - D_2)^2.$$

Dans ces conditions, le travail de viscosité sera nul si l'ellipse des dilatations se réduit à un cercle, c'est-à-dire si la déformation laisse l'élément dS semblable à lui-même.

Si les deux inégalités (25) se changeaient toutes deux en égalités, on aurait

$$\Lambda = 0, \qquad M = 0,$$

et la membrane serait dénuée de viscosité.

La première hypothèse ($M = 0$) est celle à laquelle nous aurions été conduits si nous avions tenu, dans l'étude de la viscosité, à rester

rigoureusement conséquents avec la définition de la membrane parfaitement flexible. Revenons en effet à cette définition.

On appelle membrane parfaitement flexible une surface matérielle dont l'épaisseur est infiniment petite et dont l'état physique de chaque élément est entièrement défini par sa densité ρ et sa température absolue T. Pour déterminer entièrement la modification virtuelle éprouvée par un tel élément, il suffit de connaître son changement de position dans l'espace ainsi que les variations correspondantes de sa densité et de sa température ; il est tout à fait inutile de connaître le changement de forme que cet élément a pu subir pendant la modification considérée.

Mais, si l'on admet qu'il est nécessaire de tenir compte, pour définir la modification, non seulement des variations de la densité et de la température, mais encore des déformations éprouvées par l'élément; si l'on admet que deux états où l'élément a même densité, même température, mais des formes différentes, constituent non deux états identiques, mais deux états distincts, on ne doit plus dire que la surface considérée est une membrane parfaitement flexible; on doit dire qu'on étudie les propriétés d'une surface élastique.

Cela posé, voyons ce que devient l'expression du travail élémentaire de viscosité si l'on tient à rester rigoureusement conséquent avec la définition du mot membrane.

Une modification virtuelle de l'élément dS est entièrement définie, d'après ce qui précède, par le système de variations normales $(\delta\rho, \delta\mathrm{T})$, de sorte qu'au lieu de l'égalité (17), on aura simplement

$$\delta\mathfrak{E}_v = -\int \mathcal{R}\, \delta\rho\, dS.$$

$\mathcal{R}$ étant la seule action de viscosité relative à la variable ρ, fonction de ρ, T, $\frac{\partial\rho}{\partial t}$. L'hypothèse la plus simple qu'on puisse faire est d'admettre que $\mathcal{R}$ est proportionnelle à $\frac{\partial\rho}{\partial t}$, le coefficient de proportionnalité ne dépendant que de ρ et de T. Comme H ne dépend que de ρ, on pourra donc poser

$$\mathcal{R} = \frac{\mathrm{H}^2}{\rho^2}\Lambda\frac{\partial\rho}{\partial t},$$

A étant une fonction de ρ et de T appelée *coefficient de viscosité* de la membrane. Il y aura forcément ici une fonction dissipative $2\mathfrak{O}$ telle que

$$\mathcal{R} = \frac{\partial \mathfrak{O}}{\partial \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)},$$

car, si l'on tient compte de l'équation de continuité (15), il viendra

$$2\mathfrak{O} = A \mathrm{U}^2 \theta^2. \tag{26}$$

Nous retombons donc bien, en partant de la définition rigoureuse de la membrane parfaitement flexible, sur les conséquences de l'hypothèse ($M = 0$). A l'imitation de la terminologie employée par M. Duhem en Hydrodynamique ([1]), une membrane, pour laquelle $M = 0$, peut être appelée une *membrane proprement dite*.

L'égalité (26) entraîne immédiatement la conséquence suivante : le travail virtuel des actions de viscosité est identiquement nul pour une membrane de densité invariable; autrement dit l'hypothèse d'une membrane affectée de viscosité dont la dilatation superficielle ne peut différer de zéro, quoique la dilatation linéaire puisse ne pas être nulle, est en contradiction avec la définition de la membrane proprement dite. Une semblable membrane serait l'analogue d'un fluide incompressible visqueux.

Ainsi, en suivant les conséquences logiques de la définition stricte du mot membrane, nous serions conduits à cette conclusion qu'il n'existe pas de membrane visqueuse de densité invariable, de même qu'en Hydrodynamique il n'existerait pas de liquide visqueux. De telles conclusions sont évidemment contraires à l'expérience la plus vulgaire.

C'est pour s'affranchir de ces contradictions que M. Duhem a élargi, en Hydrodynamique, la notion de fluide, quand il a traité des actions de viscosité. Nous n'avons fait que suivre son exemple en traitant de la viscosité dans les membranes.

Remarquons enfin que la seconde hypothèse ($A + M = 0$) est ana-

---

([1]) P. Duhem, *Recherches sur l'Hydrodynamique*, 2e série, sixième Partie, Chap. I, § 2.

logue à celle que Barré de Saint-Venant et Stokes avaient admise en Hydrodynamique. Suivant l'opinion de M. Duhem, nous n'établirons aucune relation entre les coefficients de viscosité Λ et M et nous nous bornerons à admettre les inégalités (25) auxquelles notre analyse nous a conduits.

§ IV. — Équations du mouvement [1].

D'après les principes de l'Énergétique, nous obtiendrons les équations du mouvement en écrivant qu'on a, dans toute modification virtuelle isothermique

$$\delta\mathfrak{T}_e + \delta\mathfrak{T}_v + \delta\mathrm{J} - \delta_\mathrm{T}\Phi = 0, \tag{27}$$

$\delta\mathfrak{T}_e$ désignant le travail élémentaire des forces extérieures, $\delta\mathfrak{T}_v$ celui des actions de viscosité, $\delta\mathrm{J}$ celui des forces d'inertie et $\delta_\mathrm{T}\Phi$ la variation isothermique du potentiel thermodynamique interne.

Soient X, Y, Z les composantes par unité de masse de la force appliquée à chaque élément de surface de la membrane, T_x, T_y, T_z les composantes par unité de longueur de la force appliquée à chaque élément de son contour, on aura

$$\delta\mathfrak{T}_e = \int \rho(\mathrm{X}\,\delta x + \mathrm{Y}\,\delta y + \mathrm{Z}\,\delta z)\,d\mathrm{S} + \int_\Gamma (\mathrm{T}_x\,\delta x + \mathrm{T}_y\,\delta y + \mathrm{T}_z\,\delta z)\,ds,$$

$$\delta\mathrm{J} = -\int \rho\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\,\delta x + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\,\delta y + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\,\delta z\right)d\mathrm{S},$$

et si nous posons

$$\mathfrak{X} = \rho\mathrm{H}\left(\mathrm{X} - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right), \qquad \mathfrak{Y} = \rho\mathrm{H}\left(\mathrm{Y} - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right), \qquad \mathfrak{Z} = \rho\mathrm{H}\left(\mathrm{Z} - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right),$$

$$(\mathfrak{T}_x, \mathfrak{T}_y, \mathfrak{T}_z) = k(\mathrm{T}_x, \mathrm{T}_y, \mathrm{T}_z),$$

il viendra

$$\delta\mathfrak{T}_e + \delta\mathrm{J} = \int\!\!\int (\mathfrak{X}\,\delta x + \mathfrak{Y}\,\delta y + \mathfrak{Z}\,\delta z)\,du\,dv + \int (\mathfrak{T}_x\,\delta x + \mathfrak{T}_y\,\delta y + \mathfrak{T}_z\,\delta z)\,d\sigma,$$

la première intégrale s'étendant à l'aire comprise à l'intérieur du contour C, image de la membrane dans le plan des (u, v), et la

[1] *Les équations générales des membranes flexibles* (*Comptes rendus*, t. CLIV, 15 janvier 1912, p. 109).

deuxième à ce contour lui-même. Nous écrirons pour abréger

(28) $$\delta\mathcal{C}_e + \delta\mathrm{J} = \int\int \Sigma \mathrm{X}\, \delta x\, du\, dv + \int \Sigma \mathcal{E}_x\, \delta x\, d\sigma,$$

et nous conserverons cette notation dans tout ce qui va suivre.

Soit, d'autre part, $\varphi(\rho, \mathrm{T})$ le potentiel thermodynamique interne par unité de masse; si nous supposons qu'entre les différents éléments de la membrane ne s'exerce aucune action, le potentiel thermodynamique interne Φ de la membrane entière sera de la forme

$$\Phi = \int \varphi(\rho, \mathrm{T})\, dm.$$

Dans une modification virtuelle isothermique, on aura

$$\delta_{\mathrm{T}}\Phi = \int \frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\, \delta\rho\, dm = \int \frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\, \rho\, \delta\rho\, d\mathrm{S}.$$

Mais, comme la masse élémentaire $dm = \rho\, d\mathrm{S}$ ne varie pas dans la modification considérée, on a

$$\delta\rho\, d\mathrm{S} + \rho\, \delta\, d\mathrm{S} = 0,$$

de sorte que, si l'on pose

(29) $$\Theta + \rho^2 \frac{\partial\varphi}{\partial\rho} = 0,$$

il viendra

$$\delta_{\mathrm{T}}\Phi = \int \Theta\, \delta\, d\mathrm{S}.$$

Or, d'après la quatrième des formules (10), $\delta d\mathrm{S}$ a pour expression

$$\delta\, d\mathrm{S} = \frac{\mathrm{G}\,\delta\mathrm{E} - 2\mathrm{F}\,\delta\mathrm{F} + \mathrm{E}\,\delta\mathrm{G}}{2\mathrm{H}}\, du\, dv;$$

nous avons donc en définitive

$$\delta_{\mathrm{T}}\Phi = \int\int \Theta \frac{\mathrm{G}\,\delta\mathrm{E} - 2\mathrm{F}\,\delta\mathrm{F} + \mathrm{E}\,\delta\mathrm{G}}{2\mathrm{H}}\, du\, dv.$$

Cela posé, d'après l'égalité (17) et la précédente, on peut écrire

$$\delta\mathcal{C}_v - \delta_{\mathrm{T}}\Phi = -\frac{1}{2}\int\int\Big[\Big(\Theta\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{H}} + 2\mathrm{H}\mathcal{E}\Big)\delta\mathrm{E} - 2\Big(\Theta\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{H}} + 2\mathrm{H}\mathcal{F}\Big)\delta\mathrm{F} + \Big(\Theta\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{H}} + 2\mathrm{H}\mathcal{G}\Big)\delta\mathrm{G}\Big]\, du\, dv,$$

ou, en posant

$$(30)\qquad \begin{cases} \mathfrak{M} = \Theta\dfrac{G}{H} + 2H\mathcal{E}, \\ \mathfrak{N} = \Theta\dfrac{F}{H} + 2H\mathcal{F}, \\ \mathfrak{P} = \Theta\dfrac{E}{H} + 2H\mathcal{G} \end{cases}$$

et en tenant compte des formules (10),

$$(31)\quad \delta\mathfrak{T}_v - \delta_T\Phi = -\int\int\left[\mathfrak{M}\sum x'_u\frac{\partial\,\delta x}{\partial u} - \mathfrak{N}\sum\left(x'_u\frac{\partial\,\delta x}{\partial v} + x'_v\frac{\partial\,\delta x}{\partial u}\right) + \mathfrak{P}\sum x'_v\frac{\partial\,\delta x}{\partial v}\right]du\,dv$$

$$= -\int\int\sum\left[(\mathfrak{M}x'_u - \mathfrak{N}x'_v)\frac{\partial\,\delta x}{\partial u} + (-\mathfrak{N}x'_u + \mathfrak{P}x'_v)\frac{\partial\,\delta x}{\partial v}\right]du\,dv.$$

Les expressions (28) et (31) transportées dans l'égalité (27) nous donnent alors

$$(32)\quad \int\int\Sigma\mathfrak{X}\,\delta x\,du\,dv + \int\Sigma\mathfrak{T}_x\,\delta x\,d\sigma - \int\int\sum\left[(\mathfrak{M}x'_u - \mathfrak{N}x'_v)\frac{\partial\,\delta x}{\partial u} + (-\mathfrak{N}x'_u + \mathfrak{P}x'_v)\frac{\partial\,\delta x}{\partial v}\right]du\,dv = 0.$$

En appliquant à la dernière intégrale l'intégration par parties et en se rappelant que si P et Q désignent deux fonctions de (u, v) admettant à l'intérieur du contour C des dérivées partielles du premier ordre finies, on a, d'après la formule de Green,

$$\int\int\left(\frac{\partial P}{\partial u} + \frac{\partial Q}{\partial v}\right)du\,dv = \int(P\alpha + Q\beta)\,d\sigma,$$

l'équation (32) s'écrira en définitive

$$\int\int\sum\left[\mathfrak{X} + \frac{\partial(\mathfrak{M}x'_u - \mathfrak{N}x'_v)}{\partial u} + \frac{\partial(-\mathfrak{N}x'_u + \mathfrak{P}x'_v)}{\partial v}\right]\delta x\,du\,dv + \int\Sigma[\mathfrak{T}_x - \alpha(\mathfrak{M}x'_u - \mathfrak{N}x'_v) - \beta(-\mathfrak{N}x'_u + \mathfrak{P}x'_v)]\,\delta x\,d\sigma = 0.$$

Cette équation doit être vérifiée quel que soit le déplacement virtuel $\delta(x, y, z)$ imposé à la membrane ; il en résulte qu'on doit avoir :

1° En tous les points de l'aire intérieure au contour C

$$(33)\quad \begin{cases} \mathfrak{X} + \dfrac{\partial(\mathfrak{M}\,x'_u - \mathfrak{N}\,x'_v)}{\partial u} + \dfrac{\partial(-\mathfrak{N}\,x'_u + \mathfrak{P}\,x'_v)}{\partial v} = 0, \\ \mathfrak{Y} + \dfrac{\partial(\mathfrak{M}\,y'_u - \mathfrak{N}\,y'_v)}{\partial u} + \dfrac{\partial(-\mathfrak{N}\,y'_u + \mathfrak{P}\,y'_v)}{\partial v} = 0, \\ \mathfrak{Z} + \dfrac{\partial(\mathfrak{M}\,z'_u - \mathfrak{N}\,z'_v)}{\partial u} + \dfrac{\partial(-\mathfrak{N}\,z'_u + \mathfrak{P}\,z'_v)}{\partial v} = 0; \end{cases}$$

2° En tous les points du contour C

$$(34)\quad \begin{cases} \mathcal{E}_x - \alpha(\mathfrak{M}\,x'_u - \mathfrak{N}\,x'_v) - \beta(-\mathfrak{N}\,x'_u + \mathfrak{P}\,x'_v) = 0, \\ \mathcal{E}_y - \alpha(\mathfrak{M}\,y'_u - \mathfrak{N}\,y'_v) - \beta(-\mathfrak{N}\,y'_u + \mathfrak{P}\,y'_v) = 0, \\ \mathcal{E}_z - \alpha(\mathfrak{M}\,z'_u - \mathfrak{N}\,z'_v) - \beta(-\mathfrak{N}\,z'_u + \mathfrak{P}\,z'_v) = 0. \end{cases}$$

Ce sont les équations générales du mouvement des membranes ; mais, entre les six fonctions inconnues x, y, z, ρ, T, Θ, nous n'avons encore que cinq équations indéfinies, les équations du mouvement (33), l'équation (29) et l'équation de continuité (15'). Pour que le problème soit entièrement déterminé, nous devons donc former une sixième équation appelée la *relation supplémentaire* que nous allons déduire des principes de la Thermodynamique et de la conductibilité calorifique.

§ V. — La relation supplémentaire.

Soient δQ la quantité de chaleur dégagée par une portion quelconque de la membrane dans une modification virtuelle, $\mathfrak{E}$ l'équivalent mécanique de la chaleur ; la Thermodynamique nous enseigne qu'on a

$$\mathfrak{E}\,\delta Q = -\int \mathfrak{E}\,T\,\delta\left(-\frac{1}{\mathfrak{E}}\frac{\partial\varphi}{\partial T}\right)dm - \delta\mathcal{E}_v.$$

Dans cette égalité, $\delta\left(-\dfrac{1}{\mathfrak{E}}\dfrac{\partial\varphi}{\partial T}\right)$ représente la variation de l'entropie par unité de masse et $\delta\mathcal{E}_v$ le travail des actions de viscosité relatif à la portion de membrane considérée à laquelle s'étend l'intégration.

Soit dQ la quantité de chaleur dégagée dans une modification réelle, il viendra, d'après l'égalité (20),

$$\mathfrak{E}\, dQ = dt \int T \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho\, \partial T} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial T^2} \frac{\partial T}{\partial t} \right) \rho\, dS + dt \int 2\, \Phi\, dS.$$

Tenons compte de ce que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho\, \theta, \qquad \rho^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho\, \partial T} = -\frac{\partial \Theta}{\partial T}$$

et posons

(35) $$c = -\frac{T}{\mathfrak{E}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial T^2};$$

on aura

(36) $$dQ = dt \int\!\!\int \left(\frac{T}{\mathfrak{E}} \frac{\partial \Theta}{\partial T} \theta - c \rho \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{2\, \Phi}{\mathfrak{E}} \right] H\, du\, dv.$$

l'intégration s'étendant à la région du plan des (u, v) qui correspond à la portion de membrane considérée.

Mais on a aussi, d'après la théorie de la conductibilité calorifique et en supposant la membrane athermane,

(37) $$dQ = -dt \int_\gamma K \frac{dT}{dn} ds + dt \int \mathcal{K} (T - T_0)\, dS.$$

K désignant le produit par l'épaisseur de la membrane du coefficient de conductibilité interne de la substance qui constitue la membrane, $\frac{dT}{dn}$ la dérivée de la température absolue suivant la normale extérieure (a, b, c) au contour γ qui limite la portion de surface considérée, $\mathcal{K}$ le double du coefficient de conductibilité extérieure que nous supposons le même pour les deux faces et T_0 la moyenne des températures absolues extérieures sur les deux faces de la membrane. La formule (8) nous donne alors, en nous souvenant que $ds = k\, d\sigma$,

(37′) $$\frac{dT}{dn} ds = \frac{1}{H} \left[\alpha \left(G \frac{\partial T}{\partial u} - F \frac{\partial T}{\partial v} \right) + \beta \left(-F \frac{\partial T}{\partial u} + E \frac{\partial T}{\partial v} \right) \right] d\sigma.$$

Si les dérivées secondes de la fonction T par rapport à u et v existent

et sont finies, la formule de Green nous donnera

$$\int_\gamma K\frac{dT}{dn}ds = \iint\left[\frac{\partial}{\partial u}\frac{K}{H}\left(G\frac{\partial T}{\partial u} - F\frac{\partial T}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\frac{K}{H}\left(-F\frac{\partial T}{\partial u} + E\frac{\partial T}{\partial v}\right)\right]du\,dv;$$

de là cette seconde expression de dQ

$$(38)\quad dQ = dt\iint\left[-\frac{\partial}{\partial u}\frac{K}{H}\left(G\frac{\partial T}{\partial u} - F\frac{\partial T}{\partial v}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{\partial}{\partial v}\frac{K}{H}\left(-F\frac{\partial T}{\partial u} + E\frac{\partial T}{\partial v}\right) + H\mathcal{K}(T-T_0)\right]du\,dv.$$

Retranchons membre à membre les égalités (36) et (38), nous obtiendrons une certaine intégrale qui doit être nulle quelle que soit l'aire d'intégration ; il en résulte que son coefficient différentiel doit être égal à zéro. De là résulte l'équation cherchée

$$(39)\quad c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial u}\frac{K}{H}\left(G\frac{\partial T}{\partial u} - F\frac{\partial T}{\partial v}\right)$$
$$+\frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial v}\frac{K}{H}\left(-F\frac{\partial T}{\partial u} + E\frac{\partial T}{\partial v}\right) - \mathcal{K}(T-T_0) + \frac{1}{\mathfrak{E}}\left(T\frac{\partial\Theta}{\partial T}\vartheta + 2\Phi\right).$$

Il y a enfin une dernière condition au contour. Tout le long de Γ on doit avoir

$$K\frac{dT}{dn} + \mathcal{K}'(T-T_0) = 0,$$

$\mathcal{K}'$ désignant le produit par l'épaisseur de la membrane du coefficient de conductibilité extérieure relatif à la surface latérale de la membrane. On a donc le long du contour C et outre les égalités (34)

$$\alpha\left(G\frac{\partial T}{\partial u} - F\frac{\partial T}{\partial v}\right) + \beta\left(-F\frac{\partial T}{\partial u} + E\frac{\partial T}{\partial v}\right) + \frac{\mathcal{K}'}{K}Hk(T-T_0) = 0.$$

§ VI. — Équations de l'équilibre.

Si la membrane est en équilibre, les actions d'inertie et de viscosité sont nulles et les formules (30) se réduisent à

$$(40)\qquad (\mathfrak{N}, \mathfrak{T}, \mathfrak{L}) = \Theta\frac{(G, F, E)}{H}.$$

Les équations indéfinies deviennent ainsi

$$(41)\quad \left\{ \begin{aligned} &\rho H X + \frac{\partial}{\partial u}\frac{\Theta}{H}(G x'_u - F x'_v) + \frac{\partial}{\partial v}\frac{\Theta}{H}(-F x'_u + E x'_v) = 0, \\ &\rho H Y + \frac{\partial}{\partial u}\frac{\Theta}{H}(G y'_u - F y'_v) + \frac{\partial}{\partial v}\frac{\Theta}{H}(-F y'_u + E y'_v) = 0, \\ &\rho H Z + \frac{\partial}{\partial u}\frac{\Theta}{H}(G z'_u - F z'_v) + \frac{\partial}{\partial v}\frac{\Theta}{H}(-F z'_u + E z'_v) = 0. \end{aligned} \right.$$

Soient a, b, c les cosinus directeurs de la normale extérieure au contour Γ menée en un point M de ce contour dans le plan tangent en M à la membrane ; ces cosinus sont donnés par les formules (6). Si nous tenons compte de ces formules et des formules (40), les équations au contour (34) se réduisent aux suivantes

$$(42)\qquad (T_x, T_y, T_z) - \Theta(a, b, c) = 0;$$

elles expriment que la force (T_x, T_y, T_z) appliquée par unité de longueur à chaque élément du contour Γ d'une membrane en équilibre est dirigée suivant la normale extérieure (a, b, c) à ce contour et a pour valeur Θ. Cette quantité Θ considérée en un point quelconque de la membrane s'appelle la *tension superficielle* en ce point [1] ; d'après l'égalité (29), il existe donc en chaque point de la membrane une relation finie entre la tension superficielle, la densité et la température. Cette égalité s'appelle l'*équation caractéristique* de la membrane.

La notion de tension dans la théorie des membranes correspond à la notion de pression en Hydrodynamique ; les égalités (42) conduisent à des théorèmes analogues à ceux qu'on démontre relativement à la pression dans un milieu fluide [2].

M. Duhem, dans son cours autographié de la Faculté de Lille, a donné les équations de l'équilibre d'une membrane sous une autre forme que nous allons déduire des équations (41) et (42). Multiplions les équations (41) respectivement par x'_u, y'_u, z'_u et ajoutons-les membre à membre : les termes contenant les dérivées en u et v se réduisent

---

(1) Pour l'origine de cette dénomination, *voir* P. DUHEM, *Hydrodynamique, Élasticité, Acoustique*, t. II, p. 88.

(2) Pour l'énoncé et la démonstration de ces théorèmes, *voir* P. DUHEM, *loc. cit.*, t. II, p. 87.

à $\frac{\partial \Theta}{\partial u}$ et l'on trouve la première des équations

$$(43)\quad \begin{cases} \rho(X x'_u + Y y'_u + Z z'_u) + \frac{\partial \Theta}{\partial u} = 0, \\ \rho(X x'_v + Y y'_v + Z z'_v) + \frac{\partial \Theta}{\partial v} = 0; \end{cases}$$

la deuxième s'obtient d'une manière analogue.

Soient, d'autre part, a'', b'', c'' les cosinus directeurs de la demi-normale à la membrane menée d'un côté déterminé de sa surface ; si nous multiplions les équations (41) respectivement par a'', b'', c'' et que nous les ajoutions membre à membre, en tenant compte des relations de perpendicularité

$$\Sigma a'' x'_u = 0, \qquad \Sigma a'' x'_v = 0,$$

il viendra

$$\rho \Sigma a'' X + \Theta \sum \frac{G a'' x''_{u^2} - 2F a'' x''_{uv} + E a'' x''_{v^2}}{H^2} = 0.$$

Mais on reconnaît, dans le coefficient de Θ, la courbure moyenne $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ de la surface en un point, les rayons de courbure principaux R_1 et R_2 étant comptés positivement suivant la direction (a'', b'', c''). L'équation précédente peut donc s'écrire

$$(44)\quad \rho(a'' X + b'' Y + c'' Z) + \Theta\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = 0.$$

Les équations (43) et (44) sont les équations indéfinies de l'équilibre données par M. Duhem [1], qui les a établies dans l'hypothèse d'un réseau orthogonal ($F = 0$) ; nous voyons que ces équations gardent la même forme dans le cas d'un réseau quelconque.

Passons aux équations au contour et appelons (N, u) l'angle que fait, en un point du contour Γ, la demi-normale (a, b, c) à ce contour avec la tangente en ce point à la ligne du réseau ($v = \text{const.}$) dont les cosinus directeurs sont

$$\frac{(x'_u, y'_u, z'_u)}{\sqrt{E}};$$

---

[1] Dans l'Ouvrage cité de M. Duhem, le terme en Θ de l'équation (44) est précédé du signe — : cela tient à ce que l'auteur compte les rayons de courbure positivement dans la direction opposée à (a'', b'', c'').

si nous multiplions les égalités (42) respectivement par ces trois cosinus directeurs et que nous ajoutions membre à membre, il viendra la première des égalités

$$(45)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{E}}(T_x x'_u + T_y y'_u + T_z z'_u) - \Theta \cos(N, u) = 0, \\ \dfrac{1}{\sqrt{G}}(T_x x'_v + T_y y'_v + T_z z'_v) - \Theta \cos(N, v) = 0, \end{cases}$$

la deuxième s'obtenant d'une manière analogue et (N, v) désignant l'angle que fait la demi-normale (a, b, c) au contour Γ avec la tangente au même point à la ligne du réseau ($u =$ const.) dont les cosinus directeurs sont

$$\frac{(x'_v, y'_v, z'_v)}{\sqrt{G}}.$$

Multipliant, enfin, les égalités (42) respectivement par a'', b'', c'' et ajoutant membre à membre, nous obtiendrons

$$(45')\qquad a'' T_x + b'' T_y + c'' T_z = 0.$$

Les équations (44) et (45′) sont les conditions au contour données par M. Duhem.

Quant à la relation supplémentaire (39), elle se réduit, dans le cas de l'équilibre, à la forme

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{K}{H}\left(G\frac{\partial T}{\partial u} - F\frac{\partial T}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\frac{K}{H}\left(-F\frac{\partial T}{\partial u} + E\frac{\partial T}{\partial v}\right) - H\mathcal{K}(T - T_0) = 0,$$

et la condition au contour correspondante ne change pas.

§ VII. — Équations des petits mouvements.

Reprenons les équations générales du mouvement de la membrane

$$(46)\qquad \begin{cases} \rho H\left(X - \dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right) + \dfrac{\partial(\mathcal{M} x'_u - \mathcal{N} x'_v)}{\partial u} + \dfrac{\partial(-\mathcal{N} x'_u + \mathcal{L} x'_v)}{\partial v} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \end{cases}$$

$$(47)\qquad \begin{cases} k T_x - \alpha(\mathcal{M} x'_u - \mathcal{N} x'_v) - \beta(-\mathcal{N} x'_u + \mathcal{L} x'_v) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots , \end{cases}$$

et supposons-les vérifiées pour des valeurs de x, y, z, T indépendantes du temps, c'est-à-dire satisfaisant aux équations de l'équilibre posées dans le précédent paragraphe. Si la position correspondante d'équilibre est stable, ces équations pourront encore être vérifiées par des valeurs

$$x+\xi, \quad y+\eta, \quad z+\zeta, \quad \mathrm{T}+\mathfrak{T},$$

infiniment voisines des précédentes, mais où les accroissements $\xi, \eta, \zeta, \mathfrak{T}$, supposés infiniment petits ainsi que leurs dérivées, vont dépendre de t. Les équations que vont vérifier ces nouvelles fonctions sont les équations des petits mouvements.

Pour les obtenir, il suffit de remarquer que les équations (46) et (47) devant être vérifiées par les systèmes de valeurs

$$x, \quad y, \quad z, \quad \mathrm{T},$$
$$x+\xi, \quad y+\eta, \quad z+\zeta, \quad \mathrm{T}+\mathfrak{T},$$

les différentielles totales des premiers membres de ces équations par rapport à x, y, z, T, où $\xi, \eta, \zeta, \mathfrak{T}$ désignent les accroissements des variables, doivent être nulles. En supposant, pour simplifier, qu'on ait

$$d(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}) = 0, \qquad d(\mathrm{T}_x, \mathrm{T}_y, \mathrm{T}_z) = 0,$$

et en remarquant que $d(\rho \mathrm{H}) = 0$, il vient

$$(48) \quad \left\{ \begin{aligned} & -\rho \mathrm{H} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial u}\left(\mathfrak{M} \frac{\partial \xi}{\partial u} - \mathfrak{N} \frac{\partial \xi}{\partial v} + x'_u \, d\mathfrak{M} - x'_v \, d\mathfrak{N}\right) \\ & \qquad + \frac{\partial}{\partial v}\left(-\mathfrak{N} \frac{\partial \xi}{\partial u} + \mathfrak{L} \frac{\partial \xi}{\partial v} - x'_u \, d\mathfrak{N} + x'_v \, d\mathfrak{L}\right) = 0, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{aligned} \right.$$

$$(49) \quad \left\{ \begin{aligned} & \mathrm{T}_x \, dk - \alpha\left(\mathfrak{M} \frac{\partial \xi}{\partial u} - \mathfrak{N} \frac{\partial \xi}{\partial v} + x'_u \, d\mathfrak{M} - x'_v \, d\mathfrak{N}\right) \\ & \qquad - \beta\left(-\mathfrak{N} \frac{\partial \xi}{\partial u} + \mathfrak{L} \frac{\partial \xi}{\partial v} - x'_u \, d\mathfrak{N} + x'_v \, d\mathfrak{L}\right) = 0, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

Dans ces équations, les $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{L})$ figurant hors des signes d ont leurs valeurs correspondant à l'équilibre et comme, à l'équilibre, on peut supposer le réseau orthogonal ($\mathrm{F} = 0$), ces valeurs sont, d'après

les formules (40),

$$\mathfrak{N} = \Theta \frac{G}{H}, \qquad \mathfrak{T} = 0, \qquad \mathfrak{L} = \Theta \frac{E}{H}, \qquad \text{avec} \qquad H = \sqrt{EG}.$$

D'autre part, puisque les quantités $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ sont nulles à l'équilibre, on a

$$(50) \qquad \begin{cases} d\mathfrak{N} = d\left(\Theta \frac{G}{H}\right) + 2H\mathcal{E}, \\ d\mathfrak{T} = d\left(\Theta \frac{F}{H}\right) + 2H\mathcal{F}, \\ d\mathfrak{L} = d\left(\Theta \frac{E}{H}\right) + 2H\mathcal{G}, \end{cases}$$

les actions de viscosité $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ étant données par les formules (24) et les dérivées E', F', G' par les formules (13), dans lesquelles les composantes U, V, W de la vitesse ont pour valeurs, d'après les formules (11),

$$(U, V, W) = \frac{\partial(\xi, \eta, \zeta)}{\partial t}.$$

En tenant compte de ce que

$$d\Theta = \frac{\partial \Theta}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial \Theta}{\partial T} \mathfrak{S}, \qquad \rho\, dH + H\, d\rho = 0,$$

les égalités (50) deviennent

$$(51) \qquad \begin{cases} d\mathfrak{N} = \frac{1}{H}\left[\Theta\, dG - G\left(\Theta + \rho \frac{\partial \Theta}{\partial \rho}\right)\frac{dH}{H} + \frac{\partial \Theta}{\partial T}\mathfrak{S}\right] + 2H\mathcal{E}, \\ d\mathfrak{T} = \frac{1}{H}\Theta\, dF + 2H\mathcal{F}, \\ d\mathfrak{L} = \frac{1}{H}\left[\Theta\, dE - E\left(\Theta + \rho \frac{\partial \Theta}{\partial \rho}\right)\frac{dH}{H} + \frac{\partial \Theta}{\partial T}\mathfrak{S}\right] + 2H\mathcal{G}, \end{cases}$$

avec

$$(52) \qquad \begin{cases} dE = 2\sum x'_u \frac{\partial \xi}{\partial u}, \\ dF = \sum \left(x'_u \frac{\partial \xi}{\partial v} + x'_v \frac{\partial \xi}{\partial u}\right), \\ dG = 2\sum x'_v \frac{\partial \xi}{\partial v}, \\ 2H\, dH = G\, dE + E\, dG. \end{cases}$$

Pour obtenir la forme que prend la relation supplémentaire, il faut

remarquer que la théorie analytique de la chaleur suppose les quantités $\frac{\partial T}{\partial(u, v, t)}$, $T - T_0$ infiniment petites du premier ordre. Il suffit donc, dans la relation supplémentaire (39), de faire porter la différentiation sur T seulement. En remarquant d'autre part, que la fonction dissipative 2Φ est du second ordre de petitesse, il vient

$$c\rho\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial t} = \frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial u}\left(K\frac{G}{H}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial u}\right) + \frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial v}\left(K\frac{E}{H}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial v}\right) - \mathcal{K}\mathfrak{T} + \frac{T}{\mathfrak{E}}\frac{\partial \Theta}{\partial T}\vartheta,$$

et la condition au contour est de même

$$K\frac{d\mathfrak{T}}{dn} + \mathcal{K}'\mathfrak{T} = 0.$$

Supposons, comme cas particulier, que la membrane soit plane à l'équilibre, contenue, par exemple, dans le plan des (x, y); on aura

$$x = u, \qquad y = v, \qquad z = 0.$$

d'où

$$E = 1, \qquad F = 0, \qquad G = 1,$$
$$H = 1;$$

$$dE = 2\frac{\partial \xi}{\partial u}, \qquad dF = \frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial \eta}{\partial u}, \qquad dG = 2\frac{\partial \eta}{\partial v}, \qquad dH = \frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial \eta}{\partial v},$$
$$E' = 2\frac{\partial U}{\partial u}, \qquad F' = \frac{\partial U}{\partial v} + \frac{\partial V}{\partial u}, \qquad G' = 2\frac{\partial V}{\partial v}, \qquad \vartheta = \frac{\partial U}{\partial u} + \frac{\partial V}{\partial v}.$$

Les actions de viscosité seront ainsi, d'après les formules (24),

$$(53)\qquad \begin{cases} 2\mathcal{E} = \Lambda\left(\frac{\partial U}{\partial u} + \frac{\partial V}{\partial v}\right) + 2M\frac{\partial V}{\partial v}, \\ 2\mathcal{F} = M\left(\frac{\partial U}{\partial v} + \frac{\partial V}{\partial u}\right), \\ 2\mathcal{G} = \Lambda\left(\frac{\partial U}{\partial u} + \frac{\partial V}{\partial v}\right) + 2M\frac{\partial U}{\partial u}. \end{cases}$$

Substituons ces expressions dans les égalités (51); il viendra

$$d\mathfrak{N} = 2\Theta\frac{\partial \eta}{\partial v} - \left(\Theta + \rho\frac{\partial \Theta}{\partial \rho}\right)\left(\frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial \eta}{\partial v}\right) + \frac{\partial \Theta}{\partial T}\mathfrak{T} + \Lambda\left(\frac{\partial U}{\partial u} + \frac{\partial V}{\partial v}\right) + 2M\frac{\partial V}{\partial v},$$
$$d\mathfrak{F} = \Theta\left(\frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial \eta}{\partial u}\right) + M\left(\frac{\partial U}{\partial v} + \frac{\partial V}{\partial u}\right),$$
$$d\mathfrak{P} = 2\Theta\frac{\partial \xi}{\partial u} - \left(\Theta + \rho\frac{\partial \Theta}{\partial \rho}\right)\left(\frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial \eta}{\partial v}\right) + \frac{\partial \Theta}{\partial T}\mathfrak{T} + \Lambda\left(\frac{\partial U}{\partial u} + \frac{\partial V}{\partial v}\right) + 2M\frac{\partial U}{\partial u},$$

et, en supposant qu'à l'équilibre la membrane soit homogène, les équations (48) nous donneront

$$(54)\quad\begin{cases}\rho\dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=-\rho\dfrac{\partial\Theta}{\partial\rho}\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial u}+\dfrac{\partial\eta}{\partial v}\right)+\dfrac{\partial\Theta}{\partial \mathrm{T}}\dfrac{\partial\mathfrak{S}}{\partial u}+(\Lambda+\mathrm{M})\dfrac{\partial^2}{\partial t\,\partial u}\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial u}+\dfrac{\partial\eta}{\partial v}\right)-\mathrm{M}\dfrac{\partial\Delta\xi}{\partial t},\\[2ex] \rho\dfrac{\partial^2\eta}{\partial t^2}=-\rho\dfrac{\partial\Theta}{\partial\rho}\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial u}+\dfrac{\partial\eta}{\partial v}\right)+\dfrac{\partial\Theta}{\partial \mathrm{T}}\dfrac{\partial\mathfrak{S}}{\partial v}+(\Lambda+\mathrm{M})\dfrac{\partial^2}{\partial t\,\partial v}\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial u}+\dfrac{\partial\eta}{\partial v}\right)-\mathrm{M}\dfrac{\partial\Delta\eta}{\partial t},\\[2ex] \rho\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}=\Theta\,\Delta\zeta,\end{cases}$$

équations où l'on a posé

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\frac{\partial^2}{\partial v^2}.$$

Ces équations (54) généralisent celles qui ont été données jusqu'ici, où l'on supposait la température constante et la membrane dénuée de viscosité ; les deux premières sont analogues à celles des petits mouvements plans d'un fluide visqueux et l'on voit que la troisième, qui détermine le mouvement transversal, est indépendante de la température et de la viscosité. Les résultats obtenus par les géomètres qui ont étudié cette équation sont donc absolument généraux et s'appliquent aux membranes réelles. Par contre, les équations qui se compliquent par suite de la viscosité et des variations de la température sont précisément celles qui présentent les plus grandes difficultés d'intégration.

On déduit des deux premières équations (54) l'équation de la dilatation $\dfrac{\partial\xi}{\partial u}+\dfrac{\partial\eta}{\partial v}$

$$\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial u}+\frac{\partial\eta}{\partial v}\right)=-\rho\frac{\partial\Theta}{\partial\rho}\Delta\left(\frac{\partial\xi}{\partial u}+\frac{\partial\eta}{\partial v}\right)+\frac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{T}}\Delta\mathfrak{S}+\Lambda\frac{\partial}{\partial t}\Delta\left(\frac{\partial\xi}{\partial u}+\frac{\partial\eta}{\partial v}\right)$$

et l'équation de la rotation moyenne $\dfrac{\partial\eta}{\partial u}-\dfrac{\partial\xi}{\partial v}$

$$\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial u}-\frac{\partial\xi}{\partial v}\right)=\mathrm{M}\frac{\partial}{\partial t}\Delta\left(\frac{\partial\eta}{\partial u}-\frac{\partial\xi}{\partial v}\right).$$

Enfin, l'équation indéfinie de la température devient

$$c\rho\frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial t}=\mathrm{K}\,\Delta\mathfrak{S}-\mathcal{H}\mathfrak{S}+\frac{\mathrm{T}}{\mathfrak{E}}\frac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{T}}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\xi}{\partial u}+\frac{\partial\eta}{\partial v}\right).$$

CHAPITRE II.

LES ONDES AU POINT DE VUE CINÉMATIQUE.

§ I. — Préliminaires.

Soit Σ une courbe mobile tracée sur la membrane à l'instant t; le long de cette courbe u et v sont des fonctions d'un même paramètre ω et du temps t, de sorte que ses équations s'obtiennent en adjoignant aux équations de la membrane

$$(1) \qquad x=f(u,v,t), \qquad y=g(u,v,t), \qquad z=h(u,v,t),$$

deux équations de la forme

$$(2) \qquad u=\chi(\omega,t), \qquad v=\psi(\omega,t).$$

Dans le plan des (u,v) les équations (2) représentent une courbe mobile s qui est l'image de la courbe Σ. Nous supposerons que la courbe Σ partage la surface de la membrane en deux régions distinctes que nous désignerons par les indices 1 et 2 et auxquelles correspondent, dans le plan des (u,v), deux régions 1 et 2 bien déterminées, séparées par la courbe s.

En un point m quelconque de la courbe s, menons une demi-normale mn à cette courbe et soient α, β [1] ses cosinus directeurs respectivement proportionnels à $-\frac{\partial v}{\partial \omega}$ et à $\frac{\partial u}{\partial \omega}$. Définissons-les par la double égalité

$$\frac{\alpha}{-\frac{\partial v}{\partial \omega}}=\frac{\beta}{\frac{\partial u}{\partial \omega}}=\frac{1}{r},$$

où l'on a posé

$$r=+\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial \omega}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial \omega}\right)^2};$$

---

[1] Nous désignons également par α, β les cosinus directeurs de la normale extérieure au contour C, mais il ne peut en résulter aucune confusion.

nous dirons que la demi-normale mn a été menée vers la région 2 par définition. Nous avons donc

$$(3) \qquad \frac{\partial u}{\partial \omega} = r\beta, \qquad \frac{\partial v}{\partial \omega} = -r\alpha.$$

Cela posé, soient

$$(4) \qquad x_1 = f_1(u, v, t), \qquad y_1 = g_1(u, v, t), \qquad z_1 = h_1(u, v, t)$$

les équations de la région 1 de la membrane et

$$(5) \qquad x_2 = f_2(u, v, t), \qquad y_2 = g_2(u, v, t), \qquad z_2 = h_2(u, v, t)$$

les équations de la région 2. Il peut arriver que la courbe Σ jouisse de cette propriété que les fonctions (4) et (5) aient deux à deux la même valeur tout le long de la courbe Σ, ainsi que toutes leurs dérivées par rapport à (u, v, t) jusqu'à l'ordre $n-1$ inclusivement, mais qu'il n'en soit plus de même pour une au moins des dérivées d'ordre n; qu'on ait par exemple

$$\frac{\partial^n x_1}{\partial u^n} \neq \frac{\partial^n x_2}{\partial u^n}.$$

On dit alors que la courbe Σ est une *onde d'ordre* n ou encore une *ligne de discontinuité d'ordre* n pour les coordonnées des différents points de la membrane ; cette courbe peut, en même temps, être une onde d'un ordre différent de n pour une autre fonction de (u, v, t). Une onde du premier ordre pour les coordonnées s'appelle aussi une *onde de choc*, parce qu'à la traversée d'une telle onde les composantes de la vitesse sont discontinues, tout comme cela arrive quand deux corps se choquent ; une onde du second ordre pour les coordonnées s'appelle aussi une *onde d'accélération*, parce qu'à la traversée d'une telle onde les composantes de l'accélération sont en général discontinues.

Si une telle onde Σ existe pour toutes les valeurs de t correspondant à un certain laps de temps, on dit que l'onde considérée est une onde persistante. Ce sont les propriétés des ondes persistantes que nous nous proposons d'étudier.

§ II. — Vitesse de propagation de l'image de l'onde.

Soient s et s' les images de l'onde dans le plan des (u, v) aux instants t et $t + dt$: la demi-normale mn à la courbe s ou son prolongement rencontre s' en un point m'. Soit $dn = \overline{mm'}$ la valeur algébrique du segment mm' compté positivement suivant la demi-normale mn ; la vitesse de propagation V_0 de l'image s de l'onde Σ est définie par l'égalité

$$V_0 = \frac{dn}{dt};$$

elle est donc positive si la propagation se fait de la région 1 vers la région 2 et négative dans le cas contraire.

Calculons V_0 et soient (u, v), $(u + du, v + dv)$ les coordonnées des points m et m', auxquelles correspondent les valeurs respectives (ω, t), $(\omega + d\omega, t + dt)$ des paramètres. On a

$$du = \alpha\, dn = \frac{\partial u}{\partial \omega} d\omega + \frac{\partial u}{\partial t} dt;$$

de là, la première des égalités

$$\alpha V_0 = \frac{\partial u}{\partial \omega} \frac{d\omega}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t},$$

$$\beta V_0 = \frac{\partial v}{\partial \omega} \frac{d\omega}{dt} + \frac{\partial v}{\partial t},$$

la seconde s'établissant d'une manière analogue. En les multipliant respectivement par α, β et ajoutant membre à membre, le coefficient de $\frac{d\omega}{dt}$ est nul en vertu des égalités (3) et il vient

$$V_0 = \alpha \frac{\partial u}{\partial t} + \beta \frac{\partial v}{\partial t}. \tag{6}$$

D'après les égalités (3), on peut écrire aussi

$$V_0 = \frac{1}{r} \frac{D(u, v)}{D(\omega, t)}.$$

§ III. — Discontinuités du premier ordre.

D'une manière générale, nous désignerons par δ' l'accroissement brusque qu'éprouve une quantité discontinue, quand on franchit la ligne de discontinuité Σ en passant de la région 1 à la région 2 ; l'accent ayant pour but d'éviter toute confusion avec le symbole δ employé dans le calcul des variations. Supposons que Σ soit une onde de choc, c'est-à-dire une ligne de discontinuité du premier ordre : les expressions (4) et (5) des coordonnées coïncident deux à deux tout le long de Σ, mais il n'en est plus de même d'une au moins des dérivées partielles $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, t)}\cdot$ Suivant la notation que nous venons d'adopter, nous poserons donc

$$\delta' \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial x_2}{\partial u} - \frac{\partial x_1}{\partial u},$$

et l'on peut évidemment intervertir à volonté les caractéristiques ∂ et δ'.

L'onde Σ étant du premier ordre, nous avons

$$\delta'(x, y, z) = 0 \tag{7}$$

et ces égalités doivent avoir lieu tout le long de Σ à l'instant t, c'est-à-dire qu'étant vérifiées par les valeurs (u, v, t) des paramètres, elles doivent l'être encore par les valeurs $(u + du, v + dv, t)$, du et dv ayant pour expressions

$$d(u, v) = \frac{\partial(u, v)}{\partial\omega} d\omega; \tag{8}$$

il en résulte qu'on doit avoir

$$\frac{\partial\, \delta' x}{\partial u} du + \frac{\partial\, \delta' x}{\partial v} dv = 0,$$

ou

$$\delta' \frac{\partial x}{\partial u} du + \delta' \frac{\partial x}{\partial v} dv = 0, \tag{9}$$

ainsi que deux égalités analogues pour y et z. Dès lors, d'après les

égalités (3) et (8), nous pourrons écrire

$$\frac{\delta' \dfrac{\partial x}{\partial u}}{\alpha} = \frac{\delta' \dfrac{\partial x}{\partial v}}{\beta} = \lambda,$$

λ désignant une certaine fonction de (u, v, t). En appelant μ et ν deux autres fonctions analogues, nous aurons donc les deux formules triples

$$(10) \qquad \left\{ \begin{aligned} \delta' \frac{\partial(x, y, z)}{\partial u} &= \alpha(\lambda, \mu, \nu), \\ \delta' \frac{\partial(x, y, z)}{\partial v} &= \beta(\lambda, \mu, \nu). \end{aligned} \right.$$

Ces égalités, qui expriment qu'à chaque instant le lieu des points de discontinuité pour les dérivées partielles est une courbe continue tracée sur la membrane, s'appellent, d'après M. Hadamard ([1]), les *conditions identiques*.

Il reste à exprimer que ce lieu des points de discontinuité continue d'être une courbe unique tracée sur la membrane quand t varie ; nous obtiendrons ainsi ce que M. Hadamard ([2]) appelle les *conditions cinématiques de compatibilité*. Pour cela, il faut écrire que les égalités (7) sont vérifiées, non seulement par les valeurs (u, v, t) des paramètres, mais aussi par les valeurs $(u + du, v + dv, t + dt)$, du et dv ayant pour expressions

$$(11) \qquad d(u, v) = \frac{\partial(u, v)}{\partial \omega} d\omega + \frac{\partial(u, v)}{\partial t} dt.$$

Nous avons donc

$$\delta' \frac{\partial x}{\partial u} du + \delta' \frac{\partial x}{\partial v} dv + \delta' \frac{\partial x}{\partial t} dt = 0,$$

ainsi que deux égalités analogues pour y et z. Si l'on remplace dans cette égalité du et dv par leurs valeurs (11), le coefficient de $d\omega$ est nul en vertu des égalités (8) et (9) et il vient

$$\delta' \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \delta' \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} + \delta' \frac{\partial x}{\partial t} = 0.$$

([1]) J. Hadamard. *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'Hydrodynamique*, Ch. II, § 2.

([2]) J. Hadamard, *Loc. cit.*, Ch. II, § 3.

Tenons compte enfin des formules (6) et (10), il viendra

$$\delta' \frac{\partial x}{\partial t} = -\lambda V_0.$$

Nous aurions deux formules analogues pour y et z ; de là les conditions cinématiques de compatibilité

$$(12) \qquad \delta' \frac{\partial(x, y, z)}{\partial t} = -(\lambda, \mu, \nu) V_0.$$

Les égalités (10) et (12) nous montrent qu'une onde de choc est caractérisée en chacun de ses points par trois quantités λ, μ, ν, qu'on peut regarder comme les composantes d'un vecteur appelé *discontinuité* au point considéré, et par la vitesse de propagation V_0 de l'image de l'onde.

§ IV. — Expressions des dérivées ($x'_u, x'_v, \ldots, z'_v$) en fonction des cosinus directeurs de la normale et de la tangente à l'onde.

En un point M de l'onde Σ, menons la demi-normale Mn_2 à l'onde située dans le plan tangent en M à la région 2 et menée vers cette région. Nous allons calculer les cosinus directeurs a_2, b_2, c_2 de cette demi-normale; pour cela, il y a bien peu à changer au calcul général de a, b, c, qui a été fait au paragraphe I du Chapitre I.

Au lieu de la formule (5) de ce Chapitre, nous aurons

$$(13) \qquad a_2 = \frac{(x'_u)_2\, du + (x'_v)_2\, dv}{\sqrt{E_2\, du^2 + 2F_2\, du\, dv + G_2\, dv^2}}.$$

Avec les mêmes notations, appelons $x + Dx$, $y + Dy$, $z + Dz$ les coordonnées d'un point M″ de Σ voisin de M et correspondant à la valeur $\omega + D\omega$ de la variable ω. On aura encore

$$(14) \qquad Dx = \left(x'_u \frac{\partial u}{\partial \omega} + x'_v \frac{\partial v}{\partial \omega}\right) D\omega,$$

formule dans laquelle les dérivées x'_u et x'_v peuvent être prises toutes deux indifféremment mais simultanément soit sur la région 1, soit sur

la région 2. En effet, il résulte des conditions identiques (10) qu'on a, en vertu des formules (3),

$$(x'_u)_1 \frac{\partial u}{\partial \omega} + (x'_v)_1 \frac{\partial v}{\partial \omega} = (x'_u)_2 \frac{\partial u}{\partial \omega} + (x'_v)_2 \frac{\partial v}{\partial \omega},$$

ce qui démontre la proposition énoncée. Dorénavant, quand, dans une égalité, des quantités dépendant des dérivées du premier ordre pourront être affectées indifféremment et simultanément de l'indice 1 ou de l'indice 2, nous n'écrirons pas ces indices.

Avant d'aller plus loin, nous allons tirer de l'égalité précédente cette conséquence que k reste continu à la traversée de l'onde. En effet, d'après s cette égalité et l'égalité (14), l'élément linéaire $Ds = MM''$ suivant l'onde a la même valeur suivant qu'on y affecte les dérivées en u et v de l'indice 1 ou de l'indice 2; comme on a, d'autre part, $Ds = k d\sigma$, $d\sigma$ désignant l'image mm'' de l'élément Ds, image qui a une valeur indépendante des indices, on a forcément

$$(15) \qquad \delta' k = 0.$$

Cela posé, revenons au calcul de a_2, b_2, c_2 : la condition de perpendicularité des éléments MM' et MM'' s'écrira

$$\sum \left(x'_u \frac{\partial u}{\partial \omega} + x'_v \frac{\partial v}{\partial \omega} \right) [(x'_u)_2 \, du + (x'_v)_2 \, dv] = 0$$

et le calcul s'achèvera comme au Chapitre I; nous trouverons ainsi

$$(16) \qquad a_2 = \frac{(x'_u)_2 (G_2 \alpha - F_2 \beta) + (x'_v)_2 (-F_2 \alpha + E_2 \beta)}{k H_2},$$

avec deux formules analogues pour b_2 et c_2. Nous ne mettons pas d'indice au bas de k en vertu de la convention faite.

Soient a_1, b_1, c_1 les cosinus directeurs de la demi-normale Mn_1 menée en M à l'onde Σ dans le plan tangent en M à la région 1 et dirigée vers l'extérieur de cette région. Un calcul tout pareil au précédent nous donnerait

$$(16') \qquad a_1 = \frac{(x'_u)_1 (G_1 \alpha - F_1 \beta) + (x'_v)_1 (-F_1 \alpha + E_1 \beta)}{k H_1}$$

et deux formules analogues pour b_1 et c_1. En vertu de la convention

faite relativement aux indices, les formules (16) et (16') et leurs analogues rentrent ainsi dans les formules générales

$$(17)\quad \begin{cases} a = \dfrac{x'_u(G\alpha - F\beta) + x'_v(-F\alpha + E\beta)}{kH}, \\ b = \dfrac{y'_u(G\alpha - F\beta) + y'_v(-F\alpha + E\beta)}{kH}, \\ c = \dfrac{z'_u(G\alpha - F\beta) + z'_v(-F\alpha + E\beta)}{kH}, \end{cases}$$

que nous avons données au Chapitre I; nous poserons

$$\delta' a = a_2 - a_1, \qquad \delta' b = b_2 - b_1, \qquad \delta' c = c_2 - c_1.$$

Dorénavant, nous réserverons exclusivement les notations (a, b, c) pour désigner les cosinus directeurs de la demi-normale à l'onde menée dans le plan tangent et vers la région 2.

Soient a', b', c' les cosinus directeurs de la tangente en M à l'onde Σ menée, pour fixer les idées, dans le sens des ω croissants : on aura

$$(a', b', c') = \frac{D(x, y, z)}{Ds},$$

ou, d'après la formule (14) et puisqu'on suppose $D\omega > 0$,

$$a' = \frac{x'_u \dfrac{\partial u}{\partial \omega} + x'_v \dfrac{\partial v}{\partial \omega}}{\sqrt{\sum \left(x'_u \dfrac{\partial u}{\partial \omega} + x'_v \dfrac{\partial v}{\partial \omega}\right)^2}}.$$

Tenons compte des formules (3) et de ce que

$$\sqrt{\Sigma(\beta x'_u - \alpha x'_v)^2} = k,$$

il viendra la première des égalités

$$(18)\quad \begin{cases} ka' = \beta x'_u - \alpha x'_v, \\ kb' = \beta y'_u - \alpha y'_v, \\ kc' = \beta z'_u - \alpha z'_v, \end{cases}$$

les deux autres s'obtenant d'une manière analogue.

Les formules (17) et (18) permettent d'exprimer les dérivées par rapport à u et à v des coordonnées en fonction des cosinus directeurs

de la normale et de la tangente à l'onde. Le calcul n'offre aucune difficulté ; si nous posons

$$(19)\qquad \begin{cases} m = \quad G\alpha - F\beta, \\ n = -F\alpha + E\beta, \end{cases}$$

d'où il résulte que

$$(20)\qquad m\alpha + n\beta = k^2,$$

nous trouverons

$$(21)\qquad \begin{cases} k x'_u = \alpha H a + n a', \\ k y'_u = \alpha H b + n b', \\ k z'_u = \alpha H c + n c'; \end{cases}$$

$$(21)'\qquad \begin{cases} k x'_v = \beta H a - m a', \\ k y'_v = \beta H b - m b', \\ k z'_v = \beta H c - m c', \end{cases}$$

formules dont nous ferons par la suite un usage fréquent.

§ V. — Variations des quantités dépendant des dérivées du premier ordre.

Les formules établies dans les deux derniers paragraphes vont nous permettre de donner une forme simple aux variations δ' des principales fonctions dépendant des dérivées du premier ordre, et qui sont

$$E,\quad F,\quad G,\quad H,\quad \rho,\quad m,\quad n,\quad a,\quad b,\quad c.$$

De la première des formules (2) du Chapitre I on déduit

$$\delta' E = \Sigma \delta' (x'_u)^2 = \Sigma [(x'_u)_1 + (x'_u)_2] \delta' x'_u ;$$

mais, d'après les formules (10) et (21), on a

$$\delta' x'_u = \alpha\lambda,$$

$$k[(x'_u)_1 + (x'_u)_2] = \alpha(H_1 a_1 + H_2 a_2) + (n_1 + n_2) a' ;$$

il vient donc

$$(22)\qquad k\,\delta' E = \alpha[\alpha(H_1 \Sigma a_1 \lambda + H_2 \Sigma a_2 \lambda) + (n_1 + n_2) \Sigma a' \lambda].$$

On aurait de même

$$(23) \qquad k\delta' G = \beta[\beta(H_1 \Sigma a_1 \lambda + H_2 \Sigma a_2 \lambda) - (m_1 + m_2)\Sigma a' \lambda].$$

Soient, d'autre part, A et B deux quantités discontinues le long de Σ; on a la suite d'identités

$$(24) \qquad \begin{aligned} \delta'(AB) = A_2 B_2 - A_1 B_1 &= A_1 \delta' B + B_2 \delta' A = A_2 \delta' B + B_1 \delta' A \\ &= \frac{1}{2}[(A_1 + A_2)\delta' B + (B_1 + B_2)\delta' A].\end{aligned}$$

La deuxième des formules (2) du Chapitre I nous donne ainsi

$$\delta' F = \Sigma \delta'(x'_u x'_v) = \frac{1}{2}\sum \{[(x'_u)_1 + (x'_u)_2]\delta' x'_v + [(x'_v)_1 + (x'_v)_2]\delta' x'_u\},$$

ce qui peut s'écrire, d'après les formules (10), (21) et (21′),

$$(25) \quad k\delta' F = \alpha\beta(H_1 \Sigma a_1 \lambda + H_2 \Sigma a_2 \lambda) + \frac{-(m_1 + m_2)\alpha + (n_1 + n_2)\beta}{2}\Sigma a' \lambda.$$

Passons au calcul de $\delta' H$. La quatrième des égalités (2) du Chapitre I jointe aux identités (24) nous donne

$$2\delta' H^2 = (G_1 + G_2)\delta' E - 2(F_1 + F_2)\delta' F + (E_1 + E_2)\delta' G;$$

en remplaçant dans cette égalité $\delta'(E, F, G)$ par leurs expressions (22), (23), (25), les termes en $\Sigma a' \lambda$ se détruisent, et il reste

$$(26) \qquad (H_1 + H_2)\delta' H = k(H_1 \Sigma a_1 \lambda + H_2 \Sigma a_2 \lambda).$$

Nous avons vu (Chap. I, § II) qu'on a en un point quelconque de la membrane

$$\rho H = \rho_0 H_0,$$

l'indice zéro se rapportant à un état initial choisi une fois pour toutes. En appliquant cette égalité à deux points infiniment voisins situés de part et d'autre de la courbe Σ, et en passant au cas limite où ces deux points se confondraient sur cette courbe, il viendra

$$(27) \qquad \rho_1 H_1 = \rho_2 H_2 = \rho_0 H_0,$$

égalités d'où nous déduisons

$$(27') \qquad \frac{H_1}{\rho_2} = \frac{H_2}{\rho_1} = \frac{H_1 + H_2}{\rho_1 + \rho_2} = \frac{\rho_0 H_0}{\rho_1 \rho_2}.$$

Nous pouvons ainsi exprimer H_1 et H_2 en fonction de ρ_1, ρ_2 et de $\rho_0 H_0$.

Mais la première des égalités (27) n'est autre que

$$\delta'(\rho H) = 0. \tag{28}$$

ce que nous pouvons écrire encore, d'après les identités (24),

$$(H_1 + H_2)\delta'\rho + (\rho_1 + \rho_2)\delta' H = 0.$$

Remplaçons $\delta' H$ par sa valeur tirée de l'égalité (26) et tenons compte des formules (27'), nous obtenons

$$\frac{\rho_0 H_0}{\rho_1 \rho_2}\delta'\rho = -k\frac{\rho_2 \Sigma a_1 \lambda + \rho_1 \Sigma a_2 \lambda}{\rho_1 + \rho_2}. \tag{29}$$

Cette égalité tient lieu de l'équation de continuité dans l'étude des discontinuités du premier ordre.

Les variations des quantités m et n se calculent aisément en partant des formules (19), (22), (23), (25); les termes en $\Sigma a_1 \lambda$, $\Sigma a_2 \lambda$ disparaissent et l'on trouve

$$\delta' m = -k\beta \Sigma a' \lambda, \qquad \delta' n = k\alpha \Sigma a' \lambda. \tag{30}$$

On a donc bien, d'après l'égalité (20),

$$\delta' k^2 = \alpha \delta' m + \beta \delta' n = 0,$$

comme nous avions déjà eu l'occasion de le démontrer.

Il reste, enfin, à calculer les variations $\delta'(a, b, c)$ des cosinus directeurs de la normale à l'onde; posons pour abréger

$$X = m x'_u + n x_v$$

et la première des formules (17) s'écrira

$$ka = \frac{X}{H}.$$

Nous avons donc

$$k\delta' a = \frac{X_1 + \delta' X}{H_1 + \delta' H} - \frac{X_1}{H_1} = \frac{H_1 \delta' X - X_1 \delta' H}{H_1(H_1 + \delta' H)} = \frac{\delta' X}{H_2} - ka_1 \frac{\delta' H}{H_2}.$$

Mais l'égalité (28) nous donne encore, d'après les identités (24),

$$\rho_1 \delta' H + H_2 \delta' \rho = \rho_2 \delta' H + H_1 \delta' \rho = 0;$$

nous pouvons donc écrire la première des égalités

$$k\delta' a = \frac{\delta' N}{H_2} + k a_1 \frac{\delta' \rho}{\rho_1},$$
$$k\delta' a = \frac{\delta' N}{H_1} + k a_2 \frac{\delta' \rho}{\rho_2},$$

la deuxième s'obtenant d'une manière analogue. Calculons $\delta' N$. D'après les identités (24), nous avons

$$\delta' N = m_1 \delta'(x'_u) + (x'_u)_2 \delta' m + n_1 \delta'(x'_v) + (x'_v)_2 \delta' n;$$

tenons compte des formules (10), (20), (21), (21'), (30) et nous trouverons facilement

$$\delta' N = k^2(\lambda - a' \Sigma a' \lambda).$$

Substituons alors cette expression dans celles qui viennent d'être obtenues pour $k\delta' a$ et nous trouverons la première des doubles égalités

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned} \delta' a &= k\frac{\lambda - a'\Sigma a'\lambda}{H_2} + a_1 \frac{\delta'\rho}{\rho_1} = k\frac{\lambda - a'\Sigma a'\lambda}{H_1} + a_2 \frac{\delta'\rho}{\rho_2},\\ \delta' b &= k\frac{\mu - b'\Sigma a'\lambda}{H_2} + b_1 \frac{\delta'\rho}{\rho_1} = k\frac{\mu - b'\Sigma a'\lambda}{H_1} + b_2 \frac{\delta'\rho}{\rho_2},\\ \delta' c &= k\frac{\nu - c'\Sigma a'\lambda}{H_2} + c_1 \frac{\delta'\rho}{\rho_1} = k\frac{\nu - c'\Sigma a'\lambda}{H_1} + c_2 \frac{\delta'\rho}{\rho_2},\end{aligned}\right.$$

les deux autres s'obtenant d'une manière analogue.

§ VI. — Vitesses de propagation d'une onde de choc.

Considérons, sur la membrane à l'instant t, l'onde Σ et la courbe Σ', lieu des points de la membrane à l'instant t qui seront atteints par l'onde à l'instant $t + dt$. Supposons que cette courbe Σ' soit située dans la région 2 : on dira alors que l'onde se propage de la région 1 vers la région 2, ou encore que le mouvement 1 se propage dans le mouvement 2. Dans ces conditions, la demi-normale Mn_2 menée à

l'onde Σ au point M dans le plan tangent en M à la région 2 et vers cette région coupe la courbe Σ' en un point M'_2. Soit $dN_2 = \overline{MM'_2}$ la valeur algébrique du segment MM_2 compté positivement suivant la demi-normale ; la quantité

$$\vartheta_2 = \frac{dN_2}{dt}$$

s'appelle la *vitesse de propagation de l'onde* se propageant de la région 1 vers la région 2. Nous allons calculer cette vitesse qui, d'après les hypothèses faites, est forcément positive.

Soient $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$ les coordonnées du point M'_2 correspondant aux valeurs $(u+du, v+dv)$ des paramètres (u, v) ; puisque la courbe Σ' est tracée sur la membrane à l'instant t, pour calculer $d(x, y, z)$, on doit laisser t constant dans les équations (5) qui représentent la région 2 et ne le faire varier que dans les équations (2). On obtient ainsi

$$dx = (x'_u)_2\, du + (x'_v)_2\, dv,$$

avec

$$d(u, v) = \frac{\partial(u, v)}{\partial\omega} d\omega + \frac{\partial(u, v)}{\partial t} dt, \tag{11}$$

et l'on aurait deux expressions analogues pour dy et dz ; nous avons donc

$$dx = a_2\, dN_2 = \left[(x'_u)_2 \frac{\partial u}{\partial\omega} + (x'_v)_2 \frac{\partial v}{\partial\omega}\right] d\omega + \left[(x'_u)_2 \frac{\partial u}{\partial t} + (x'_v)_2 \frac{\partial v}{\partial t}\right] dt.$$

Tenons compte des formules (3) et (18) et nous obtiendrons, après avoir divisé par dt, la première des égalités

$$a_2 \vartheta_2 = kra' \frac{d\omega}{dt} + (x'_u)_2 \frac{\partial u}{\partial t} + (x'_v)_2 \frac{\partial v}{\partial t},$$

$$b_2 \vartheta_2 = krb' \frac{d\omega}{dt} + (y'_u)_2 \frac{\partial u}{\partial t} + (y'_v)_2 \frac{\partial v}{\partial t},$$

$$c_2 \vartheta_2 = krc' \frac{d\omega}{dt} + (z'_u)_2 \frac{\partial u}{\partial t} + (z'_v)_2 \frac{\partial v}{\partial t},$$

les deux autres s'obtenant de la même manière.

Multiplions-les alors respectivement par a_2, b_2, c_2 et ajoutons-les

membre à membre : le coefficient de $\frac{d\omega}{dt}$ est nul et il reste

$$\vartheta_2 = \sum a_2 \left[(x'_u)_2 \frac{\partial u}{\partial t} + (x'_v)_2 \frac{\partial v}{\partial t} \right].$$

En remplaçant a_2, b_2, c_2 par leurs valeurs fournies par les formules (17), où les quantités discontinues à la traversée de l'onde sont affectées de l'indice 2, on trouve aisément

$$\vartheta_2 = \frac{H_2}{k} \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial t} + \beta \frac{\partial v}{\partial t} \right),$$

et, d'après la formule (6),

(32) $$k \vartheta_2 = H_2 V_0.$$

Nous avons supposé que la courbe Σ' se trouvait dans la région 2 ; si elle se trouve dans la région 1, on dit que le mouvement 2 se propage dans le mouvement 1. Dans ces conditions, la courbe Σ' rencontre en un point M'_1 le prolongement de la demi-normale Mn_1 menée en M à la courbe Σ dans le plan tangent en M à la région 1 et vers l'extérieur de cette région. Soit $dN_1 = \overline{MM_1}$ la valeur algébrique du segment MM'_1 compté positivement suivant la demi-normale ; la quantité

$$\vartheta_1 = \frac{dN_1}{dt}$$

s'appelle la *vitesse de propagation de l'onde* se propageant de la région 2 vers la région 1. D'après les hypothèses faites, cette vitesse est forcément négative.

Un calcul tout à fait analogue au précédent nous donnerait alors

(32') $$k \vartheta_1 = H_1 V'_0,$$

en mettant V'_0 à la place de V_0 pour désigner la vitesse de propagation de l'image de l'onde dans le plan des (u, v) et afin d'éviter toute confusion, car ces vitesses V_0 et V'_0 sont de signes contraires.

Mais, supposons qu'on ait

$$V_0 + V'_0 = 0;$$

alors, les égalités (32) et (32'), multipliées respectivement par ρ_2 et ρ_1, puis ajoutées membre à membre, donnent, d'après la première des égalités (27),

$$\rho_1 \mathfrak{V}_1 + \rho_2 \mathfrak{V}_2 = 0. \tag{33}$$

Nous obtenons ainsi l'extension au cas des membranes d'une relation établie en Hydrodynamique par Riemann dans le cas des ondes planes et généralisée par M. Jouguet [1].

§ VII. — Discontinuités du second ordre.

Supposons, maintenant, que la courbe Σ tracée sur la membrane soit une onde du second ordre par rapport aux coordonnées, ou, comme on dit encore, une onde d'accélération : les dérivées du premier ordre de x, y, z resteront continues à la traversée de l'onde et, avec la notation adoptée, nous aurons

$$\delta \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, t)} = 0. \tag{34}$$

Dès lors, la membrane admettra un plan tangent unique en chaque point de Σ, les demi-normales Mn_1 et Mn_2 se confondront en une demi-normale unique, et les formules (17), (18), (19), (20), (21), (21') devront être utilisées telles quelles, sans indice au bas des quantités qui tout à l'heure étaient discontinues.

D'autre part, les égalités (32) et (32') se réduisent à une formule unique

$$k\mathfrak{V} = \mathrm{H}\mathrm{V}_0, \tag{35}$$

en appelant $\mathfrak{V}$ la vitesse de propagation de l'onde qui est positive ou négative suivant que le mouvement 1 se propage dans le mouvement 2 ou inversement.

Revenons aux égalités (34) et écrivons qu'elles sont vérifiées tout

---

[1] P. Duhem, *Recherches sur l'Hydrodynamique*, 1re série, deuxième Partie, Ch. I, § I.

le long de la courbe Σ à l'instant t. Nous aurons, par exemple,

$$(36)\quad \begin{cases} \delta' \dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2} du + \delta' \dfrac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} dv = 0, \\ \delta' \dfrac{\partial^2 x}{\partial v\, \partial u} du + \delta' \dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2} dv = 0, \end{cases}$$

avec

$$(8)\quad d(u, v) = \frac{\partial(u, v)}{\partial\omega} d\omega.$$

Si nous tenons compte des formules (3), les égalités (36) nous enseignent qu'il existe en chaque point de Σ une quantité λ, telle qu'on ait

$$\frac{\delta' \dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2}}{\alpha} = \frac{\delta' \dfrac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v}}{\beta} = \lambda\alpha,$$

$$\frac{\delta' \dfrac{\partial^2 x}{\partial v\, \partial u}}{\alpha} = \frac{\delta' \dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2}}{\beta} = \lambda\beta.$$

Nous aurions pour y et z des égalités analogues; si donc nous désignons par μ et ν deux autres quantités, nous obtiendrons les formules

$$(37)\quad \begin{cases} \delta' \dfrac{\partial^2(x, y, z)}{\partial u^2} = \alpha^2(\lambda, \mu, \nu), \\ \delta' \dfrac{\partial^2(x, y, z)}{\partial u\, \partial v} = \alpha\beta(\lambda, \mu, \nu), \\ \delta' \dfrac{\partial^2(x, y, z)}{\partial v^2} = \beta^2(\lambda, \mu, \nu). \end{cases}$$

En écrivant enfin que les autres égalités (34)

$$(38)\quad \delta' \frac{\partial(x, y, z)}{\partial t} = 0$$

sont vérifiées tout le long de Σ à l'instant t, nous aurons pour la première

$$\delta' \frac{\partial^2 x}{\partial t\, \partial u} du + \delta' \frac{\partial^2 x}{\partial t\, \partial v} dv = 0,$$

du et dv étant donnés par la double formule (8); d'après les for-

mules (3), nous pouvons donc écrire

$$\delta' \frac{\partial^2 x}{\partial t\, \partial u} \beta - \delta' \frac{\partial^2 x}{\partial t\, \partial v} \alpha = 0. \tag{39}$$

Cela posé, il reste à exprimer que le lieu des points de discontinuité continue d'être une courbe tracée sur la membrane quand t varie. Pour cela, il faut exprimer que les égalités (34) sont vérifiées, non seulement par les valeurs (u, v, t) des paramètres, mais aussi par les valeurs $(u + du, v + dv, t + dt)$, du et dv ayant pour expressions

$$d(u, v) = \frac{\partial(u, v)}{\partial \omega} d\omega + \frac{\partial(u, v)}{\partial t} dt; \tag{11}$$

nous obtenons ainsi des égalités telles que

$$\delta' \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} du + \delta' \frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} dv + \delta' \frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial t} dt = 0,$$
$$\delta' \frac{\partial^2 x}{\partial v\, \partial u} du + \delta' \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} dv + \delta' \frac{\partial^2 x}{\partial v\, \partial t} dt = 0.$$

Si nous remplaçons dans ces égalités du et dv par leurs valeurs (11), le coefficient de $d\omega$ est nul d'après les égalités (36) et (8), et il reste

$$\delta' \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial t} + \delta' \frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} \frac{\partial v}{\partial t} + \delta' \frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial t} = 0,$$
$$\delta' \frac{\partial^2 x}{\partial v\, \partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \delta' \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial t} + \delta' \frac{\partial^2 x}{\partial v\, \partial t} = 0.$$

Tenons compte enfin des égalités (37) et (6), nous aurons

$$\alpha\lambda V_0 + \delta' \frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial t} = 0, \qquad \beta\lambda V_0 + \delta' \frac{\partial^2 x}{\partial v\, \partial t} = 0;$$

résultat qui vérifie identiquement l'égalité (39). Nous aurions des résultats semblables pour y et z; de là, les deux groupes de formules

$$\left\{ \begin{aligned} \delta' \frac{\partial^2 (x, y, z)}{\partial u\, \partial t} &= -\alpha(\lambda, \mu, \nu) V_0, \\ \delta' \frac{\partial^2 (x, y, z)}{\partial v\, \partial t} &= -\beta(\lambda, \mu, \nu) V_0. \end{aligned} \right. \tag{40}$$

Écrivons enfin que les formules (38) sont vérifiées tout le long

de l'onde Σ et à chaque instant ; nous aurons, pour la première de ces formules,

$$\delta' \frac{\partial^2 x}{\partial t\, \partial u}\, du + \delta' \frac{\partial^2 x}{\partial t\, \partial v}\, dv + \delta' \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\, dt = 0.$$

Si l'on remplace du et dv par leurs valeurs (11), le coefficient de $d\omega$ est nul en vertu des formules (3) et (40), et il reste

$$\delta' \frac{\partial^2 x}{\partial t\, \partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \delta' \frac{\partial^2 x}{\partial t\, \partial v} \frac{\partial v}{\partial t} + \delta' \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0.$$

Tenons compte alors des égalités (6) et (40), et nous obtiendrons la première des formules

(41) $$\delta' \frac{\partial^2 (x, y, z)}{\partial t^2} = (\lambda, \mu, \nu)\, V_0^2,$$

les deux autres s'obtenant d'une manière toute semblable.

Ainsi, tout comme une discontinuité du premier ordre, une discontinuité du second ordre est caractérisée en chaque point de l'onde par un vecteur discontinuité (λ, μ, ν) et la vitesse de propagation V_0 de l'image de l'onde.

§ VIII. — Variations des quantités dépendant des dérivées du second ordre des coordonnées.

Les formules obtenues au précédent paragraphe vont nous permettre de calculer aisément les variations des dérivées partielles du premier ordre des quantités

$$E, \quad F, \quad G, \quad H, \quad \rho, \quad \Theta.$$

Tout d'abord, les formules (2) du Chapitre I nous donnent

$$\delta' \frac{\partial E}{\partial u} = 2 \sum x'_u \delta' \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \qquad \delta' \frac{\partial E}{\partial v} = 2 \sum x'_u \delta' \frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v}, \qquad \delta' \frac{\partial E}{\partial t} = 2 \sum x'_u \delta' \frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial t},$$

$$\delta' \frac{\partial F}{\partial u} = \sum \left(x'_v \delta' \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + x'_u \delta' \frac{\partial^2 x}{\partial v\, \partial u} \right),$$

$$\delta' \frac{\partial F}{\partial v} = \sum \left(x'_v \delta' \frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} + x'_u \delta' \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \right),$$

$$\delta' \frac{\partial F}{\partial t} = \sum \left(x'_v \delta' \frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial t} + x'_u \delta' \frac{\partial^2 x}{\partial v\, \partial t} \right),$$

$$\delta' \frac{\partial G}{\partial u} = 2 \sum x'_v \delta' \frac{\partial^2 x}{\partial v\, \partial u}, \qquad \delta' \frac{\partial G}{\partial v} = 2 \sum x'_v \delta' \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}, \qquad \delta' \frac{\partial G}{\partial t} = 2 \sum x'_v \delta' \frac{\partial^2 x}{\partial v\, \partial t}.$$

Tenons compte, maintenant, des formules (21), (21′) et des formules (37) et (40) : les neuf égalités précédentes pourront se condenser dans les trois formules triples

$$(42)\quad \begin{cases} k\delta' \dfrac{\partial E}{\partial(u, v, t)} = 2\alpha(\alpha_\cdot \beta_\cdot - V_0)(\alpha H \Sigma a\lambda + n \Sigma a'\lambda), \\ k\delta' \dfrac{\partial F}{\partial(u, v, t)} = (\alpha_\cdot \beta_\cdot - V_0)[2\alpha\beta H \Sigma a\lambda + (-m\alpha + n\beta)\Sigma a'\lambda], \\ k\delta' \dfrac{\partial G}{\partial(u, v, t)} = 2\beta(\alpha_\cdot \beta_\cdot - V_0)(\beta H \Sigma a\lambda - m \Sigma a'\lambda). \end{cases}$$

Cela posé, la quatrième des formules (2) du Chapitre I nous donne

$$2H\delta' \frac{\partial H}{\partial u} = G\delta' \frac{\partial E}{\partial u} - 2F\delta' \frac{\partial F}{\partial u} + E\delta' \frac{\partial G}{\partial u},$$

ainsi que deux égalités analogues pour les dérivées par rapport à v et à t. En y remplaçant les variations des dérivées de E, F, G par leurs valeurs (42), nous obtiendrons la formule triple

$$(43)\qquad \delta' \frac{\partial H}{\partial(u, v, t)} = (\alpha_\cdot \beta_\cdot - V_0) k \Sigma a\lambda.$$

Enfin, l'équation de continuité $\rho H = \rho_0 H_0$ nous donne

$$\rho\delta' \frac{\partial H}{\partial(u, v, t)} + H\delta' \frac{\partial \rho}{\partial(u, v, t)} = 0;$$

nous avons donc, en vertu des formules (43),

$$(44)\qquad \delta' \frac{\partial \rho}{\partial(u, v, t)} = -\frac{\rho}{H}(\alpha_\cdot \beta_\cdot - V_0) k \Sigma a\lambda.$$

Nous savons, d'après l'équation caractéristique

$$\Theta + \rho^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = 0,$$

que la tension Θ en un point de la membrane est une fonction finie de la densité ρ et de la température absolue T. D'après les formules (44), l'onde d'accélération considérée est du premier ordre pour la densité ; supposons qu'elle soit également du premier ordre pour la tempéra-

ture. On aura alors en chaque point de l'onde

$$\delta' T = 0,$$

une au moins des dérivées partielles du premier ordre de T étant discontinue à la traversée de l'onde. En raisonnant comme au paragraphe III du présent Chapitre, nous reconnaîtrions qu'il existe en chaque point de Σ une quantité τ telle qu'on ait

$$(45) \qquad \delta' \frac{\partial T}{\partial(u, v, t)} = (\alpha, \beta, -V_0)\tau.$$

Ce résultat obtenu, les dérivées de Θ sont liées à celles de ρ et de T par des relations de la forme

$$\frac{\partial \Theta}{\partial u} = \frac{\partial \Theta}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial u} + \frac{\partial \Theta}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial u};$$

nous en déduisons immédiatement les variations des dérivées de Θ qui sont, d'après les formules (44) et (45),

$$(46) \qquad \delta' \frac{\partial \Theta}{\partial(u, v, t)} = (\alpha, \beta, -V_0)\left(-\frac{\rho}{H} k \frac{\partial \Theta}{\partial \rho} \Sigma a\lambda + \frac{\partial \Theta}{\partial T}\tau\right).$$

§ IX. — Discontinuités d'ordre supérieur.

Les formules auxquelles nous sommes parvenus pour les discontinuités du second ordre se généralisent aisément. L'onde Σ étant supposée d'ordre n par rapport aux coordonnées x, y, z, toutes les dérivées de ces fonctions par rapport à (u, v, t) jusqu'à celles d'ordre $n - 1$ inclusivement sont continues quand on passe de la région 1 à la région 2; mais il n'en est plus de même d'une au moins des dérivées d'ordre n, qui subit une variation brusque à la traversée de l'onde.

On reconnaît alors que les variations des dérivées d'ordre n des coordonnées sont exprimées par les formules

$$(47) \qquad \delta' \frac{\partial^n (x, y, z)}{\partial u^p \, \partial v^q \, \partial t^r} = \alpha^p \beta^q (-V_0)^r (\lambda, \mu, \nu) \qquad (p + q + r = n),$$

où λ, μ, ν désignent les composantes du vecteur discontinuité et V_0 la vitesse de propagation de l'image de l'onde.

L'onde est, en général, d'ordre $n-1$ par rapport aux quantités

$$E,\ F,\ G,\ H,\ \rho,$$

et l'on trouve les formules suivantes qui généralisent les formules (42), (43) et (44) :

$$(48)\quad \begin{cases} k\delta' \dfrac{\partial^{n-1}E}{\partial u^p\,\partial v^q\,\partial t^{r-1}} = 2\alpha^{p+1}\beta^q(-V_0)^{r-1}(\alpha H\Sigma a\lambda + n\Sigma a'\lambda), \\ k\delta' \dfrac{\partial^{n-1}F}{\partial u^p\,\partial v^q\,\partial t^{r-1}} = \alpha^p\beta^q(-V_0)^{r-1}[2\alpha\beta H\Sigma a\lambda + (-m\alpha + n\beta)\Sigma a'\lambda], \\ k\delta' \dfrac{\partial^{n-1}G}{\partial u^p\,\partial v^q\,\partial t^{r-1}} = 2\alpha^p\beta^{q+1}(-V_0)^{r-1}(\beta H\Sigma a\lambda - m\Sigma a'\lambda), \\ \delta' \dfrac{\partial^{n-1}H}{\partial u^p\,\partial v^q\,\partial t^{r-1}} = \alpha^p\beta^q(-V_0)^{r-1}k\Sigma a\lambda, \\ \delta' \dfrac{\partial^{n-1}\rho}{\partial u^p\,\partial v^q\,\partial t^{r-1}} = -\dfrac{\rho}{H}\alpha^p\beta^q(-V_0)^{r-1}k\Sigma a\lambda. \end{cases}$$

Enfin, si l'onde est aussi d'ordre $n-1$ pour T, il existe une quantité τ telle que

$$\delta' \frac{\partial^{n-1}T}{\partial u^p\,\partial v^q\,\partial t^{r-1}} = \alpha^p\beta^q(-V_0)^{r-1}\tau,$$

et les variations des dérivées de Θ sont données par la formule

$$\delta' \frac{\partial^{n-1}\Theta}{\partial u^p\,\partial v^q\,\partial t^{r-1}} = \alpha^p\beta^q(-V_0)^{r-1}\left(-\frac{\rho}{H}k\frac{\partial\Theta}{\partial\rho}\Sigma a\lambda + \frac{\partial\Theta}{\partial T}\tau\right).$$

CHAPITRE III.

LES ONDES DE CHOC (1).

§ I. — Emploi de l'équation fondamentale de l'énergétique.

Supposons qu'à l'instant t la membrane soit le siège d'une onde de choc Σ : traçons sur la membrane une courbe Γ la divisant en deux

(1) *Les ondes de choc dans le mouvement des membranes flexibles* (*Comptes rendus*, 18 mars 1912, t. CLIV, p. 759).

parties que nous désignerons par les indices a et b, et soient Γ_a et Γ_b les parties du contour Γ correspondant à chacune de ces deux régions; nous aurons, évidemment, $\Gamma = \Gamma_a + \Gamma_b$.

La courbe Γ' est tracée de telle sorte qu'entre les instants t et $t + dt$, l'onde se trouve tout entière dans la région a sans toucher la courbe Γ' en aucun point ; dans ces conditions et dans le même intervalle de temps, la discontinuité n'atteindra aucun point de la région b ni de son contour $\Gamma' + \Gamma_b$.

Soient C', C_a, C_b les images respectives dans le plan des (u, v) des courbes Γ', Γ_a, Γ_b tracées sur la membrane; nous désignerons par les mêmes indices a et b les deux régions du plan limitées par les contours $C' + C_a$, $C' + C_b$ et correspondant à celles déterminées sur la membrane par la courbe Γ'.

Cela posé, l'équation fondamentale de l'Énergétique

$$\delta\mathfrak{T}_e + \delta\mathfrak{T}_v + \delta\dot{J} - \delta_1 \Phi = 0, \tag{1}$$

que nous avons employée (Chap. I, § IV) pour obtenir les équations du mouvement, suppose les accélérations finies en chaque point du milieu considéré; il n'en sera plus de même si le milieu est le siège d'une onde de choc, car les accélérations des points rencontrés par l'onde sont infinies. Avec M. Duhem, nous ferons l'hypothèse que l'équation précédente est encore applicable dans ce cas, et c'est à très peu près la méthode employée par cet auteur en Hydrodynamique que nous allons suivre, pour étudier la propagation des ondes de choc dans les membranes ([1]).

Évaluons les différents termes de l'équation (1) : on a d'abord

$$\delta\mathfrak{T}_e = \int_C \Sigma \mathfrak{T}_x \,\delta x \, d\sigma + \int_{a+b} \Sigma X \,\delta x \, dm.$$

Les composantes de la vitesse étant discontinues en certains points de la région a, nous écrirons, pour les points de cette région, les composantes de l'accélération sous la forme

$$\frac{U' - U}{dt}, \quad \frac{V' - V}{dt}, \quad \frac{W' - W}{dt},$$

([1]) P. Duhem, *Recherches sur l'Hydrodynamique*, 2e Partie, Ch. I, § 2.

U′, V′, W′ désignant les composantes de la vitesse à l'instant $t+dt$; nous avons donc

$$\delta J = -\int_b \sum \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\,\delta x\,dm - \frac{1}{dt}\int_a \sum (U'-U)\,\delta x\,dm;$$

d'autre part, on a évidemment

$$\delta \mathcal{E}_v = \delta \mathcal{E}_{va} + \delta \mathcal{E}_{vb}, \qquad \delta_\Gamma \Phi = \delta_\Gamma \Phi_a + \delta_\Gamma \Phi_b;$$

l'équation (1) peut donc s'écrire

(2) $$A + B = 0,$$

en posant

(3) $$\left\{\begin{aligned} A = &-\int_a \Sigma (U'-U)\,\delta x\,dm \\ &+ dt\left(\delta \mathcal{E}_{va} - \delta_\Gamma \Phi_a + \int_{C_a} \Sigma \mathcal{E}_x\,\delta x\,d\sigma + \int_a \Sigma X\,\delta x\,dm\right), \\ B = &\; dt\left(\delta \mathcal{E}_{vb} - \delta_\Gamma \Phi_b + \int_{C_b} \Sigma \mathcal{E}_x\,\delta x\,d\sigma + \iint_b \Sigma \mathfrak{X}\,\delta x\,du\,dv\right). \end{aligned}\right.$$

Imposons tout d'abord à la membrane une modification virtuelle qui laisse immobiles tous les points de la région a et de son contour $\Gamma' + \Gamma_a$. On aura, dans cette modification, $A = 0$ et l'équation (2) se réduira à

$$B = 0.$$

Par des calculs analogues à ceux qui nous ont donné les équations générales du mouvement d'une membrane (Chap. I, § IV), nous verrions qu'on doit avoir :

1. En tout point de la région b

(4) $$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{X} + \dfrac{\partial(\mathfrak{M}\,x'_u - \mathfrak{N}\,x'_v)}{\partial u} + \dfrac{\partial(-\mathfrak{N}\,x'_u + \mathfrak{L}\,x'_v)}{\partial v} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{array}\right.$$

2. En tout point du contour C_b

(5) $$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{E}_x - \alpha(\mathfrak{M}\,x'_u - \mathfrak{N}\,x'_v) - \beta(-\mathfrak{N}\,x'_u + \mathfrak{L}\,x'_v) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Imposons maintenant à la membrane un déplacement virtuel quel-

conque; multiplions les équations (4) respectivement par $\delta(x, y, z)$, $du\,dv$, ajoutons-les membre à membre et intégrons dans la région b; il viendra

$$\int\int_b \sum \left[\mathcal{X} + \frac{\partial(\mathfrak{N}\,x'_u - \mathfrak{F}\,x'_v)}{\partial u} + \frac{\partial(-\mathfrak{F}\,x'_u + \mathfrak{L}\,x'_v)}{\partial v} \right] \delta x\,du\,dv = 0.$$

Ceci peut s'écrire encore, moyennant une intégration par parties,

$$(6)\quad \int\int_b \sum \left[\mathcal{X}\,\delta x - (\mathfrak{N}\,x'_u - \mathfrak{F}\,x'_v)\frac{\partial\,\delta x}{\partial u} - (-\mathfrak{F}\,x'_u + \mathfrak{L}\,x'_v)\frac{\partial\,\delta x}{\partial v} \right] du\,dv$$
$$+ \int_{C_b} \Sigma[\alpha(\mathfrak{N}\,x'_u - \mathfrak{F}\,x'_v) + \beta(-\mathfrak{F}\,x'_u + \mathfrak{L}\,x'_v)]\,\delta x\,d\sigma$$
$$+ \int_{C'} \Sigma[\alpha'(\mathfrak{N}\,x'_u - \mathfrak{F}\,x'_v) + \beta'(-\mathfrak{F}\,x'_u + \mathfrak{L}\,x'_v)]\,\delta x\,d\sigma = 0,$$

α', β' désignant les cosinus directeurs de la demi-normale au contour C' menée vers l'extérieur de b.

Mais, d'après l'égalité (31) du Chapitre I, on a

$$\delta\mathfrak{T}_{vb} - \delta_T\Phi_b = -\int\int \sum \left[(\mathfrak{N}\,x'_u - \mathfrak{F}\,x'_v)\frac{\partial\,\delta x}{\partial u} + (-\mathfrak{F}\,x'_u + \mathfrak{L}\,x'_v)\frac{\partial\,\delta x}{\partial v} \right] du\,dv;$$

l'égalité (6) peut donc s'écrire, en vertu des équations (5),

$$\delta\mathfrak{T}_{vb} - \delta_T\Phi_b + \int_{C_b} \Sigma\,\mathfrak{T}_x\,\delta x\,d\sigma + \int\int_b \Sigma\,\mathcal{X}\,\delta x\,du\,dv$$
$$+ \int_{C'} \Sigma[\alpha'(\mathfrak{N}\,x'_u - \mathfrak{F}\,x'_v) + \beta'(-\mathfrak{F}\,x'_u + \mathfrak{L}\,x'_v)]\,\delta x\,d\sigma = 0.$$

La deuxième des égalités (3) devient alors

$$B = -dt \int_{C'} \Sigma[\alpha'(\mathfrak{N}\,x'_u - \mathfrak{F}\,x'_v) + \beta'(-\mathfrak{F}\,x'_u + \mathfrak{L}\,x'_v)]\,\delta x\,d\sigma,$$

de sorte que l'équation (2) s'écrit

$$(7)\quad \int_a \Sigma(\mathrm{U'} - \mathrm{U})\,\delta x\,dm$$
$$- dt\left(\delta\mathfrak{T}_{va} - \delta_T\Phi_a + \int_{C_a} \Sigma\,\mathfrak{T}_x\,\delta x\,d\sigma + \int_a \Sigma\,\mathrm{X}\,\delta x\,dm\right)$$
$$+ dt \int_{C} \Sigma[\alpha'(\mathfrak{N}\,x'_u - \mathfrak{F}\,x'_v) + \beta'(-\mathfrak{F}\,x'_u + \mathfrak{L}\,x'_v)]\,\delta x\,d\sigma = 0.$$

C'est là l'équation dont nous allons faire usage en particularisant la région a.

Considérons, dans le plan des (u, v), les images s et s' de l'onde aux instants t et $t+dt$ (*fig.* 1); ces deux courbes déterminent entre elles, soit seules si elles sont fermées et ne rencontrent pas le contour C, soit avec une portion du contour C comme dans le cas de la figure, une région a_0 dont la largeur en un point m de s est $mm' = V_0\,dt$,

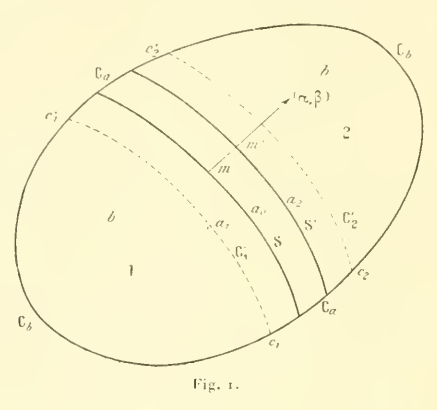


Fig. 1.

si la propagation se fait de la région 1 vers la région 2, ce que nous allons supposer pour fixer les idées. Désignons par ε_1, ε_2 des quantités finies positives et prenons comme courbe C' l'ensemble de deux courbes, l'une C_1' située dans la région 1 à la distance $\varepsilon_1\,dt$ de s, l'autre C_2' située dans la région 2 à la distance $\varepsilon_2\,dt$ de s' et de telle façon qu'en passant de la région 1 à la région 2, on rencontre les quatre courbes considérées dans l'ordre C_1', s, s', C_2'. Si nous appelons a_1 la région comprise entre C_1' et s, a_2 la région comprise entre s' et C_2', nous aurons

$$a = a_0 + a_1 + a_2.$$

Si l'image s de l'onde est une courbe fermée, il en sera de même des trois autres courbes et la région a n'aura aucune partie commune avec le contour C; on aura donc $C_a = 0$, $C_b = C$. Dans le cas de la figure, au contraire, où s rencontre le contour C, le contour C_a se

compose de deux parties, $c_1 c_2$, $c'_1 c'_2$, infiniment petites de l'ordre de dt.

Cela posé, évaluons les différents termes de l'équation (7) en commençant par le premier.

Dans la région a_0 qui appartient à la région 2, on a

$$dm = \rho_2 \mathrm{H}_2\, du\, dv = \rho \mathrm{H}\, du\, dv,$$

en vertu de l'équation (27) du Chapitre II et de la convention que nous avons faite (Chap. II, § IV) relativement aux indices; si nous prenons comme élément d'aire dans le plan des (u, v)

$$mm'\, d\sigma = \mathrm{V}_0\, dt\, d\sigma,$$

$d\sigma$ désignant l'élément d'arc de s, on aura

$$dm = \rho \mathrm{H} \mathrm{V}_0\, dt\, d\sigma.$$

D'autre part, les points de la région a_0 sont dans la région 2 à l'instant t et dans la région 1 à l'instant $t + dt$; avec la notation du Chapitre II, nous avons donc

$$\mathrm{U}' - \mathrm{U} = \mathrm{U}_1 - \mathrm{U}_2 = -\delta' \mathrm{U},$$

ce qui donne, pour le premier terme de l'équation (7) relatif à a_0,

$$-dt \int \Sigma\, \delta' \mathrm{U} \rho \mathrm{H} \mathrm{V}_0\, \delta x\, d\sigma,$$

l'intégration s'étendant à toute la courbe s. Les régions a_1 et a_2 donneraient chacune un terme analogue, mais où $\delta' \mathrm{U}$, au lieu d'être une quantité généralement finie, serait de l'ordre de dt. Ces deux termes sont donc négligeables et l'expression précédente représente bien à elle seule le premier terme de l'équation (7); comme elle est de l'ordre de $dt\, \delta\, (x, y, z)$, nous négligerons dans l'équation (7) les quantités d'un ordre supérieur.

Dès lors, l'expression

$$dt \left(-\delta_\mathrm{T} \Phi_a + \int_{\mathrm{C}_a} \Sigma\, \mathfrak{C}_x\, \delta x\, d\sigma + \int_a \Sigma\, \mathrm{X}\, \delta x\, dm \right)$$

est négligeable comme étant de l'ordre de $dt^2\, \delta(x, y, z)$.

Occupons-nous de la dernière intégrale de l'équation (7)' qui doit être étendue au contour $C' = C'_1 + C'_2$. Le long de C'_1, on a très sensiblement $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$, (α, β) désignant les cosinus directeurs de la demi-normale à s menée vers la région 2, et l'on peut, sans erreur sensible, intégrer le long de s en prenant pour $\delta(x, y, z)$ la valeur de ces mêmes quantités sur s puisqu'elles sont continues; le long de C'_2, on a très sensiblement $\alpha' = -\alpha$, $\beta' = -\beta$ et l'on peut, de même, substituer s à C'_2 comme chemin d'intégration. Il viendra donc

$$\begin{aligned}
&\int_{C'} \Sigma[\alpha'(\mathfrak{M} x'_u - \mathfrak{N} x'_v) + \beta'(-\mathfrak{N} x'_u + \mathfrak{P} x'_v)]\, \delta x\, d\sigma \\
&= \int \Sigma[\alpha(\mathfrak{M} x'_u - \mathfrak{N} x'_v) + \beta(-\mathfrak{N} x'_u + \mathfrak{P} x'_v)]_1\, \delta x\, d\sigma \\
&\quad - \int \Sigma[\alpha(\mathfrak{M} x'_u - \mathfrak{N} x'_v) + \beta(-\mathfrak{N} x'_u + \mathfrak{P} x'_v)]_2\, \delta x\, d\sigma.
\end{aligned}$$

les deux dernières intégrations s'étendant à la courbe s. Posons alors, pour simplifier,

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned}
Q_x &= \alpha(\mathfrak{M} x'_u - \mathfrak{N} x'_v) + \beta(-\mathfrak{N} x'_u + \mathfrak{P} x'_v),\\
Q_y &= \alpha(\mathfrak{M} y'_u - \mathfrak{N} y'_v) + \beta(-\mathfrak{N} y'_u + \mathfrak{P} y'_v),\\
Q_z &= \alpha(\mathfrak{M} z'_u - \mathfrak{N} z'_v) + \beta(-\mathfrak{N} z'_u + \mathfrak{P} z'_v);
\end{aligned}\right.$$

l'équation (7) deviendra, après avoir divisé par dt,

$$(9)\qquad \int \Sigma(\rho H V_0 \delta' U + \delta' Q_x)\, \delta x\, d\sigma + \delta \mathfrak{T}_{va} = 0.$$

Ainsi, il ne nous reste plus qu'à évaluer le travail virtuel des actions de viscosité $\delta \mathfrak{T}_{va}$; d'après l'équation précédente, nous ne devons conserver dans $\delta \mathfrak{T}_{va}$ que les termes de l'ordre de $\delta(x, y, z)$.

D'après les formules (3), (10) et (17) du Chapitre I, on a, d'une manière générale,

$$(10)\qquad \delta \mathfrak{T}_v = -2 \int\int \sum \left[(\mathcal{E} x'_u - \mathcal{F} x'_v) \frac{\partial\, \delta x}{\partial u} + (-\mathcal{F} x'_u + \mathcal{G} x'_v) \frac{\partial\, \delta x}{\partial v} \right] H\, du\, dv,$$

l'intégration s'étendant à la région du plan des (u, v) correspondant à la portion de membrane considérée. Pour calculer $\delta \mathfrak{T}_{va}$, nous devons donc étendre l'intégration à la région $a_0 + a_1 + a_2$.

Tout d'abord, dans les régions a_1 et a_2, les quantités E', F', G' sont

finies ; il en est donc de même des actions de viscosité $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ données par les formules (24) du Chapitre I, et, comme les aires d'intégration sont de l'ordre de dt, ces régions donnent lieu à un terme de l'ordre de $dt \frac{\partial \delta(x, y, z)}{\partial (u, v)}$ qui est négligeable, car les quantités $\frac{\partial \delta(x, y, z)}{\partial (u, v)}$ et $\delta(x, y, z)$ sont du même ordre de grandeur.

Les points de la région a_0 étant balayés par l'onde de choc entre les instants t et $t + dt$, les dérivées E', F', G' y sont infiniment grandes de l'ordre de $\frac{1}{dt}$, et, comme nous l'avons fait pour les composantes de l'accélération qui étaient du même ordre d'infinitude, nous écrirons pour les points de la région a_0

$$(11) \qquad E' = \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{E_1 - E_2}{dt} = -\frac{\delta' E}{dt}, \qquad F' = -\frac{\delta' F}{dt}, \qquad G' = -\frac{\delta' G}{dt}.$$

Mais les expressions données des actions de viscosité $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ supposaient jusqu'ici les dérivées E', F', G' très petites ou, tout au moins, inférieures à une certaine limite ; nous ne savons donc pas si ces expressions conserveront un sens si nous y remplaçons ces dérivées par leurs valeurs actuelles (11). A l'imitation de M. Duhem, qui a fait une hypothèse semblable en Hydrodynamique [1], nous répondrons à la question qui se pose par l'hypothèse suivante :

Les expressions

$$(12) \qquad \begin{cases} 2\mathcal{E} = \Lambda G\theta + MG', \\ 2\mathcal{F} = \Lambda F\theta + MF', \\ 2\mathcal{G} = \Lambda E\theta + ME', \end{cases}$$

qui font connaître les actions de viscosité $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, lorsque les dérivées E', F', G' restent très petites, sont encore valables lorsque ces dérivées croissent au delà de toute limite.

Dès lors, dans l'expression (10) relative à la région a_0, les quantités $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ données par les formules précédentes seront de l'ordre de $\frac{1}{dt}$ si les accroissements $\delta'(E, F, G)$ ne sont pas nuls ; comme, d'autre part, la région a_0 appartient à la région 2 à l'instant t où se fait l'intégration, on peut prendre

$$H\, du\, dv = H_2 V_0\, dt\, d\sigma,$$

---

[1] P. Duhem, *loc. cit.*

$d\sigma$ étant un élément d'arc de s; ceci montre que $\delta\mathcal{C}_{va}$ est de l'ordre de $\frac{\partial\delta(x, y, z)}{\partial(u, v)}$. Nous aurons ainsi

$$(13)\quad \delta\mathcal{C}_{va} = -2\,dt \int \sum \left[(\mathcal{E}x'_u - \mathcal{F}x'_v)_2 \frac{\partial\,\delta x}{\partial u} + (-\mathcal{F}x'_u + \mathcal{G}x'_v)_2 \frac{\partial\,\delta x}{\partial v} \right] \mathrm{H}_2 \mathrm{V}_0\, d\sigma,$$

l'intégration étant faite le long de s et l'indice 2 placé au bas des parenthèses indiquant que celles-ci se rapportent à la région 2.

Au lieu des dérivées de $\delta\,(x, y, z)$ suivant les axes du plan des (u, v), introduisons leurs dérivées $\frac{\partial}{\partial n}$ suivant la demi-normale (α, β) à s et leurs dérivées $\frac{\partial}{\partial\sigma}$ suivant la tangente à s menée, par exemple, dans le sens des ω croissants; on trouve aisément les formules

$$\frac{\partial}{\partial u} = \alpha\frac{\partial}{\partial n} + \beta\frac{\partial}{\partial\sigma},$$
$$\frac{\partial}{\partial v} = \beta\frac{\partial}{\partial n} - \alpha\frac{\partial}{\partial\sigma},$$

qui permettent d'exprimer $\delta\mathcal{C}_{va}$ au moyen des dérivées $\frac{\partial\delta(x, y, z)}{\partial(n, \sigma)}$. D'après cela, l'équation (9) devient

$$(14)\quad \begin{aligned} &\int \Sigma[\rho\mathrm{H}\mathrm{V}_0\,\delta'\mathrm{U} + \delta'\mathrm{Q}_x)\,\delta x\, d\sigma \\ &- 2\,dt \int \Sigma[\alpha(\mathcal{E}x'_u - \mathcal{F}x'_v)_2 + \beta(-\mathcal{F}x'_u + \mathcal{G}x'_v)_2] \frac{\partial\,\delta x}{\partial n} \mathrm{H}_2\mathrm{V}_0\, d\sigma \\ &- 2\,dt \int \Sigma[\beta(\mathcal{E}x'_u - \mathcal{F}x'_v)_2 - \alpha(-\mathcal{F}x'_u + \mathcal{G}x'_v)_2] \frac{\partial\,\delta x}{\partial\sigma} \mathrm{H}_2\mathrm{V}_0\, d\sigma = 0. \end{aligned}$$

C'est là l'équation fondamentale que nous voulions obtenir et qu'il nous reste à discuter.

§ II. — Cas d'une membrane affectée de viscosité.

L'équation (14) doit être vérifiée, quelles que soient les fonctions $\delta(x, y, z)$; supposons, tout d'abord, qu'on ait tout le long de la courbe s

$$\delta(x, y, z) = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\partial\,\delta(x, y, z)}{\partial\sigma} = 0.$$

L'équation (14) se réduira à sa deuxième ligne

$$-2\,dt\int \Sigma\left[\alpha(\mathcal{E}x'_u - \mathcal{F}x'_v)_2 + \beta(-\mathcal{F}x'_u + \mathcal{G}x'_v)_2\right]\frac{\partial\,\delta x}{\partial n}\,\mathrm{H}_2\Lambda_0\,d\sigma = 0$$

et devra être vérifiée, quelles que soient les dérivées $\frac{\partial\delta(x,y,z)}{\partial n}$; on devra donc avoir tout le long de s

$$dt[\alpha(\mathcal{E}x'_u - \mathcal{F}x'_v)_2 + \beta(-\mathcal{F}x'_u + \mathcal{G}x'_v)_2] = 0,$$
$$dt[\alpha(\mathcal{E}y'_u - \mathcal{F}y'_v)_2 + \beta(-\mathcal{F}y'_u + \mathcal{G}y'_v)_2] = 0,$$
$$dt[\alpha(\mathcal{E}z'_u - \mathcal{F}z'_v)_2 + \beta(-\mathcal{F}z'_u + \mathcal{G}z'_v)_2] = 0.$$

équations où nous avons laissé dt, parce que les quantités $(\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G})\,dt$ sont finies.

Supposons qu'on ait $\beta = 0$, $\alpha = 1$; il reste trois équations linéaires et homogènes en $\mathcal{E}_2\,dt$, $\mathcal{F}_2\,dt$ qui, prises deux à deux, ne peuvent avoir leurs déterminants tous les trois nuls, puisqu'ils sont respectivement proportionnels aux cosinus directeurs a''_2, b''_2, c''_2 de la normale au plan tangent à la région 2 mené au point considéré de l'onde Σ. On doit donc avoir

(15) $$\mathcal{E}_2\,dt = 0, \qquad \mathcal{F}_2\,dt = 0$$

et, par suite,

$$\mathcal{G}_2\,dt = 0.$$

D'après les égalités (11) et (12) et l'expression de θ [Chap. I, égalité (14)], les équations (15) et la suivante s'écrivent

$$\frac{\Lambda_2}{2}\mathrm{G}_2^2\,\delta'\mathrm{E} - \Lambda_2\mathrm{F}_2\mathrm{G}_2\,\delta'\mathrm{F} + \left(\frac{\Lambda_2}{2}\mathrm{E}_2\mathrm{G}_2 + \mathrm{M}_2\mathrm{H}_2^2\right)\delta'\mathrm{G} = 0,$$
$$-\Lambda_2\mathrm{F}_2\mathrm{G}_2\,\delta'\mathrm{E} + 2(\Lambda_2\mathrm{F}_2^2 - \mathrm{M}_2\mathrm{H}_2^2)\,\delta'\mathrm{F} - \Lambda_2\mathrm{E}_2\mathrm{F}_2\,\delta'\mathrm{G} = 0,$$
$$\left(\frac{\Lambda_2}{2}\mathrm{E}_2\mathrm{G}_2 + \mathrm{M}_2\mathrm{H}_2^2\right)\delta'\mathrm{E} - \Lambda_2\mathrm{E}_2\mathrm{F}_2\,\delta'\mathrm{F} + \frac{\Lambda_2}{2}\mathrm{E}_2^2\,\delta'\mathrm{G} = 0;$$

nous avons ainsi un système de trois équations linéaires et homogènes entre $\delta'(\mathrm{E}, \mathrm{F}, \mathrm{G})$, système dont le déterminant est essentiellement positif, sans quoi la fonction dissipative ne serait pas, dans la région 2, une forme quadratique définie positive (Chap. I, § III). On doit donc avoir

(16) $$\delta'\mathrm{E} = 0, \qquad \delta'\mathrm{F} = 0, \qquad \delta'\mathrm{G} = 0.$$

Il résulte alors des formules (11) que, dans la région a_0, on a $(E', F', G') = 0$, ce que nous devons écrire $(E'_2, F'_2, G'_2) = 0$, puisque cette région appartient à la région 2 à l'instant t; on a, par suite,

$$\mathcal{E}_2 = 0, \qquad \mathcal{F}_2 = 0, \qquad \mathcal{G}_2 = 0.$$

d'après les formules (12). Si nous avions supposé un sens inverse de propagation, nous aurions eu l'indice 1 à la place de l'indice 2 dans ces égalités. Nous arrivons donc à cette première conclusion que les actions de viscosité sont nulles, en tout point de la membrane infiniment voisine de l'onde et pris sur la région vers laquelle l'onde se dirige.

D'après les formules (22), (23), (25) du Chapitre II, les égalités (16) s'écrivent d'une manière plus explicite

$$\alpha(H_1 \Sigma a_1 \lambda + H_2 \Sigma a_2 \lambda) + (n_1 + n_2) \Sigma a' \lambda = 0,$$

$$\alpha\beta(H_1 \Sigma a_1 \lambda + H_2 \Sigma a_2 \lambda) + \frac{-(m_1 + m_2)\alpha + (n_1 + n_2)\beta}{2} \Sigma a' \lambda = 0,$$

$$\beta(H_1 \Sigma a_1 \lambda + H_2 \Sigma a_2 \lambda) - (m_1 + m_2) \Sigma a' \lambda = 0.$$

La première et la troisième de ces égalités constituent deux équations linéaires et homogènes par rapport aux quantités

$$H_1 \Sigma a_1 \lambda + H_2 \Sigma a_2 \lambda, \quad \Sigma a' \lambda,$$

dont le déterminant vaut $2k^2$ d'après les formules (15) et (20) du Chapitre II. On doit donc avoir

$$H_1 \Sigma a_1 \lambda + H_2 \Sigma a_2 \lambda = 0, \qquad \Sigma a' \lambda = 0,$$

ce qui vérifie la deuxième des équations précédentes. Il résulte alors des formules (26) et (28) du Chapitre II qu'on a

$$\delta' H = 0, \qquad \delta' \rho = 0,$$

de sorte que la formule (29) du même Chapitre nous donne

$$\Sigma(a_1 + a_2)\lambda = 0. \tag{17}$$

En définitive, une onde de choc qui se propage dans une membrane affectée de viscosité est caractérisée par les égalités

$$\delta' \rho = 0, \qquad \Sigma a' \lambda = 0, \tag{18}$$

d'où se déduit immédiatement l'égalité (17). Elles expriment qu'en chaque point M de l'onde Σ, le vecteur discontinuité (λ, μ, ν) se trouve suivant l'intersection du plan normal à l'onde Σ en M et du plan bissecteur des deux plans tangents en M aux régions 1 et 2, qui traverse la membrane au point M.

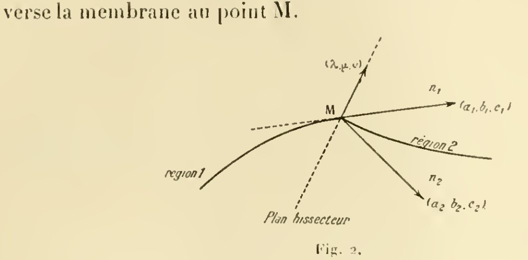


Fig. 2.

La figure 2 représente l'intersection de la membrane par le plan normal à l'onde.

Il résulte des égalités (15) que l'équation (14) se réduit à sa première ligne et qu'on doit avoir pour tout déplacement virtuel

$$\int \Sigma(\rho H V_0 \delta' U + \delta' Q_x)\, \delta x\, d\sigma = 0. \tag{19}$$

Puisque H est continue à la traversée de l'onde, les formules (32) et (32′) du Chapitre II rentrent dans la formule unique

$$k \mathfrak{V} = H V_0,$$

$\mathfrak{V}$ désignant la vitesse de propagation de l'onde, positive ou négative suivant le sens de cette propagation. Introduisons $\mathfrak{V}$ à la place de V_0 dans l'équation (19) : celle-ci devant être vérifiée, quelles que soient les fonctions $\delta(x, y, z)$, on doit avoir, en chaque point de l'onde,

$$\left\{\begin{array}{l} \rho k \mathfrak{V}\, \delta' U + \delta' Q_x = 0, \\ \rho k \mathfrak{V}\, \delta' V + \delta' Q_y = 0, \\ \rho k \mathfrak{V}\, \delta' W + \delta' Q_z = 0. \end{array}\right. \tag{20}$$

Ces équations tiennent lieu d'équations indéfinies dans le problème des ondes de choc.

Calculons les quantités (Q_x, Q_y, Q_z) données par les formules (8)

en tenant compte des formules (21) et (21′) du Chapitre II : si nous posons

$$(21)\qquad \begin{aligned} \mathcal{A} &= \mathfrak{M}\,\alpha^2 - 2\,\mathfrak{N}\alpha\beta + \mathfrak{P}\beta^2,\\ k\mathcal{B} &= n(\mathfrak{M}\,\alpha - \mathfrak{N}\beta) - m(-\mathfrak{N}\alpha + \mathfrak{P}\beta), \end{aligned}$$

on trouve, par un calcul facile,

$$(Q_x, Q_y, Q_z) = (a, b, c)\frac{H}{k}\mathcal{A} + (a', b', c')\mathcal{B}.$$

Pour expliciter les équations (20), nous devons calculer les variations δ' éprouvées par les quantités (Q_x, Q_y, Q_z) à la traversée de l'onde.

Il résulte tout d'abord des formules (18) que les formules (31) du Chapitre II se réduisent à

$$\delta\,(a, b, c) = \frac{k}{H}(\lambda, \mu, \nu);$$

nous avons alors

$$\delta' Q_x = \lambda\mathcal{A}_1 + a_2\frac{H}{k}\delta'\mathcal{A} + a'\delta'\mathcal{B} = \lambda\mathcal{A}_2 + a_1\frac{H}{k}\delta'\mathcal{A} + a'\delta'\mathcal{B},$$

ainsi que deux formules analogues pour Q_y, Q_z. Tenons compte enfin de ce que

$$\delta'(U, V, W) = -(\lambda, \mu, \nu)V_0 = -(\lambda, \mu, \nu)\frac{k}{H}\mathfrak{V}.$$

et les équations (20) pourront s'écrire des deux manières suivantes

$$(22)\qquad \left\{\begin{aligned} &\left(\mathcal{A}_1 - \rho\frac{k^2}{H}\mathfrak{V}^2\right)\lambda + a_2\frac{H}{k}\delta'\mathcal{A} + a'\delta'\mathcal{B} = 0,\\ &\left(\mathcal{A}_1 - \rho\frac{k^2}{H}\mathfrak{V}^2\right)\mu + b_2\frac{H}{k}\delta'\mathcal{A} + b'\delta'\mathcal{B} = 0,\\ &\left(\mathcal{A}_1 - \rho\frac{k^2}{H}\mathfrak{V}^2\right)\nu + c_2\frac{H}{k}\delta'\mathcal{A} + c'\delta'\mathcal{B} = 0; \end{aligned}\right.$$

$$(22')\qquad \left\{\begin{aligned} &\left(\mathcal{A}_2 - \rho\frac{k^2}{H}\mathfrak{V}^2\right)\lambda + a_1\frac{H}{k}\delta'\mathcal{A} + a'\delta'\mathcal{B} = 0,\\ &\left(\mathcal{A}_2 - \rho\frac{k^2}{H}\mathfrak{V}^2\right)\mu + b_1\frac{H}{k}\delta'\mathcal{A} + b'\delta'\mathcal{B} = 0,\\ &\left(\mathcal{A}_2 - \rho\frac{k^2}{H}\mathfrak{V}^2\right)\nu + c_1\frac{H}{k}\delta'\mathcal{A} + c'\delta'\mathcal{B} = 0. \end{aligned}\right.$$

Multiplions les équations (22) ou (22′) respectivement par a', b', c' et ajoutons membre à membre; en tenant compte de ce que

$$\Sigma a'\lambda = 0, \qquad \Sigma(a_1, a_2)a' = 0,$$

il vient

$$\delta' \mathcal{A} = 0.$$

Tenons compte de cette simplification dans les équations précédentes; deux cas sont à distinguer :

I. $\delta' \mathcal{A} \neq 0$. Les équations (22) et (22′) considérées deux à deux nous donnent alors

$$(23) \qquad \frac{\lambda}{(a_1, a_2)} = \frac{\mu}{(b_1, b_2)} = \frac{\nu}{(c_1, c_2)},$$

$$(24) \qquad \frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1} = \frac{\mathcal{A}_1 - \rho\frac{k^2}{H}\mathfrak{V}^2}{\mathcal{A}_2 - \rho\frac{k^2}{H}\mathfrak{V}^2} = -1,$$

la valeur commune de ces derniers rapports ne pouvant être égale à $+1$, car il en résulterait $\delta' \mathcal{A} = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Les égalités (23) expriment que la discontinuité est longitudinale, les égalités (24) que la courbe d'intersection de la membrane par le plan normal à l'onde présente en M un point de rebroussement. La dernière des égalités (24) fait connaître la vitesse de propagation de l'onde

$$(25) \qquad \mathfrak{V} = \pm\sqrt{\frac{H}{k^2}\,\frac{\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2}{2\rho}},$$

le radical devant être pris avec le signe + ou le signe − suivant que la discontinuité se propage de la région 1 vers la région 2 ou en sens inverse.

Cette vitesse peut d'ailleurs se mettre sous une forme plus explicite : la formule (21) jointe aux formules (30) du Chapitre I nous donne en effet

$$\frac{H}{k^2}\mathcal{A} = \Theta + 2\frac{H^2}{k^2}(\mathcal{E}\alpha^2 - 2\mathcal{F}\alpha\beta + \mathcal{G}\beta^2),$$

de sorte que la formule (25) peut encore s'écrire

$$(26) \quad \mathfrak{V} = \pm\sqrt{\frac{\Theta_1 + \Theta_2}{2\rho} + \frac{H^2}{k^2}\,\frac{(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)\alpha^2 - 2(\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2)\alpha\beta + (\mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2)\beta^2}{\rho}};$$

ainsi que nous l'avons déjà fait remarquer $(\mathcal{E}_2, \mathcal{F}_2, \mathcal{G}_2) = 0$ si le mouvement 1 se propage dans le mouvement 2 et alors on prend le signe $+$ devant le radical; $(\mathcal{E}_1, \mathcal{F}_1, \mathcal{G}_1) = 0$ si la propagation se fait en sens contraire et alors on doit prendre le signe $-$.

Nous appellerons *ondes de deuxième espèce* les ondes qui rentrent dans la catégorie précédente; nous rencontrerons au paragraphe suivant des *ondes de première espèce*, que propagent seulement les membranes dénuées de viscosité.

II. $\delta'\mathcal{A} = 0$. Les équations (22) et (22') se confondent et se réduisent aux suivantes

$$\left(\mathcal{A} - \rho \frac{k^2}{H} \mathfrak{v}^2\right)(\lambda, \mu, \nu) = 0,$$

d'où l'on déduit pour la vitesse de propagation

$$(27) \qquad \mathfrak{v} = \pm\sqrt{\frac{\Theta}{\rho} + 2\frac{H^2}{k^2}\frac{\mathcal{E}\alpha^2 - 2\mathcal{F}\alpha\beta + \mathcal{G}\beta^2}{\rho}}.$$

Comme la quantité $\mathcal{A}$ est continue par hypothèse à la traversée de l'onde, les quantités Θ, $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ peuvent être affectées indifféremment mais simultanément des indices 1 ou 2; si le mouvement 1 se propage dans le mouvement 2, nous mettrons les indices 2 et alors on aura $(\mathcal{E}_2, \mathcal{F}_2, \mathcal{G}_2) = 0$; si la propagation se fait en sens inverse, nous mettrons les indices 1 et alors on aura $(\mathcal{E}_1, \mathcal{F}_1, \mathcal{G}_1) = 0$. Revenant aux notations $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$, nous aurons donc

$$(27') \qquad \mathfrak{v}_1 = -\sqrt{\frac{\Theta_1}{\rho}}, \qquad \mathfrak{v}_2 = +\sqrt{\frac{\Theta_2}{\rho}}.$$

Nous appellerons *ondes de troisième espèce* les ondes qui rentrent dans cette catégorie.

§ III. — Cas d'une membrane dénuée de viscosité.

Par hypothèse, on a $(\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}) = 0$ en tout point de la membrane: l'équation (14) se réduit donc à sa première ligne

$$(28) \qquad \int \Sigma(\rho H V_0\, \delta' U + \delta' Q_x)\, \delta x\, d\sigma = 0.$$

Les formules (30) du Chapitre I se réduisent à

$$(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{P}) = \Theta \frac{(G, F, E)}{H}$$

et l'on trouve aisément, d'après les formules (8),

$$(Q_x, Q_y, Q_z) = k\Theta(a, b, c).$$

L'équation (28) nous donne alors les suivantes

$$(29) \quad \begin{cases} -\rho H V_0^2 \lambda + k\delta'(\Theta a) = 0, \\ -\rho H V_0^2 \mu + k\delta'(\Theta b) = 0, \\ -\rho H V_0^2 \nu + k\delta'(\Theta c) = 0. \end{cases}$$

Mais les identités (24) du Chapitre II nous donnent

$$\delta'(\Theta a) = \Theta_1 \delta' a + a_2 \delta' \Theta = \Theta_2 \delta' a + a_1 \delta' \Theta,$$

de sorte qu'en tenant compte des expressions générales de $\delta' a$, il vient

$$\delta'(\Theta a) = \frac{\Theta_1}{H_1} k(\lambda - a' \Sigma a' \lambda) + a_2 \frac{\delta'(\rho\Theta)}{\rho_2} = \frac{\Theta_2}{H_2} k(\lambda - a' \Sigma a' \lambda) + a_1 \frac{\delta'(\rho\Theta)}{\rho_1}$$

et l'on aurait deux autres formules analogues pour $\delta'(\Theta b)$, $\delta'(\Theta c)$. Dès lors, les équations (29) peuvent s'écrire sous les deux formes équivalentes

$$(30) \quad \begin{cases} \left(\frac{\Theta_1}{H_1} - \rho H \frac{V_0^2}{k^2}\right)\lambda + a_2 \frac{\delta'(\rho\Theta)}{k\rho_2} - \frac{\Theta_1}{H_1} a' \Sigma a' \lambda = 0, \\ \left(\frac{\Theta_1}{H_1} - \rho H \frac{V_0^2}{k^2}\right)\mu + b_2 \frac{\delta'(\rho\Theta)}{k\rho_2} - \frac{\Theta_1}{H_1} b' \Sigma a' \lambda = 0, \\ \left(\frac{\Theta_1}{H_1} - \rho H \frac{V_0^2}{k^2}\right)\nu + c_2 \frac{\delta'(\rho\Theta)}{k\rho_2} - \frac{\Theta_1}{H_1} c' \Sigma a' \lambda = 0; \end{cases}$$

$$(30') \quad \begin{cases} \left(\frac{\Theta_2}{H_2} - \rho H \frac{V_0^2}{k^2}\right)\lambda + a_1 \frac{\delta'(\rho\Theta)}{k\rho_1} - \frac{\Theta_2}{H_2} a' \Sigma a' \lambda = 0, \\ \left(\frac{\Theta_2}{H_2} - \rho H \frac{V_0^2}{k^2}\right)\mu + b_1 \frac{\delta'(\rho\Theta)}{k\rho_1} - \frac{\Theta_2}{H_2} b' \Sigma a' \lambda = 0, \\ \left(\frac{\Theta_2}{H_2} - \rho H \frac{V_0^2}{k^2}\right)\nu + c_1 \frac{\delta'(\rho\Theta)}{k\rho_1} - \frac{\Theta_2}{H_2} c' \Sigma a' \lambda = 0. \end{cases}$$

Multiplions les équations (30) ou (30′) respectivement par a', b', c'

et ajoutons membre à membre, il vient

$$V_0^2 \Sigma a'\lambda = 0. \tag{31}$$

Multiplions de même les équations (30) respectivement par les cosinus directeurs a''_2, b''_2, c''_2, de la normale au plan tangent en M à la région 2 et ajoutons membre à membre; les équations (30′) par les cosinus directeurs a''_1, b''_1, c''_1 de la normale au plan tangent en M à la région 1 et ajoutons membre à membre. Étant données les conditions de perpendicularité, il viendra

$$(32)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{\Theta_1}{H_1} - \rho H \frac{V_0^2}{k^2}\right) \Sigma a''_2 \lambda = 0, \\ &\left(\frac{\Theta_2}{H_2} - \rho H \frac{V_0^2}{k^2}\right) \Sigma a''_1 \lambda = 0. \end{aligned} \right.$$

En multipliant enfin les équations (30) par a_2, b_2, c_2, les équations (30′) par a_1, b_1, c_1, on trouvera de même

$$(33)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{\Theta_1}{H_1} - \rho H \frac{V_0^2}{k^2}\right) \Sigma a_2 \lambda + \frac{\delta'(\rho\Theta)}{k\rho_2} = 0, \\ &\left(\frac{\Theta_2}{H_2} - \rho H \frac{V_0^2}{k^2}\right) \Sigma a_1 \lambda + \frac{\delta'(\rho\Theta)}{k\rho_1} = 0. \end{aligned} \right.$$

Ces équations vont nous permettre de discuter les différents cas qui peuvent se présenter.

A. $\Sigma a'\lambda \neq 0$. Alors, d'après l'égalité (31), $V_0 = 0$; l'onde est donc stationnaire. Comme la tension en un point d'une membrane est essentiellement positive en vertu des conditions de stabilité [1], les les équations (32) deviennent

$$\Sigma a''_1 \lambda = 0, \qquad \Sigma a''_2 \lambda = 0. \tag{34}$$

Si les normales (a''_1, b''_1, c''_1), (a''_2, b''_2, c''_2) sont confondues, il en est de même des normales Mn_1 et Mn_2 menées dans les plans tangents en M aux régions 1 et 2 et l'on a $\delta'(a, b, c) = 0$. S'il n'en est pas ainsi, ces normales ne peuvent pas être opposées, car on aurait

$$a_1 + a_2 = 0, \qquad b_1 + b_2 = 0, \qquad c_1 + c_2 = 0, \qquad \delta'(a, b, c) \neq 0,$$

(1) P. Duhem, *Hydrodynamique, Élasticité, Acoustique*, t. II, p. 98.

et, comme les équations (29) s'écrivent, dans le cas actuel où $V_0 = 0$,

$$(\Theta_1 + \Theta_2)\, \delta' a + (a_1 + a_2)\, \delta' \Theta = 0, \tag{35}$$

avec deux équations analogues, on serait conduit à une impossibilité. Ainsi, si les normales aux plans tangents ne sont pas confondues, elles font entre elles un angle différent de π. Dès lors, d'après les équations (34), la discontinuité est tangente à l'onde, c'est-à-dire transversale et l'on a par suite

$$\Sigma a_1 \lambda = 0, \qquad \Sigma a_2 \lambda = 0.$$

On a donc $\delta'(\rho\Theta) = 0$, d'après les formules (33), et $\delta' \rho = 0$, d'après la formule (29) du Chapitre II. En outre, les formules (30) ou (30') se réduisent à

$$(\lambda, \mu, \nu) - (a', b', c')\, \Sigma a' \lambda = 0,$$

égalités qui expriment précisément la transversalité de la discontinuité, et finalement les formules (31) du Chapitre II donnent $\delta'(a, b, c) = 0$.

Les cosinus directeurs a, b, c restent donc assurément continus à la traversée de l'onde; l'équation (35) et les deux autres analogues nous donnent $\delta' \Theta = 0$. D'après les équations (34), qui se réduisent à

$$\Sigma a'' \lambda = 0,$$

la discontinuité se trouve dans le plan tangent en M à la membrane et c'est tout ce qu'on peut dire; elle peut n'être ni longitudinale ni transversale.

B. $\Sigma a' \lambda = 0$. Alors, la discontinuité se trouve dans le plan normal à l'onde; d'après l'équation (31), la vitesse de propagation peut différer de zéro. Les équations (30) et (30') deviennent

$$\left\{\begin{aligned}
&\left(\frac{\Theta_1}{H_1} - \rho H \frac{V_0^2}{k^2}\right)\lambda + a_2 \frac{\delta'(\rho\Theta)}{k\rho_2} = 0,\\
&\left(\frac{\Theta_1}{H_1} - \rho H \frac{V_0^2}{k^2}\right)\mu + b_2 \frac{\delta'(\rho\Theta)}{k\rho_2} = 0,\\
&\left(\frac{\Theta_1}{H_1} - \rho H \frac{V_0^2}{k^2}\right)\nu + c_2 \frac{\delta'(\rho\Theta)}{k\rho_2} = 0
\end{aligned}\right. \tag{36}$$

et

$$(36') \quad \begin{cases} \left(\dfrac{\Theta_2}{H_2} - \rho H \dfrac{V_0^2}{k^2}\right)\lambda + a_1 \dfrac{\delta'(\rho\Theta)}{k\rho_1} = 0, \\ \left(\dfrac{\Theta_2}{H_2} - \rho H \dfrac{V_0^2}{k^2}\right)\mu + b_1 \dfrac{\delta'(\rho\Theta)}{k\rho_1} = 0, \\ \left(\dfrac{\Theta_2}{H_2} - \rho H \dfrac{V_0^2}{k^2}\right)\nu + c_1 \dfrac{\delta'(\rho\Theta)}{k\rho_1} = 0. \end{cases}$$

Il nous faut alors distinguer deux cas suivant que $\delta'(\rho\Theta)$ est différent de zéro ou égal à zéro.

I. $\delta'(\rho\Theta) \neq 0$. Les équations (36) et (36′) considérées deux à deux nous donnent dans ces conditions

$$(37) \qquad \frac{\lambda}{(a_1, a_2)} = \frac{\mu}{(b_1, b_2)} = \frac{\nu}{(c_1, c_2)},$$

$$(38) \qquad \frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\dfrac{\Theta_1}{H_1} - \rho H \dfrac{V_0^2}{k^2}}{\dfrac{\Theta_2}{H_2} - \rho H \dfrac{V_0^2}{k^2}} = \mathcal{H},$$

$\mathcal{H}$ désignant la valeur commune ± 1 des derniers rapports égaux. Les égalités (37) montrent que la discontinuité est longitudinale, mais il y a encore deux cas à distinguer suivant la valeur de $\mathcal{H}$.

1. $\mathcal{H} = +1$. Les égalités (38) nous donnent alors

$$\delta'(a, b, c) = 0,$$
$$\rho_2\left(\frac{\Theta_1}{H_1} - \rho H \frac{V_0^2}{k^2}\right) = \rho_1\left(\frac{\Theta_2}{H_2} - \rho H \frac{V_0^2}{k^2}\right).$$

Si nous introduisons dans cette dernière égalité les vitesses $\mathfrak{v}_1$ ou $\mathfrak{v}_2$ de propagation de l'onde liées, comme nous l'avons vu, à V_0 par les égalités

$$k(\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2) = (H_1, H_2) V_0,$$

on trouve aisément

$$(39) \qquad \mathfrak{v}_1 = -\sqrt{-\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{\delta'\Theta}{\delta'\rho}}, \qquad \mathfrak{v}_2 = +\sqrt{-\frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{\delta'\Theta}{\delta'\rho}}.$$

Nous appellerons ces ondes *ondes de première espèce;* elles sont analogues à celles que propagent les fluides. Les conditions de stabilité

des membranes exigent que la quantité $\frac{\partial'\Theta}{\partial'\rho}$ soit négative [1]; les vitesses de propagation (39) sont donc réelles. Ces formules sont identiques à celles que nous avons trouvées dans le cas du fil flexible [2].

Si $V_0 = 0$, la dernière des égalités (38) donne $\frac{\Theta_1}{\Theta_2} = \mathcal{K}$; on a donc forcément $\mathcal{K} = +1$.

2. $\mathcal{K} = -1$. Les égalités (38) nous donnent alors

$$a_1 + a_2 = 0, \quad b_1 + b_2 = 0, \quad c_1 + c_2 = 0,$$
$$\rho_2\left(\frac{\Theta_1}{H_1} - \rho H \frac{V_0^2}{k^2}\right) = -\rho_1\left(\frac{\Theta_2}{H_2} - \rho H \frac{V_0^2}{k^2}\right).$$

Les premières expriment que la courbe d'intersection de la membrane par le plan normal à l'onde présente en M un point de rebroussement; la dernière nous donne aisément

$$(40) \qquad \mathfrak{V}_1 = -\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{\Theta_1 + \Theta_2}{\rho_1 + \rho_2}}, \qquad \mathfrak{V}_2 = +\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{\Theta_1 + \Theta_2}{\rho_1 + \rho_2}}.$$

Ces ondes rentrent dans la catégorie des *ondes de deuxième espèce* que peuvent aussi propager les membranes affectées de viscosité; il est intéressant, à ce point de vue, de comparer les formules (26) et (40). Nous avons rencontré pour la première fois ces ondes dans le mouvement des fils [3]; ces ondes sont spéciales aux fils et aux membranes car les fluides ne présentent rien d'analogue.

II. $\partial'(\rho\Theta) = 0$. Les équations (36) et (36′) se réduisent alors aux suivantes

$$\left(\frac{\Theta_1}{H_1} - \rho H \frac{V_0^2}{k^2}\right)(\lambda, \mu, \nu) = 0,$$
$$\left(\frac{\Theta_2}{H_2} - \rho H \frac{V_0^2}{k^2}\right)(\lambda, \mu, \nu) = 0.$$

Nous voyons tout d'abord que, si la discontinuité n'est pas nulle, ce

(1) P. Duhem, *loc. cit.*, t. II, p. 98.

(2) L. Roy, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 19 juin 1911, t. CLII, p. 1743.

(3) L. Roy, *loc. cit.*

que nous supposons, la vitesse de propagation ne peut être égale à zéro. En rapprochant ceci de ce que nous avons dit plus haut, quand nous suivions les conséquences de l'hypothèse $\mathcal{K} = +1$, nous arrivons donc à cette conclusion qu'une onde stationnaire, pour laquelle $\Sigma a'\lambda = 0$, est forcément de première espèce.

Les égalités précédentes nous donnent aisément

$$(41) \qquad \mathcal{V}_1 = -\sqrt{\frac{\Theta_1}{\rho_1}}, \qquad \mathcal{V}_2 = +\sqrt{\frac{\Theta_2}{\rho_2}}.$$

Ces ondes rentrent dans la catégorie des *ondes de troisième espèce* que peuvent aussi propager les membranes affectées de viscosité; il est intéressant à ce point de vue de comparer les formules (27) ou (27') et (41). Ces ondes ont été rencontrées pour la première fois par M. Jouguet dans le mouvement des fils [1].

§ IV. — De la relation supplémentaire.

Revenons, comme au paragraphe I du présent Chapitre, à la considération des deux régions a et b séparées par la courbe Γ' et en lesquelles nous avons partagé la membrane; la courbe Γ' a été tracée de telle sorte que l'onde de choc, entre les instants t et $t + dt$, se trouve tout entière dans la région a sans toucher la courbe Γ' en aucun point. Nous nous proposons tout d'abord de calculer la quantité de chaleur dQ_b dégagée par la partie b de la membrane pendant le temps dt.

D'après ce que nous avons vu antérieurement (Chap. I, § V), on a

$$\mathfrak{E}\, dQ_b = dt \int_b \mathrm{T}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho\, \partial \mathrm{T}} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mathrm{T}^2} \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial t}\right) dm - d\mathfrak{C}_{vb},$$

ce que nous pouvons écrire encore

$$(42) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{E}\, dQ_b = dt \int_b \mathrm{T}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho\, \partial \mathrm{T}} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mathrm{T}^2} \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial t}\right) dm \\ - dt \int_b \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dm + d_{\mathrm{T}} \Phi_b - d\mathfrak{C}_{vb}, \end{aligned}$$

[1] E. Jouguet, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CLIII, 27 novembre 1911, p. 1062.

en nous souvenant que

$$d_{\mathrm{T}}\Phi_b = dt\int_b \frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\,\frac{\partial\rho}{\partial t}\,dm.$$

Soit alors η l'énergie interne par unité de masse définie par l'égalité

$$\mathfrak{E}\eta = \varphi - \mathrm{T}\frac{\partial\varphi}{\partial\mathrm{T}};$$

nous voyons que l'équation (42) devient

$$(43)\qquad \mathfrak{E}\,d\mathrm{Q}_b = -dt\frac{\partial}{\partial t}\int_b \mathfrak{E}\eta\,dm + d_{\mathrm{T}}\Phi_b - d\mathfrak{T}_{vb}.$$

D'après l'égalité (31) du Chapitre I appliquée à une modification réelle, on peut écrire

$$\begin{aligned} d_{\mathrm{T}}\Phi_b - d\mathfrak{T}_{vb} = {} & dt\int\int_b \sum\left[(\mathfrak{M}x'_u - \mathfrak{N}x'_v)\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial u} + (-\mathfrak{N}x'_u + \mathfrak{P}x'_v)\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial v}\right]du\,dv \\ = {} & -dt\int\int_b \sum\left[\frac{\partial(\mathfrak{M}x'_u - \mathfrak{N}x'_v)}{\partial u} + \frac{\partial(-\mathfrak{N}x'_u + \mathfrak{P}x'_v)}{\partial v}\right]\mathrm{U}\,du\,dv \\ & + dt\int_{\mathrm{C}_b}\Sigma\left[\alpha(\mathfrak{M}x'_u - \mathfrak{N}x'_v) + \beta(-\mathfrak{N}x'_u + \mathfrak{P}x'_v)\right]\mathrm{U}\,d\sigma \\ & + dt\int_{\mathrm{C}'}\Sigma\left[\alpha'(\mathfrak{M}x'_u - \mathfrak{N}x'_v) + \beta'(-\mathfrak{N}x'_u + \mathfrak{P}x'_v)\right]\mathrm{U}\,d\sigma, \end{aligned}$$

et, si nous tenons compte des équations (4) et (5), nous aurons

$$\begin{aligned} (44)\qquad d_{\mathrm{T}}\Phi_b - d\mathfrak{T}_{vb} = {} & dt\int\int_b \Sigma\mathfrak{X}\,\mathrm{U}\,du\,dv + dt\int_{\mathrm{C}_b}\Sigma\mathfrak{T}_x\mathrm{U}\,d\sigma \\ & + dt\int_{\mathrm{C}'}\Sigma\left[\alpha'(\mathfrak{M}x'_u - \mathfrak{N}x'_v) + \beta'(-\mathfrak{N}x'_u + \mathfrak{P}x'_v)\right]\mathrm{U}\,d\sigma. \end{aligned}$$

Posons

$$\mathfrak{W}^2 = \mathrm{U}^2 + \mathrm{V}^2 + \mathrm{W}^2,$$

il viendra

$$\int\int \Sigma\mathfrak{X}\,\mathrm{U}\,du\,dv = \int \Sigma\mathrm{X}\,\mathrm{U}\,dm - \frac{\partial}{\partial t}\int\frac{\mathfrak{W}^2}{2}\,dm \quad (^1),$$

(1) Cette égalité jointe à l'égalité (44) met en évidence un résultat intéressant; si nous appelons $\mathfrak{M}$ la demi-force vive d'une portion de la membrane, l'équa-

de sorte que les égalités (43) et (44) nous donneront

$$(45)\quad \mathfrak{E}\,dQ_b = -dt\frac{\partial}{\partial t}\int_b\left(\frac{\mathfrak{W}^2}{2}+\mathfrak{E}\eta\right)dm + dt\int_b \Sigma X U\,dm + dt\int_{C_b}\Sigma\mathfrak{T}_x U\,d\sigma$$
$$+\,dt\int_{C'}\Sigma\left[\alpha'(\mathfrak{M}x'_u-\mathfrak{N}x'_v)+\beta'(-\mathfrak{N}x'_u+\mathfrak{P}x'_v)\right]U\,d\sigma.$$

Cela posé, faisons, comme M. Duhem en Hydrodynamique [1], l'hypothèse que l'égalité (45), établie pour la partie b qui n'est le siège d'aucune discontinuité, reste valable pour la partie a qui est le siège d'une onde de choc. Appliquons-la à une portion de la région $a = a_0 + a_1 + a_2$ telle qu'elle a été définie au paragraphe I et limitée par deux lignes N_1N_2, $N'_1N'_2$ normales à l'onde Σ, dont nous représentons par n_1n_2, $n'_1n'_2$ les images dans le plan des (u, v) (*fig.* 3).

Les différents termes du second membre de l'égalité (45) s'évaluent comme ceux de l'équation (7) et l'on trouve

$$(46)\qquad \mathfrak{E}\,dQ_a = dt\int\left[\rho H V_0\,\delta'\left(\frac{\mathfrak{W}^2}{2}+\mathfrak{E}\eta\right)+\Sigma\,\delta'(Q_x U)\right]d\sigma,$$

l'intégration s'étendant à la partie de la courbe s comprise entre les deux lignes n_1n_2, $n'_1n'_2$. Nous voyons que cette quantité de chaleur est de l'ordre de dt.

---

tion (44) peut s'écrire

$$d\mathfrak{T}_{vb} + dt\int\Sigma X U\,dm + dt\int\Sigma\mathfrak{T}_x U\,d\sigma$$
$$+\,dt\int_{C'}\Sigma[\alpha'(\mathfrak{M}x'_u-\mathfrak{N}x'_v)+\beta'(-\mathfrak{N}x'_u+\mathfrak{P}x'_v)]U\,d\sigma - d\mathfrak{M}_b - d_1\Phi_b = 0.$$

Or, l'équation fondamentale de l'Énergétique appliquée à une modification réelle donne

$$d\mathfrak{T}_{vb} + d\mathfrak{T}_{cb} - d\mathfrak{M}_b - d_\Gamma\Phi_b = 0.$$

En comparant ces deux égalités, on voit que le travail élémentaire des actions exercées par la partie a de la membrane sur la partie b est exprimé par l'intégrale

$$dt\int_{C'}\Sigma[\alpha'(\mathfrak{M}x'_u-\mathfrak{N}x'_v)+\beta(-\mathfrak{N}x'_u+\mathfrak{P}x'_v)]U\,d\sigma.$$

[1] P. Duhem, *Recherches sur l'Hydrodynamique*, 2e Partie, Ch. I, § 8.

Mais on a aussi, d'après l'égalité (37) du Chapitre I,

$$(47) \qquad dQ_a = -dt\int K\frac{dT}{dn}ds + dt\int \mathcal{K}(T - T_0)\,dS,$$

la première intégrale s'étendant au contour $N_1 N_2 N'_2 N'_1 N_1$ de la portion de membrane considérée et la seconde à la surface limitée par ce

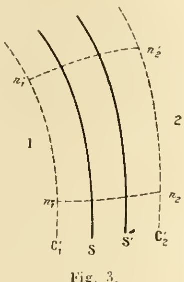


Fig. 3.

contour; comme l'aire de cette surface est de l'ordre de dt, le dernier terme de cette égalité est négligeable.

Les égalités (46) et (47) nous donnent alors

$$(48) \qquad \mathfrak{E}\int K\frac{dT}{dn}ds + \int\left[\rho H V_0\,\delta'\left(\frac{\mathfrak{V}^2}{2} + \mathfrak{E}\,\eta\right) + \Sigma\,\delta'_1(Q_x U)\right]d\sigma = 0.$$

Supposons que la température absolue T puisse être discontinue à la traversée de l'onde et posons, suivant notre notation,

$$\delta' T = T_2 - T_1.$$

Si le coefficient de conductibilité interne K est différent de zéro, les principes de la théorie analytique de la chaleur exigent qu'on ait

$$\delta' T = 0,$$

car il ne peut y avoir de différence de température finie entre deux portions contiguës d'un milieu dont les densités sont du même ordre de grandeur. Supposons donc qu'on ait

$$K = 0,$$

égalité qui exprime l'hypothèse d'adiabatie.

Dans ces conditions, l'égalité (48) se réduit à son second terme et, comme elle doit être vérifiée quelle que soit la longueur du chemin d'intégration, il en résulte qu'on doit avoir en tous les points de l'onde

$$(49) \qquad \rho \mathrm{H} \mathrm{V}_0 \, \delta'\left(\frac{\mathfrak{W}^2}{2} + \mathfrak{E}\eta\right) + \Sigma \, \delta'(\mathrm{Q}_x \mathrm{U}) = 0.$$

Or on a

$$\delta' \mathfrak{W}^2 = \Sigma (\mathrm{U}_1 + \mathrm{U}_2)\, \delta' \mathrm{U},$$
$$2\, \delta'(\mathrm{Q}_x \mathrm{U}) = (\mathrm{Q}_{x_1} + \mathrm{Q}_{x_2})\, \delta' \mathrm{U} + (\mathrm{U}_1 + \mathrm{U}_2)\, \delta' \mathrm{Q}_x.$$

Mais, que la membrane soit ou non affectée de viscosité, on a, d'après les équations (19) et (28),

$$\rho \mathrm{H} \mathrm{V}_0 \, \delta' \mathrm{U} + \delta' \mathrm{Q}_x = 0$$

et deux autres égalités analogues; nous avons donc

$$2\, \delta'(\mathrm{Q}_x \mathrm{U}) = -(\mathrm{Q}_{x_1} + \mathrm{Q}_{x_2}) \frac{\delta' \mathrm{Q}_x}{\rho \mathrm{H} \mathrm{V}_0} - \rho \mathrm{H} \mathrm{V}_0 (\mathrm{U}_1 + \mathrm{U}_2)\, \delta' \mathrm{U}$$

et

$$\Sigma \, \delta'(\mathrm{Q}_x \mathrm{U}) = -\frac{1}{2 \rho \mathrm{H} \mathrm{V}_0} \Sigma \, \delta' \mathrm{Q}_x^2 - \rho \mathrm{H} \mathrm{V}_0 \, \delta' \frac{\mathfrak{W}^2}{2}.$$

L'égalité (49) devient ainsi

$$(50) \qquad 2 \rho^2 \mathrm{H}^2 \mathrm{V}_0^2 \, \mathfrak{E} \, \delta' \eta - \Sigma \, \delta' \mathrm{Q}_x^2 = 0;$$

c'est la forme la plus générale de la loi adiabatique dynamique; nous allons voir les différentes formes qu'elle prend dans chaque cas particulier de propagation que nous avons rencontré.

§ V. — Loi adiabatique dynamique (¹).

Supposons d'abord la membrane affectée de viscosité; nous avons dans ce cas

$$\lambda \mathfrak{V} = \mathrm{H} \mathrm{V}_0,$$
$$\mathrm{Q}_x = a \frac{\mathrm{H}}{\lambda} \mathcal{A} + a' \mathcal{B};$$

(¹) *La loi adiabatique dynamique dans le mouvement des membranes flexibles* (*Comptes rendus*, t. CLIV, 6 mai 1912, p. 1213).

Nous déduisons de cette dernière égalité

$$\Sigma Q_x^2 = \frac{H^2}{k^2}\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2,$$

d'où, puisque $\delta'\mathcal{B} = 0$,

$$\Sigma \delta' Q_x^2 = \frac{H^2}{k^2}\delta'\mathcal{A}^2.$$

L'équation (50) devient ainsi

(51) $$2\rho^2 k^4 \mathfrak{V}^2 \mathfrak{E}\,\delta'\eta - H^2\delta'\mathcal{A}^2 = 0.$$

I. $\delta'\mathcal{A} \neq 0$. Alors l'onde est de seconde espèce et la vitesse de propagation $\mathfrak{V}$ donnée par la formule (25); l'équation précédente devient ainsi

$$\mathfrak{V}^2(\rho k^2 \mathfrak{E}\,\delta'\eta - H\delta'\mathcal{A}) = 0,$$

de sorte que, si $\mathfrak{V} \neq 0$, on a

(52) $$\rho k^2 \mathfrak{E}\,\delta'\eta - H\delta'\mathcal{A} = 0.$$

II. $\delta'\mathcal{A} = 0$. Alors, l'onde est de troisième espèce et, d'après les formules (27'), la vitesse $\mathfrak{V}$ ne peut être nulle; l'équation (51) donne

(53) $$\delta'\eta = 0.$$

Comme l'énergie interne est une fonction finie de la densité et de la température et qu'on a déjà $\delta'\rho = 0$, il résulte de l'équation (53) qu'on a en outre $\delta'T = 0$. Ainsi, ni la densité ni la température n'éprouvent de discontinuité à la traversée d'une onde de troisième espèce se propageant sur une membrane affectée de viscosité; il en est donc de même de toute fonction de (ρ, T) telle que la tension, et comme on a forcément $\delta'T = 0$ si $K \neq 0$, on voit que la proposition énoncée s'applique à une membrane quelconque conductrice ou non conductrice de la chaleur [1].

Supposons maintenant la membrane dénuée de viscosité; nous avons dans ce cas

$$(Q_x, Q_y, Q_z) = k\Theta(a, b, c),$$

et par suite

$$\Sigma \delta' Q_x^2 = k^2\delta'\Theta^2.$$

---

[1] Puisque $\delta'\Theta = 0$, il s'ensuit que les formules (27') se réduisent à la formule unique $\mathfrak{V} = \pm\sqrt{\frac{\Theta}{\rho}}$.

L'équation (50) devient ainsi

$$2\rho^2 H^2 V_0^2 \mathfrak{E} \delta' \eta - k^2 \delta' \Theta^2 = 0. \tag{54}$$

Envisageons alors les différents cas qui peuvent se présenter :

A. $\Sigma a'\lambda \neq 0$. Nous avons vu qu'on a $V_0 = 0$; l'équation (54) nous montre que $\delta'\Theta = 0$, ce que nous savions déjà.

B. $\Sigma a'\lambda = 0$. Nous devons distinguer deux cas suivant que $\delta'(\rho\Theta)$ est différent de zéro ou égal à zéro.

I. $\delta'(\rho\Theta) \neq 0$; nous savons qu'il y a encore deux cas à distinguer :

1. $\mathcal{K} = +1$. Alors l'onde est de première espèce et l'on a

$$V_0^2 = -k^2 \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho^2 H^2} \frac{\delta'\Theta}{\delta'\rho};$$

l'équation (54) devient ainsi

$$V_0^2 [2\rho_1\rho_2 \mathfrak{E} \delta'\eta + (\Theta_1 + \Theta_2) \delta'\rho] = 0.$$

ou, si $V_0 \neq 0$,

$$2\rho_1\rho_2 \mathfrak{E} \delta'\eta + (\Theta_1 + \Theta_2) \delta'\rho = 0. \tag{55}$$

relation analogue à celle trouvée par Hugoniot dans le mouvement rectiligne des gaz et généralisée par M. Jouguet.

2. $\mathcal{K} = -1$. L'onde est de deuxième espèce et l'on a

$$V_0^2 = k^2 \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho^2 H^2} \frac{\Theta_1 + \Theta_2}{\rho_1 + \rho_2};$$

comme V_0 est forcément différent de zéro, l'équation (54) devient

$$2\rho_1\rho_2 \mathfrak{E} \delta'\eta - (\rho_1 + \rho_2) \delta'\Theta = 0. \tag{56}$$

Cette relation est analogue à celle trouvée par M. Jouguet dans le mouvement des fils [1].

II. $\delta'(\rho\Theta) = 0$. L'onde est de troisième espèce et sa vitesse de propagation différente de zéro. Nous avons dans ce cas

$$V_0^2 = k^2 \frac{\rho_1 \Theta_1}{\rho^2 H^2} = k^2 \frac{\rho_2 \Theta_2}{\rho^2 H^2} = k^2 \frac{\rho_1 \Theta_1 + \rho_2 \Theta_2}{2\rho^2 H^2}$$

---

[1] E. Jouguet, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CLIII, 23 octobre 1911, p. 761.

et l'équation (54) nous donne

$$(57)\qquad (\rho_1\Theta_1 + \rho_2\Theta_2)\mathfrak{E}\,\delta'\tau_i - \delta'\Theta^2 = 0.$$

ce qui est encore une autre forme de la loi adiabatique dynamique. En particulier, si $\delta'\rho = 0$, on a aussi $\delta'\Theta = 0$, en vertu de l'hypothèse faite $\delta'(\rho\Theta) = 0$; on a donc également $\delta' T = 0$ et l'équation (57) se trouve identiquement vérifiée. Les conclusions deviennent donc identiques à celles qui résultent de la considération des ondes de troisième espèce, quand la viscosité n'est pas nulle.

CHAPITRE IV.

LES ONDES D'ACCÉLÉRATION.

§ I. — Cas d'une membrane affectée de viscosité.

Supposons qu'à l'instant t la membrane soit le siège d'une onde d'accélération persistante Σ; pour étudier les propriétés de cette onde au point de vue dynamique, nous ne pouvons pas encore faire usage des équations du mouvement que nous avons établies au Chapitre I. En effet, l'établissement de ces équations repose sur la transformation de la dernière intégrale de l'équation [Chap. I, équ. (32)]

$$(1)\quad \iint \sum \mathrm{X}\,\delta x\,du\,dv + \int \sum \mathfrak{T}_x\,\delta x\,d\sigma$$
$$-\iint \sum \left[(\mathfrak{M}\,x'_u - \mathfrak{N}\,x'_v)\frac{\partial\,\delta x}{\partial u} + (-\,\mathfrak{N}\,x'_u + \mathfrak{L}\,x'_v)\frac{\partial\,\delta x}{\partial v}\right] du\,dv = 0,$$

intégrale à laquelle nous avons appliqué la formule de Green après une intégration par parties. Or, cette transformation suppose essentiellement que les fonctions $(\mathfrak{M}\,x'_u - \mathfrak{N}\,x'_v)$, $(-\,\mathfrak{N}\,x'_u + \mathfrak{L}\,x'_v)$, ... soient continues en tous les points de l'aire limitée par le contour C à laquelle s'étend l'intégration, condition qui ne se trouve pas remplie dans le cas actuel, puisque les fonctions $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{L}$ sont discontinues le long de Σ par l'intermédiaire des actions de viscosité $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, qui dépendent des dérivées secondes des coordonnées. Pour étudier les ondes d'accé-

lération dans une membrane affectée de viscosité, nous devons donc reprendre l'établissement des équations du mouvement à partir de l'équation (1).

Comme nous l'avons fait dans la théorie des ondes de choc, partageons encore la membrane en deux régions a et b, la région b n'ayant aucun point commun avec l'onde Σ. La première a est limitée par le contour $\Gamma' + \Gamma_a$, la seconde b par le contour $\Gamma' + \Gamma_b$ et l'on a $\Gamma = \Gamma_a + \Gamma_b$, le contour Γ_a pouvant même ne pas exister, si l'onde Σ n'atteint pas le contour Γ. Désignons encore par C', C_a, C_b les images respectives des contours Γ', Γ_a, Γ_b dans le plan des (u, v), telles que $C = C_a + C_b$.

Choisissons tout de suite la région a et soient ε_1, ε_2 des quantités

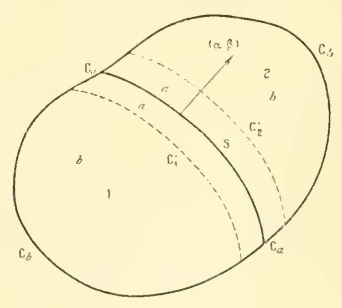


Fig. 4.

finies positives : nous prendrons comme courbe C' l'ensemble de deux courbes, l'une C'_1 située dans la région 1 à la distance $\varepsilon_1 dt$ de s, l'autre C'_2 située dans la région 2 à la distance $\varepsilon_2 dt$ de s. La région a sera alors représentée par l'aire comprise entre les deux courbes C'_1, C'_2, aire qui n'aura aucun point de contact avec le contour C si l'image s de l'onde Σ est une courbe fermée ; aire qui sera, au contraire, partiellement limitée par une portion C_a de C, comme dans le cas de la figure, si l'onde atteint le contour de la membrane (*fig.* 4).

Dans ces conditions, les intégrales doubles de l'équation (1) s'étendent à l'image totale $a + b$ de la membrane et l'intégrale curviligne au contour $C_a + C_b$. Les intégrales relatives à la région b et au

contour C_b sont de l'ordre de $\delta(x, y, z)$, car on doit admettre que les quantités $\frac{\partial\delta(x, y, z)}{\partial(u, v)}$ et $\delta(x, y, z)$ sont du même ordre ; celles relatives à la région a et au contour C_a sont de l'ordre de $dt\,\delta(x, y, z)$. Celles-ci sont donc négligeables vis-à-vis des premières, de sorte que l'équation (1) peut s'écrire plus explicitement

$$(2)\quad \begin{aligned} &\iint_b \Sigma \mathcal{X}\, \delta x\, du\, dv + \int_{C_b} \Sigma \mathcal{E}_x\, \delta x\, d\sigma \\ &-\iint_b \sum \left[(\mathfrak{N}\, x'_u - \mathfrak{G}\, x'_v)\frac{\partial\,\delta x}{\partial u} + (-\mathfrak{G}\, x'_u + \mathfrak{L}\, x'_v)\frac{\partial\,\delta x}{\partial v}\right] du\, dv = 0. \end{aligned}$$

Les fonctions $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{L}$ sont continues en tous les points de la région b et de son contour $C' + C_b$; nous pouvons donc appliquer à la dernière intégrale de l'équation (2) la transformation qui était illégitime quand cette intégrale s'étendait à l'image entière $a + b$ de la membrane. Nous avons ainsi

$$\begin{aligned} &\iint_b \Sigma \mathcal{X}\, \delta x\, du\, dv + \int_{C_b} \Sigma \mathcal{E}_x\, \delta x\, d\sigma \\ &-\int_{C_b} \Sigma [\alpha(\mathfrak{N}\, x'_u - \mathfrak{G}\, x'_v) + \beta(-\mathfrak{G}\, x'_u + \mathfrak{L}\, x'_v)]\, \delta x\, d\sigma \\ &-\int_{C'} \Sigma [\alpha'(\mathfrak{N}\, x'_u - \mathfrak{G}\, x'_v) + \beta'(-\mathfrak{G}\, x'_u + \mathfrak{L}\, x'_v)]\, \delta x\, d\sigma \\ &+\iint_b \sum \left[\frac{\partial(\mathfrak{N}\, x'_u - \mathfrak{G}\, x'_v)}{\partial u} + \frac{\partial(-\mathfrak{G}\, x'_u + \mathfrak{L}\, x'_v)}{\partial v}\right] \delta x\, du\, dv = 0. \end{aligned}$$

α', β' désignant, comme au Chapitre III, les cosinus directeurs de la demi-normale au contour $C' = C'_1 + C'_2$ menée vers l'extérieur de la région b.

Imposons, tout d'abord, à la membrane un déplacement virtuel qui laisse immobile tous les points de la région a et de son contour $C' + C_a$; la troisième ligne de l'équation précédente disparaît, et cette équation ainsi simplifiée nous montre, comme au paragraphe IV du Chapitre I, qu'on doit avoir :

1° En tous les points de la région b

$$(3)\quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{X} + \dfrac{\partial(\mathfrak{N}\, x'_u - \mathfrak{G}\, x'_v)}{\partial u} + \dfrac{\partial(-\mathfrak{G}\, x'_u + \mathfrak{L}\, x'_v)}{\partial v} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots ; \end{array}\right.$$

2° en tous les points du contour C_b

$$(4)\quad \begin{cases} \mathcal{E}_x - \alpha(\mathfrak{M} x_u - \mathfrak{N} x_v) - \beta(-\mathfrak{N} x'_u + \mathfrak{P} x_v) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Cela posé, donnons à la membrane un déplacement virtuel quelconque; multiplions les équations (3) respectivement par $\delta(x, y, z)\,du\,dv$, ajoutons-les membre à membre et intégrons dans la région b. Une intégration par parties transforme l'équation ainsi obtenue en une autre identique à l'équation (6) du Chapitre III; en tenant compte, en outre, des équations (4), l'équation dont il s'agit devient

$$\begin{aligned} &\iint_b \Sigma\,\mathfrak{X}\,\delta x\,du\,dv + \int_{C_b} \Sigma\,\mathcal{E}_x\,\delta x\,d\sigma \\ &-\iint_b \sum \left[(\mathfrak{M} x'_u - \mathfrak{N} x'_v)\frac{\partial\,\delta x}{\partial u} + (-\mathfrak{N} x'_u + \mathfrak{P} x'_v)\frac{\partial\,\delta x}{\partial v}\right] du\,dv \\ &+\int_{C'} \Sigma[\alpha'(\mathfrak{M} x'_u - \mathfrak{N} x'_v) + \beta'(-\mathfrak{N} x'_u + \mathfrak{P} x'_v)]\,\delta x\,d\sigma = 0. \end{aligned}$$

En comparant cette dernière équation à l'équation (2), il vient immédiatement

$$\int_{C'} \Sigma[\alpha'(\mathfrak{M} x'_u - \mathfrak{N} x'_v) + \beta'(-\mathfrak{N} x'_u + \mathfrak{P} x'_v)]\,\delta x\,d\sigma = 0.$$

Or, le long de C'_1, on peut prendre $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$; le long de C'_2, $\alpha' = -\alpha$, $\beta' = -\beta$; de plus, on peut substituer s à C'_1 et C'_2 comme chemin d'intégration. L'équation précédente peut donc s'écrire

$$\int \Sigma\,\delta'[\alpha(\mathfrak{M} x'_u - \mathfrak{N} x'_v) + \beta(-\mathfrak{N} x'_u + \mathfrak{P} x'_v)]\,\delta x\,d\sigma = 0,$$

l'intégration s'étendant à la courbe s. Cette dernière équation devant être vérifiée pour tout déplacement virtuel, on doit donc avoir tout le long de s

$$\begin{aligned} &\alpha(x_u\,\delta'\mathfrak{M} - x'_v\,\delta'\mathfrak{N}) + \beta(-x_u\,\delta'\mathfrak{N} + x'_v\,\delta'\mathfrak{P}) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

ou, en tenant compte de ce que les quantités $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{P}$ ne sont discon-

tinues que par l'intermédiaire des actions de viscosité $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$,

$$\alpha(x'_u \delta' \mathcal{E} - x'_v \delta' \mathcal{F}) + \beta(-x'_u \delta' \mathcal{F} + x'_v \delta' \mathcal{G}) = 0,$$
$$\alpha(y'_u \delta' \mathcal{E} - y'_v \delta' \mathcal{F}) + \beta(-y'_u \delta' \mathcal{F} + y'_v \delta' \mathcal{G}) = 0,$$
$$\alpha(z'_u \delta' \mathcal{E} - z'_v \delta' \mathcal{F}) + \beta(-z'_u \delta' \mathcal{F} + z'_v \delta' \mathcal{G}) = 0.$$

Supposons qu'on ait $\alpha = 1$, $\beta = 0$; ces équations se réduisent à trois équations linéaires et homogènes par rapport à $\delta' \mathcal{E}$, $\delta' \mathcal{F}$ qui, prises deux à deux, constituent trois systèmes d'équations linéaires dont les déterminants ne peuvent être tous les trois nuls, puisqu'ils sont proportionnels aux cosinus directeurs a'', b'', c'' de la normale à la membrane. On doit donc avoir

$$(5) \qquad \delta' \mathcal{E} = 0, \qquad \delta' \mathcal{F} = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \delta' \mathcal{G} = 0.$$

Reportons-nous aux expressions [Chap. I, équ. (24)] des actions de viscosité $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$; celles-ci sont discontinues par l'intermédiaire des quantités E', F', G'. Les équations (5) s'écrivent donc plus explicitement

$$\Lambda G \delta' \theta + M \delta' G' = 0,$$
$$\Lambda F \delta' \theta + M \delta' F' = 0,$$
$$\Lambda E \delta' \theta + M \delta' E' = 0,$$

avec

$$\delta' \theta = \frac{G \delta' E' - 2 F \delta' F' + E \delta' G'}{2 H^2}.$$

Nous avons ainsi un système de trois équations linéaires et homogènes en $\delta'(E', F', G')$ dont le déterminant n'est pas nul, sans quoi la fonction dissipative 2ω cesserait d'être une forme quadratique définie positive. La seule solution de ce système est donc

$$\delta' E' = 0, \qquad \delta' F' = 0, \qquad \delta' G' = 0.$$

D'après les formules (42) du Chapitre II, ces équations s'écrivent

$$(6) \qquad \begin{cases} V_0(\alpha H \Sigma a \lambda + n \Sigma a' \lambda) = 0, \\ V_0[2\alpha\beta H \Sigma a \lambda + (-m\alpha + n\beta) \Sigma a' \lambda] = 0, \\ V_0(\beta H \Sigma a \lambda - m \Sigma a' \lambda) = 0. \end{cases}$$

Supposons d'abord $V_0 \neq 0$; la première et la troisième de ces équations constituent un système de deux équations linéaires et homogènes en $\Sigma a \lambda$, $\Sigma a' \lambda$, dont le déterminant $-Hk^2$ n'est pas nul; la seule solu-

tion est donc

$$\Sigma a\lambda = 0, \qquad \Sigma a'\lambda = 0 \tag{7}$$

et la deuxième des équations (6) se trouve vérifiée. En vertu des formules (21) et (21′) du Chapitre II, les égalités (7) entraînent les suivantes

$$\Sigma x'_u\lambda = 0, \qquad \Sigma x'_v\lambda = 0. \tag{7'}$$

Ces égalités (7) ou (7′) expriment que la discontinuité est normale à la membrane.

Ainsi, quand une membrane affectée de viscosité est le siège d'une onde d'accélération, les actions de viscosité restent continues à la traversée de l'onde. Les seules discontinuités que puisse propager l'onde sont des discontinuités normales à la membrane.

Supposons maintenant $V_n = 0$: les équations (6) se trouvent vérifiées d'elles-mêmes.

Pour obtenir la vitesse de propagation de l'onde, reportons-nous aux équations (3); la première s'écrit plus explicitement

$$\rho H\left(X - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right) + x'_u\left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial u} - \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial v}\right) + x'_v\left(-\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial u} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial v}\right)$$
$$+ \mathfrak{M}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} - 2\mathfrak{F}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + \mathfrak{L}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = 0.$$

Écrivons cette équation pour un point infiniment voisin de Σ situé dans la région 1, puis pour un autre infiniment voisin de Σ et du précédent mais situé dans la région 2; enfin, retranchons membre à membre les deux équations ainsi écrites. Les composantes X, Y, Z de la force appliquée par unité de masse ne dépendent, dans le cas le plus général, que du temps, des coordonnées et de leurs dérivées premières; elles sont donc continues à la traversée de l'onde et nous avons ainsi

$$-\rho H\,\delta'\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + x'_u\,\delta'\left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial u} - \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial v}\right) + x'_v\,\delta'\left(-\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial u} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial v}\right)$$
$$+ \mathfrak{M}\,\delta'\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} - 2\mathfrak{F}\,\delta'\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + \mathfrak{L}\,\delta'\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = 0.$$

Tenons compte alors des formules (35), (37) et (41) du Chapitre II

et posons encore, comme au Chapitre III,

$$(8)\qquad \mathcal{A} = \mathfrak{M}\alpha^2 - 2\mathfrak{N}\alpha\beta + \mathfrak{L}\beta^2 = \frac{k^2}{\mathrm{H}}\Theta + 2\mathrm{H}(\mathcal{E}\alpha^2 - 2\mathcal{F}\alpha\beta + \mathcal{G}\beta^2);$$

nous obtiendrons la première des équations

$$(9)\qquad \begin{cases} \left(\mathcal{A} - \rho\dfrac{k^2}{\mathrm{H}}\mathfrak{V}^2\right)\lambda + x'_u\,\delta'\left(\dfrac{\partial\mathfrak{M}}{\partial u} - \dfrac{\partial\mathfrak{N}}{\partial v}\right) + x'_v\,\delta'\left(-\dfrac{\partial\mathfrak{N}}{\partial u} + \dfrac{\partial\mathfrak{L}}{\partial v}\right) = 0, \\ \left(\mathcal{A} - \rho\dfrac{k^2}{\mathrm{H}}\mathfrak{V}^2\right)\mu + y'_u\,\delta'\left(\dfrac{\partial\mathfrak{M}}{\partial u} - \dfrac{\partial\mathfrak{N}}{\partial v}\right) + y'_v\,\delta'\left(-\dfrac{\partial\mathfrak{N}}{\partial u} + \dfrac{\partial\mathfrak{L}}{\partial v}\right) = 0, \\ \left(\mathcal{A} - \rho\dfrac{k^2}{\mathrm{H}}\mathfrak{V}^2\right)\nu + z'_u\,\delta'\left(\dfrac{\partial\mathfrak{M}}{\partial u} - \dfrac{\partial\mathfrak{N}}{\partial v}\right) + z'_v\,\delta'\left(-\dfrac{\partial\mathfrak{N}}{\partial u} + \dfrac{\partial\mathfrak{L}}{\partial v}\right) = 0, \end{cases}$$

les deux autres s'obtenant d'une manière analogue.

Supposons tout d'abord $\mathrm{V}_0 \neq 0$, c'est-à-dire $\mathfrak{V} \neq 0$; dans ce cas, les composantes de la discontinuité vérifient les formules (7) et (7'). Les équations (9) multipliées respectivement par λ, μ, ν, puis ajoutées membre à membre, nous donnent alors

$$(10)\qquad \left(\mathcal{A} - \rho\frac{k^2}{\mathrm{H}}\mathfrak{V}^2\right)(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) = 0.$$

On en conclut que la discontinuité se propage avec la vitesse

$$\mathfrak{V} = \pm\sqrt{\frac{\mathrm{H}}{k^2}\frac{\mathcal{A}}{\rho}},$$

ou, d'après la formule (8),

$$(11)\qquad \mathfrak{V} = \pm\sqrt{\frac{\Theta}{\rho} + 2\frac{\mathrm{H}^2}{k^2}\frac{\mathcal{E}\alpha^2 - 2\mathcal{F}\alpha\beta + \mathcal{G}\beta^2}{\rho}}.$$

C'est l'expression que nous avions trouvée [Chap. III, équ. (27)] pour la vitesse de propagation des ondes de choc de troisième espèce.

Supposons maintenant $\mathrm{V}_0 = 0$, c'est-à-dire $\mathfrak{V} = 0$; les formules (7) ou (7') ne sont plus valables, mais multiplions les équations (9) respectivement par les cosinus directeurs a'', b'', c'' de la normale à la membrane et ajoutons-les membre à membre. En vertu des conditions de perpendicularité $\Sigma a''(x'_u, x'_v) = 0$, il vient

$$(12)\qquad \mathcal{A}\,\Sigma a''\lambda = 0.$$

Vraisemblablement, on doit supposer $\mathcal{A} > 0$, sans quoi les vitesses

de propagation données par la formule (11) seraient imaginaires. Dans ces conditions, l'égalité (12) exige qu'on ait $\Sigma a''\lambda = 0$.

Nous arrivons donc à ce résultat qu'une onde d'accélération stationnaire est caractérisée par une discontinuité qui se trouve nécessairement dans le plan tangent.

§ II. — De la relation supplémentaire.

Comme au Chapitre II, supposons que l'onde d'accélération soit du premier ordre pour la température absolue T; nous savons qu'il existera une quantité τ telle qu'on ait

(13) $$\delta' \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial(u, v, t)} = (\alpha, \beta, -\mathrm{V}_0)\tau.$$

Si $\mathrm{K} = 0$, les développements qui nous ont conduits (Chap. I, § V) à la relation supplémentaire demeurent valables et celle-ci devient

(14) $$c\rho \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial t} = -\mathcal{H}(\mathrm{T} - \mathrm{T}_0) + \frac{1}{\mathfrak{E}}\left(\mathrm{T}\frac{\partial \Theta}{\partial \mathrm{T}}\mathcal{G} + 2\Theta\right).$$

Si $\mathrm{K} \neq 0$, la transformation, au moyen de la formule de Green, de l'intégrale $\int_\gamma \mathrm{K}\frac{d\mathrm{T}}{dn}$ en intégrale double est illégitime, puisqu'elle suppose la continuité des dérivées premières en chaque point de l'aire d'intégration. Aussi devons-nous reprendre l'établissement de la relation supplémentaire à l'endroit même où nous avons fait cette transformation.

Nous avons d'une manière générale [Chap. I, équ. (36) et (37)] et pour une portion quelconque de la membrane

(15) $$d\mathrm{Q} = dt \int\int \left(\frac{\mathrm{T}}{\mathfrak{E}}\frac{\partial \Theta}{\partial \mathrm{T}}\mathcal{G} - c\rho\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial t} + \frac{2\Theta}{\mathfrak{E}}\right)\mathrm{H}\, du\, dv.$$

(16) $$d\mathrm{Q} = -dt\int \mathrm{K}\frac{d\mathrm{T}}{dn}ds + dt\int\int \mathcal{H}(\mathrm{T} - \mathrm{T}_0)\mathrm{H}\, du\, dv.$$

Appliquons ces formules à la région a de la membrane représentée dans le plan des (u, v) par l'aire limitée par le contour $\mathrm{C}_a + \mathrm{C}'_1 + \mathrm{C}'_2$ (*fig.* 4). D'après la formule (15) et les hypothèses faites quant à l'ordre

de la discontinuité, la quantité sous le signe $\int\int$ est finie; comme l'aire d'intégration est de l'ordre dt, nous voyons que la quantité de chaleur dQ dégagée par la région a pendant le temps dt est de l'ordre de dt^2. Il doit donc en être de même de la valeur de dQ donnée par la formule (16).

Considérons donc cette dernière formule : le deuxième terme est de l'ordre de dt^2 puisque la quantité sous le signe $\int\int$ est finie. Le premier s'écrit, d'après la formule (37′) du Chapitre I,

$$-dt \int_{C_a + C'_1 + C'_2} \frac{K}{H}\left[\alpha''\left(G\frac{\partial T}{\partial u} - F\frac{\partial T}{\partial v}\right) + \beta''\left(-F\frac{\partial T}{\partial u} + E\frac{\partial T}{\partial v}\right)\right] d\sigma,$$

α'', β'' désignant les cosinus directeurs de la demi-normale extérieure au contour $C_a + C'_1 + C'_2$ de la région a. L'intégrale relative à la portion C_a du contour est de l'ordre de dt et fournit, par suite, dans l'expression précédente un contingent de l'ordre de dt^2. Le long de C'_1 on a très sensiblement $\alpha'' = -\alpha$, $\beta'' = -\beta$; le long de C'_2, $\alpha'' = \alpha$, $\beta'' = \beta$. En substituant la courbe s à C'_1 et C'_2 comme chemin d'intégration, on voit que la portion $C'_1 + C'_2$ du contour fournit à l'expression précédente le contingent

$$-dt\int \frac{K}{H} k^2 \tau \, d\sigma,$$

l'intégrale étant prise le long de la courbe s. Nous voyons ainsi que la seconde expression de dQ donnée par la formule (16) ne peut être de l'ordre de dt^2 que si

$$\tau = 0.$$

Donc, si l'on a $K \neq 0$, l'onde est au moins du second ordre pour la température et cette conclusion est vraie que la membrane soit ou non affectée de viscosité.

§ III. — Cas d'une membrane dénuée de viscosité.

Pour étudier le cas d'une membrane dénuée de viscosité, nous pouvons faire usage des équations générales du mouvement, telles qu'elles ont été établies au Chapitre I; mais il est plus simple de

partir des équations générales (9), en tenant compte des expressions simplifiées de $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{L}$

$$(17)\qquad (\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{L}) = \Theta \frac{(G, F, E)}{H}.$$

Tout d'abord, les égalités (8) nous donnent

$$(18)\qquad \mathfrak{A} = \frac{k^2}{H}\Theta;$$

nous avons d'autre part, d'après les formules (17),

$$\begin{aligned}
H\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial u} &= G\frac{\partial \Theta}{\partial u} + \Theta\frac{\partial G}{\partial u} - \Theta\frac{G}{H}\frac{\partial H}{\partial u},\\
H\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial (u, v)} &= F\frac{\partial \Theta}{\partial (u, v)} + \Theta\frac{\partial F}{\partial (u, v)} - \Theta\frac{F}{H}\frac{\partial H}{\partial (u, v)},\\
H\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial v} &= E\frac{\partial \Theta}{\partial v} + \Theta\frac{\partial E}{\partial v} - \Theta\frac{E}{H}\frac{\partial H}{\partial v}.
\end{aligned}$$

Il vient donc

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned}
H\delta'\left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial u} - \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial v}\right) &= \delta'\left(G\frac{\partial \Theta}{\partial u} - F\frac{\partial \Theta}{\partial v}\right) + \Theta\,\delta'\left(\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial v}\right) - \frac{\Theta}{H}\delta'\left(G\frac{\partial H}{\partial u} - F\frac{\partial H}{\partial v}\right),\\
H\delta'\left(-\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial u} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial v}\right) &= \delta'\left(-F\frac{\partial \Theta}{\partial u} + E\frac{\partial \Theta}{\partial v}\right) + \Theta\,\delta'\left(-\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial E}{\partial v}\right) - \frac{\Theta}{H}\delta'\left(-F\frac{\partial H}{\partial u} + E\frac{\partial H}{\partial v}\right).
\end{aligned}\right.$$

Reportons-nous alors aux formules (42), (43), (46) du Chapitre II et nous trouverons aisément

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned}
&\delta'\left(G\frac{\partial \Theta}{\partial u} - F\frac{\partial \Theta}{\partial v}\right) = m\left(-\frac{\rho}{H}k\frac{\partial \Theta}{\partial \rho}\Sigma a\lambda + \frac{\partial \Theta}{\partial T}\tau\right),\\
&\delta'\left(-F\frac{\partial \Theta}{\partial u} + E\frac{\partial \Theta}{\partial v}\right) = n\left(-\frac{\rho}{H}k\frac{\partial \Theta}{\partial \rho}\Sigma a\lambda + \frac{\partial \Theta}{\partial T}\tau\right),\\
&\delta'\left(\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial v}\right) = -\beta k\Sigma a'\lambda, \qquad \delta'\left(-\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial E}{\partial v}\right) = \alpha k\Sigma a'\lambda,\\
&\delta'\left(G\frac{\partial H}{\partial u} - F\frac{\partial H}{\partial v}\right) = km\Sigma a\lambda, \qquad \delta'\left(-F\frac{\partial H}{\partial u} + E\frac{\partial H}{\partial v}\right) = kn\Sigma a\lambda.
\end{aligned}\right.$$

Les égalités (18), (19), (20) permettent d'écrire les équations (9) sous une forme plus explicite ; en tenant compte, en outre, des formules (21) et (21′) du Chapitre II, nous voyons que les équations (9)

deviennent

$$(21)\quad \begin{cases} \lambda\left(\varphi^2-\frac{\Theta}{\rho}\right)+a\left[\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\rho}+\frac{\Theta}{\rho}\right)\Sigma a\lambda-\frac{\mathrm{H}}{\rho k}\frac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{T}}\tau\right]+\frac{\Theta}{\rho}a'\Sigma a'\lambda=0,\\ \mu\left(\varphi^2-\frac{\Theta}{\rho}\right)+b\left[\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\rho}+\frac{\Theta}{\rho}\right)\Sigma a\lambda-\frac{\mathrm{H}}{\rho k}\frac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{T}}\tau\right]+\frac{\Theta}{\rho}b'\Sigma a'\lambda=0,\\ \nu\left(\varphi^2-\frac{\Theta}{\rho}\right)+c\left[\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\rho}+\frac{\Theta}{\rho}\right)\Sigma a\lambda-\frac{\mathrm{H}}{\rho k}\frac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{T}}\tau\right]+\frac{\Theta}{\rho}c'\Sigma a'\lambda=0. \end{cases}$$

Multiplions ces équations respectivement par a', b', c' et ajoutons-les membre à membre, il vient

$$(22)\qquad \varphi^2\Sigma a'\lambda=0.$$

Multiplions-les de même respectivement par a'', b'', c'', il viendra

$$(23)\qquad \left(\varphi^2-\frac{\Theta}{\rho}\right)\Sigma a''\lambda=0.$$

Multiplions-les enfin par a, b, c, nous aurons

$$(24)\qquad \Sigma a\lambda\left(\varphi^2+\frac{\partial\Theta}{\partial\rho}\right)-\frac{\mathrm{H}}{\rho k}\frac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{T}}\tau=0.$$

Tenons compte de cette dernière égalité dans les équations (21), celles-ci deviendront

$$(25)\quad \begin{cases} \left(\varphi^2-\frac{\Theta}{\rho}\right)(\lambda-a\Sigma a\lambda)+\frac{\Theta}{\rho}a'\Sigma a'\lambda=0,\\ \left(\varphi^2-\frac{\Theta}{\rho}\right)(\mu-b\Sigma a\lambda)+\frac{\Theta}{\rho}b'\Sigma a'\lambda=0,\\ \left(\varphi^2-\frac{\Theta}{\rho}\right)(\nu-c\Sigma a\lambda)+\frac{\Theta}{\rho}c'\Sigma a'\lambda=0. \end{cases}$$

Ces équations vont nous permettre de discuter les différents cas qui peuvent se présenter. Tout d'abord, si l'onde est stationnaire ($\varphi=0$), l'équation (23) nous donne $\Sigma a''\lambda=0$; la discontinuité se trouve donc dans le plan tangent.

Comme pour les ondes de choc, nous considérerons deux cas principaux, suivant que la discontinuité ne se trouve pas ou se trouve dans le plan normal à l'onde ($\Sigma a'\lambda\neq 0$, ou $\Sigma a'\lambda=0$).

A. $\Sigma a'\lambda\neq 0$. L'équation (22) nous montre que $\varphi=0$; l'onde est

donc stationnaire. Si $K \neq 0$, nous savons que $\tau = 0$: l'équation (24) nous donne alors $\Sigma \alpha \lambda = 0$. Comme la discontinuité se trouve déjà dans le plan tangent, elle est, de plus, tangente à l'onde Σ, c'est-à-dire transversale. C'est d'ailleurs ce que montrent les équations (25).

B. $\Sigma \alpha' \lambda = 0$. L'équation (22) se trouve vérifiée, de sorte que la vitesse de propagation $\mathfrak{v}$ peut différer de zéro ; nous distinguerons encore deux cas, suivant qu'on a $\Sigma \alpha \lambda = 0$, ou $\Sigma \alpha \lambda \neq 0$.

I. $\Sigma \alpha \lambda = 0$. La discontinuité est normale à la membrane ; la vitesse de propagation $\mathfrak{v}$ ne peut donc pas être nulle. L'équation (24) nous montre que $\tau = 0$; l'onde est donc au moins du second ordre pour la température et aussi pour la densité et la tension, d'après les formules (44) et (46) du Chapitre II. Les équations (25) se réduisent à

$$\left(\mathfrak{v}^2 - \frac{\Theta}{\rho}\right)(\lambda, \mu, \nu) = 0$$

et nous donnent comme vitesse de propagation

$$\mathfrak{v} = \pm\sqrt{\frac{\Theta}{\rho}}. \tag{26}$$

II. $\Sigma \alpha \lambda \neq 0$. Il nous faut encore subdiviser ce cas en deux autres suivant que K est différent de zéro ou égal à zéro.

1. $K \neq 0$. Nous savons alors que $\tau = 0$; l'équation (24) se réduit à

$$\Sigma \alpha \lambda \left(\mathfrak{v}^2 + \frac{\partial \Theta}{\partial \rho}\right) = 0,$$

d'où nous déduisons

$$\mathfrak{v} = \pm\sqrt{-\frac{\partial \Theta}{\partial \rho}}. \tag{27}$$

Cette formule correspond à celle donnée par Newton dans le mouvement des fluides.

2. $K = 0$. Alors, l'équation (14), où nous avons effacé le terme 2ω, est applicable. En y remplaçant θ par sa valeur $-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t}$, nous obtenons

$$c\rho\delta' \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{T}{\mathfrak{E}\rho}\frac{\partial \Theta}{\partial T}\delta'\frac{\partial \rho}{\partial t},$$

d'où, d'après les formules (44) et (45) du Chapitre II,

$$\mathfrak{V}\left(\tau - \frac{\text{T}}{c\mathfrak{E}\rho}\frac{\partial\Theta}{\partial\text{T}}\frac{k}{\text{H}}\Sigma a\lambda\right) = 0.$$

Cela posé, supposons $\mathfrak{V} \neq 0$; cette équation jointe à l'équation (24) nous donne

$$\Sigma a\lambda\left[\mathfrak{V}^2 + \frac{\partial\Theta}{\partial\rho} - \frac{\text{T}}{c\mathfrak{E}\rho^2}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\text{T}}\right)^2\right] = 0,$$

d'où nous déduisons

(28) $$\mathfrak{V} = \pm\sqrt{-\frac{\partial\Theta}{\partial\rho} + \frac{\text{T}}{c\mathfrak{E}\rho^2}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\text{T}}\right)^2},$$

ce qui s'écrit encore

(28') $$\mathfrak{V} = \pm\sqrt{-\frac{\text{C}}{c}\frac{\partial\Theta}{\partial\rho}},$$

en introduisant la chaleur spécifique à tension constante C ([1]). Dans

---

([1]) L'équivalence des deux expressions (28) et (28') données pour $\mathfrak{V}$ peut se démontrer de la manière suivante : soit δq la quantité de chaleur dégagée dans une modification virtuelle par un élément de masse dm de la membrane ; d'après la formule (36) du Chapitre I et vu l'expression de θ, on a

$$\delta q = -\left(\frac{\text{T}}{\mathfrak{E}\rho^2}\frac{\partial\Theta}{\partial\text{T}}\delta\rho + c\,\delta\text{T}\right)dm,$$

c désignant, dans le cas où il n'y a pas de viscosité, la chaleur spécifique à densité constante. On peut écrire aussi

$$\delta q = -(h\,\delta\Theta + \text{C}\,\delta\text{T})\,dm,$$

C désignant la chaleur spécifique à tension constante et h un autre coefficient calorifique. La comparaison de ces deux égalités jointes à l'égalité

$$\delta\Theta = \frac{\partial\Theta}{\partial\rho}\delta\rho + \frac{\partial\Theta}{\partial\text{T}}\delta\text{T}$$

nous donne

$$h\frac{\partial\Theta}{\partial\rho} = \frac{\text{T}}{\mathfrak{E}\rho^2}\frac{\partial\Theta}{\partial\text{T}}, \qquad h\frac{\partial\Theta}{\partial\text{T}} + \text{C} = c,$$

d'où nous déduisons, en éliminant h,

$$-\frac{\partial\Theta}{\partial\rho} + \frac{\text{T}}{c\mathfrak{E}\rho^2}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\text{T}}\right)^2 = -\frac{\text{C}}{c}\frac{\partial\Theta}{\partial\rho}.$$

le cas actuel où la membrane est dénuée de viscosité, c s'appelle la chaleur spécifique à densité constante. Cette formule (28′) correspond à celle donnée par Laplace dans le mouvement des fluides.

Dans les deux cas que nous venons de considérer et correspondant à la même hypothèse $\Sigma a\lambda \neq 0$, que la vitesse φ soit nulle ou donnée par les formules (27) ou (28′), la quantité $\varphi^2 - \frac{\Theta}{\rho}$ est différente de zéro ; les équations (25) se réduisent ainsi aux suivantes

$$(\lambda, \mu, \nu) - (a, b, c)\Sigma a\lambda = 0$$

et nous enseignent que la discontinuité est longitudinale. Les formules (26) et (27) n'avaient été obtenues jusqu'ici, à notre connaissance, qu'en partant des équations des petits mouvements d'une membrane plane [Chap. I, équ. (54)] de température uniforme.

Les résultats exposés dans ce paragraphe, relativement à la propagation des ondes d'accélération dans les membranes dénuées de viscosité, sont absolument généraux. Nous laissons au lecteur le soin de reconnaître, au moyen des formules que nous avons données antérieurement (Chap. II, § IX), que ces résultats s'étendent aux ondes d'un ordre quelconque $n > 1$ par rapport aux coordonnées. Nous les avons démontrés dans le cas de $n = 2$, uniquement pour simplifier les formules qui nous ont servi de point de départ dans ce paragraphe.

§ IV. — Les ondes d'ordre supérieur dans les membranes affectées de viscosité.

Supposons que la membrane soit le siège d'une onde Σ du troisième ordre par rapport aux coordonnées : les équations indéfinies du mouvement [Chap. I, équ. (33)] sont applicables en tout point de la membrane ; considérons, par exemple, la première de ces équations

$$(29) \quad \rho H\left(X - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right) + x'_u\left(\frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial u} - \frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial v}\right) + x'_v\left(-\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial u} + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial v}\right) + \mathfrak{N}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} - 2\mathfrak{T}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + \mathfrak{L}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = 0.$$

Les dérivées $\frac{\partial(\mathfrak{N}, \mathfrak{T}, \mathfrak{L})}{\partial(u, v)}$ sont discontinues à la traversée de l'onde,

par l'intermédiaire des dérivées $\frac{\partial(\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G})}{\partial(u, v)}$ qui dépendent des dérivées du troisième ordre des coordonnées ; écrivons alors l'équation (29) en deux points infiniment voisins et situés l'un dans la région 1, l'autre dans la région 2 ; en retranchant membre à membre les deux équations ainsi écrites, nous obtiendrons

$$x'_u \delta'\left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial u} - \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial v}\right) + x'_v \delta'\left(-\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial u} + \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial v}\right) = 0.$$

Tenons compte, alors, des égalités

$$\mathfrak{M} = \Theta \frac{G}{H} + 2H\mathcal{E}, \qquad \mathfrak{N} = \Theta \frac{F}{H} + 2H\mathcal{F}, \qquad \mathfrak{P} = \Theta \frac{E}{H} + 2H\mathcal{G},$$

et nous obtiendrons la première des équations

$$x'_u \delta'\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial u} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v}\right) + x'_v \delta'\left(-\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial v}\right) = 0,$$
$$y'_u \delta'\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial u} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v}\right) + y'_v \delta'\left(-\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial v}\right) = 0,$$
$$z'_u \delta'\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial u} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v}\right) + z'_v \delta'\left(-\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial v}\right) = 0,$$

les deux autres s'obtenant d'une manière analogue. Ces équations considérées deux à deux constituent trois systèmes de deux équations linéaires et homogènes entre les quantités $\delta'\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial u} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v}\right)$, $\delta'\left(-\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial v}\right)$, dont les déterminants ne peuvent pas être tous les trois nuls, puisqu'ils sont respectivement proportionnels à a'', b'', c''. On doit donc avoir

$$(30) \qquad \delta'\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial u} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v}\right) = 0, \qquad \delta'\left(-\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial v}\right) = 0.$$

Développons ces deux équations : les égalités (15) et (24) du Chapitre I nous donnent immédiatement

$$\delta' \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial u} = -AG \frac{1}{\rho} \delta' \frac{\partial^2 \rho}{\partial t\, \partial u} + M\delta' \frac{\partial^2 G}{\partial t\, \partial u},$$
$$\delta' \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial(u, v)} = -AF \frac{1}{\rho} \delta' \frac{\partial^2 \rho}{\partial t\, \partial(u, v)} + M\delta' \frac{\partial^2 F}{\partial t\, \partial(u, v)},$$
$$\delta' \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial v} = -AE \frac{1}{\rho} \delta' \frac{\partial^2 \rho}{\partial t\, \partial v} + M\delta' \frac{\partial^2 E}{\partial t\, \partial v}.$$

Tenons compte des formules (48) du Chapitre II et il viendra

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned} k\delta'\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial u} &= -V_0\left[\alpha\left(A\frac{G}{H}k^2+2MH\beta^2\right)\Sigma a\lambda - 2M \quad m\alpha\beta \quad \Sigma a'\lambda\right],\\ k\delta'\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial u} &= -V_0\left[\alpha\left(A\frac{F}{H}k^2+2MH\alpha\beta\right)\Sigma a\lambda + M\alpha(-m\alpha+n\beta)\Sigma a'\lambda\right],\\ k\delta'\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial v} &= -V_0\left[\beta\left(A\frac{F}{H}k^2+2MH\alpha\beta\right)\Sigma a\lambda + M\beta(-m\alpha+n\beta)\Sigma a'\lambda\right],\\ k\delta'\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial v} &= -V_0\left[\beta\left(A\frac{E}{H}k^2+2MH\alpha^2\right)\Sigma a\lambda + 2M \quad n\alpha\beta \quad \Sigma a'\lambda\right]. \end{aligned}\right.$$

Dès lors, il est facile de voir que les équations (30) deviennent

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} V_0(Am\,\Sigma a\lambda - MH\beta\,\Sigma a'\lambda) &= 0,\\ V_0(An\,\Sigma a\lambda + MH\alpha\,\Sigma a'\lambda) &= 0. \end{aligned}\right.$$

Supposons d'abord $V_0 \neq 0$: le déterminant de ces deux équations en $\Sigma a\lambda$ et $\Sigma a'\lambda$ est différent de zéro, puisqu'il vaut $AMHk^2$; la seule solution est donc

$$\Sigma a\lambda = 0, \qquad \Sigma a'\lambda = 0,$$

d'où

$$\Sigma x'_u\lambda = 0, \qquad \Sigma x'_v\lambda = 0.$$

Les égalités (31) nous montrent alors que les dérivées $\frac{\partial(\mathcal{E},\mathcal{F},\mathcal{G})}{\partial(u,v)}$ restent continues à la traversée de l'onde, et nous voyons qu'il en est également ainsi lorsque $V_0 = 0$.

Donc, quand une membrane affectée de viscosité est le siège d'une onde du troisième ordre, les quantités $\frac{\partial(\mathfrak{M},\mathfrak{N},\mathfrak{P})}{\partial(u,v)}$ restent continues à la traversée de l'onde; les seules discontinuités qu'elle puisse propager sont des discontinuités normales à la membrane.

Si maintenant $V_0 = 0$, les équations (32) sont vérifiées d'elles-mêmes.

Pour obtenir la vitesse de propagation de l'onde, reportons-nous à l'équation (29) et dérivons-la par rapport à u ; en n'écrivant que les quantités discontinues à la traversée de l'onde, nous obtiendrons

$$-\rho H\frac{\partial^3 x}{\partial t^2\,\partial u} + x'_u\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial u}-\frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial v}\right) + x'_v\frac{\partial}{\partial u}\left(-\frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial u}+\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial v}\right)$$
$$+\mathfrak{M}\frac{\partial^3 x}{\partial u^3} - 2\mathfrak{N}\frac{\partial^3 x}{\partial u^2\,\partial v} + \mathfrak{P}\frac{\partial^3 x}{\partial v^2\,\partial u} + \ldots = 0.$$

Tenons compte des formules (17) du Chapitre II et nous aurons par différence, et en introduisant la quantité $\mathcal{A}$ définie par l'égalité (8), la première des équations

$$(33)\quad \begin{cases} \alpha\left(\mathcal{A}-\rho\dfrac{k^2}{\mathrm{H}}\vartheta^2\right)\lambda+x'_u\delta'\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\partial\mathfrak{M}}{\partial u}-\dfrac{\partial\mathfrak{N}}{\partial v}\right)+x'_v\delta'\dfrac{\partial}{\partial u}\left(-\dfrac{\partial\mathfrak{N}}{\partial u}+\dfrac{\partial\mathfrak{P}}{\partial v}\right)=0,\\ \alpha\left(\mathcal{A}-\rho\dfrac{k^2}{\mathrm{H}}\vartheta^2\right)\mu+y'_u\delta'\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\partial\mathfrak{M}}{\partial u}-\dfrac{\partial\mathfrak{N}}{\partial v}\right)+y'_v\delta'\dfrac{\partial}{\partial u}\left(-\dfrac{\partial\mathfrak{N}}{\partial u}+\dfrac{\partial\mathfrak{P}}{\partial v}\right)=0,\\ \alpha\left(\mathcal{A}-\rho\dfrac{k^2}{\mathrm{H}}\vartheta^2\right)\nu+z'_u\delta'\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\partial\mathfrak{M}}{\partial u}-\dfrac{\partial\mathfrak{N}}{\partial v}\right)+z'_v\delta'\dfrac{\partial}{\partial u}\left(-\dfrac{\partial\mathfrak{N}}{\partial u}+\dfrac{\partial\mathfrak{P}}{\partial v}\right)=0,\end{cases}$$

les deux autres s'obtenant d'une manière analogue. Nous aurions de même, en dérivant par rapport à v,

$$(33')\quad \begin{cases} \beta\left(\mathcal{A}-\rho\dfrac{k^2}{\mathrm{H}}\vartheta^2\right)\lambda+x'_u\delta'\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\partial\mathfrak{M}}{\partial u}-\dfrac{\partial\mathfrak{N}}{\partial v}\right)+x'_v\delta'\dfrac{\partial}{\partial v}\left(-\dfrac{\partial\mathfrak{N}}{\partial u}+\dfrac{\partial\mathfrak{P}}{\partial v}\right)=0,\\ \beta\left(\mathcal{A}-\rho\dfrac{k^2}{\mathrm{H}}\vartheta^2\right)\mu+y'_u\delta'\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\partial\mathfrak{M}}{\partial u}-\dfrac{\partial\mathfrak{N}}{\partial v}\right)+y'_v\delta'\dfrac{\partial}{\partial v}\left(-\dfrac{\partial\mathfrak{N}}{\partial u}+\dfrac{\partial\mathfrak{P}}{\partial v}\right)=0.\\ \beta\left(\mathcal{A}-\rho\dfrac{k^2}{\mathrm{H}}\vartheta^2\right)\nu+z'_u\delta'\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\partial\mathfrak{M}}{\partial u}-\dfrac{\partial\mathfrak{N}}{\partial v}\right)+z'_v\delta'\dfrac{\partial}{\partial v}\left(-\dfrac{\partial\mathfrak{N}}{\partial u}+\dfrac{\partial\mathfrak{P}}{\partial v}\right)=0.\end{cases}$$

Ces équations (33) et (33′) sont analogues aux équations (9). Dès lors, la discussion s'achève comme au paragraphe I. Multiplions les équations (33) respectivement par λ, μ, ν et ajoutons-les membre à membre ; faisons de même pour les équations (33′), nous obtiendrons les deux équations

$$(\alpha, \beta)\left(\mathcal{A}-\rho\frac{k^2}{\mathrm{H}}\vartheta^2\right)(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)=0,$$

si, du moins, ϑ est différent de zéro. Nous voyons ainsi que les discontinuités normales à la membrane se propagent avec les vitesses

$$\vartheta=\pm\sqrt{\frac{\Theta}{\rho}+2\frac{\mathrm{H}^2}{k^2}\frac{\mathcal{E}\alpha^2-2\mathcal{F}\alpha\beta+\mathcal{G}\beta^2}{\rho}}.$$

Si, au contraire, l'onde est stationnaire ($\vartheta=0$), les équations (33) et (33′) nous donnent

$$(\alpha, \beta)\,\mathcal{A}\,\Sigma a''\lambda=0,$$

égalités d'après lesquelles la discontinuité correspondante se trouve contenue dans le plan tangent.

Ces résultats, analogues à ceux que nous avons obtenus pour les

ondes d'accélération, sont entièrement généraux et s'étendent aisément aux ondes d'un ordre supérieur à 3. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier cette affirmation.

§ V. — Résumé.

Pour terminer, jetons un coup d'œil récapitulatif sur les principaux résultats auxquels nous sommes parvenus dans l'étude de la propagation des ondes dans les membranes. Nous considérerons successivement ce qui se passe quand la membrane est dénuée de viscosité et quand elle est affectée de viscosité. Nous avons dit, dans notre Introduction, que ce dernier cas correspond seul aux membranes réellement existantes.

MEMBRANE DÉNUÉE DE VISCOSITÉ.

Une membrane dénuée de viscosité peut être le siège d'ondes de choc ($n=1$) et d'ondes d'ordre supérieur ($n>1$).

Ondes de choc. — Ces ondes peuvent être de deux catégories, suivant que la discontinuité (λ, μ, ν) se trouve ou non dans le plan normal à l'onde ($\Sigma a'\lambda = ou \neq 0$).

I. $\Sigma a'\lambda = 0$. Les ondes de cette catégorie peuvent être de trois espèces distinctes caractérisées principalement par la valeur de l'angle des deux plans tangents en chaque point de l'onde Σ.

Les ondes de première espèce sont caractérisées par les relations $\delta'(\rho\Theta) \neq 0$, $\delta'(a, b, c) = 0$; les deux plans tangents sont donc confondus. Elles se propagent avec les vitesses

$$\vartheta_1 = -\sqrt{-\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{\delta'\Theta}{\delta'\rho}}, \qquad \vartheta_2 = +\sqrt{-\frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{\delta'\Theta}{\delta'\rho}}$$

et sont analogues à celles que propagent les fluides parfaits. Les ondes stationnaires sont forcément de première espèce.

Les ondes de deuxième espèce sont caractérisées par les relations $\delta'(\rho\Theta) \neq 0$, $a_1 + a_2 = 0$, $b_1 + b_2 = 0$, $c_1 + c_2 = 0$; les deux plans tangents sont donc opposés, de sorte que la courbe d'intersection de la

membrane par un plan normal à l'onde présente sur Σ un point de rebroussement. Elles se propagent avec les vitesses

$$\mathfrak{V}_1 = -\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{\Theta_1+\Theta_2}{\rho_1+\rho_2}}, \qquad \mathfrak{V}_2 = +\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{\Theta_1+\Theta_2}{\rho_1+\rho_2}}$$

et sont analogues à celles que nous avons signalées dans le mouvement des fils parfaits. Les ondes des deux premières espèces sont longitudinales.

Les ondes de troisième espèce sont caractérisées par l'égalité $\delta'(\rho\Theta) = 0$, l'angle des deux plans tangents pouvant être quelconque. Elles se propagent avec les vitesses

$$\mathfrak{V}_1 = -\sqrt{\frac{\Theta_1}{\rho_1}}, \qquad \mathfrak{V}_2 = +\sqrt{\frac{\Theta_2}{\rho_2}}$$

et sont analogues à celles que M. Jouguet a signalées dans le mouvement des fils parfaits.

II. $\Sigma a'\lambda \neq 0$. Les ondes de cette catégorie sont stationnaires et caractérisées par un plan tangent unique dans lequel se trouve la discontinuité.

Ondes d'ordre supérieur. — Si l'onde est stationnaire, la discontinuité est contenue dans le plan tangent. Les ondes d'ordre supérieur peuvent être, comme les ondes de choc, de deux catégories, suivant que la discontinuité (λ, μ, ν) se trouve ou non dans le plan normal à l'onde ($\Sigma a'\lambda = 0$ ou $\neq 0$).

I. $\Sigma a'\lambda = 0$. Il faut distinguer deux cas, suivant qu'on a

$$\Sigma a\lambda = 0 \text{ ou } \neq 0.$$

A. $\Sigma a\lambda = 0$. La discontinuité est normale à l'onde et se propage avec la vitesse

$$\mathfrak{V} = \pm\sqrt{\frac{\Theta}{\rho}}.$$

L'onde est au moins d'ordre n pour la température, la densité et la tension.

B. $\Sigma a\lambda \neq 0$. Si K est différent de zéro, l'onde est au moins d'ordre n

pour la température ; elle se propage avec la vitesse

$$\mathfrak{V} = \pm\sqrt{-\frac{\partial\Theta}{\partial\rho}}.$$

Si $K = 0$, l'onde est stationnaire ou se propage avec la vitesse

$$\mathfrak{V} = \pm\sqrt{-\frac{C}{c}\frac{\partial\Theta}{\partial\rho}}.$$

Dans tous les cas, que l'onde soit stationnaire ou que sa vitesse soit donnée par l'une ou l'autre des deux formules précédentes, la discontinuité est longitudinale. Ces ondes sont analogues à celles que propagent les fluides parfaits.

II. $\Sigma a'\lambda \neq 0$. Les ondes de cette catégorie sont stationnaires ; la discontinuité se trouve donc dans le plan tangent. Si l'on a $K \neq 0$, la discontinuité est transversale.

MEMBRANE AFFECTÉE DE VISCOSITÉ.

Une membrane affectée de viscosité peut être le siège d'ondes de choc ($n=1$) et d'ondes d'ordre supérieur ($n>1$).

Ondes de choc. — La densité reste continue à la traversée de l'onde. La discontinuité (λ, μ, ν) est dirigée suivant l'intersection du plan normal à l'onde et du plan bissecteur des deux plans tangents qui traverse la membrane suivant Σ ; ces ondes rentrent donc dans la catégorie I ($\Sigma a'\lambda = 0$). De plus, les actions de viscosité $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ sont finies de part et d'autre de l'onde et nulles immédiatement en avant de celle-ci dans le sens de sa propagation. Ces ondes sont forcément de deuxième ou de troisième espèce ; leurs vitesses de propagation dépendent de la quantité

$$\mathcal{A} = \frac{k^2}{H}\Theta + 2H(\mathcal{E}\alpha^2 - 2\mathcal{F}\alpha\beta + \mathcal{G}\beta^2).$$

Les ondes de deuxième espèce, caractérisées par les relations $\delta'\mathcal{A} \neq 0$, $a_1 + a_2 = 0$, $b_1 + b_2 = 0$, $c_1 + c_2 = 0$, se propagent avec les

vitesses

$$\mathfrak{V}_1 = -\sqrt{\frac{\Theta_1 + \Theta_2}{2\rho} + \frac{H^2}{k^2}\,\frac{\mathcal{E}_2\alpha^2 - 2\mathcal{F}_2\alpha\beta + \mathcal{G}_2\beta^2}{\rho}},$$

$$\mathfrak{V}_2 = +\sqrt{\frac{\Theta_1 + \Theta_2}{2\rho} + \frac{H^2}{k^2}\,\frac{\mathcal{E}_1\alpha^2 - 2\mathcal{F}_1\alpha\beta + \mathcal{G}_1\beta^2}{\rho}}.$$

Les ondes de troisième espèce, caractérisées par l'égalité $\delta'\mathfrak{b} = 0$, l'angle des deux plans tangents pouvant être quelconque, se propagent avec la vitesse

$$\mathfrak{V} = \pm\sqrt{\frac{\Theta}{\rho}}.$$

Ondes d'ordre supérieur. — Ces ondes sont au moins d'ordre $n-1$ pour les actions de viscosité $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$. Si l'onde est stationnaire, la discontinuité (λ, μ, ν) est contenue dans le plan tangent ; si l'onde se propage, la discontinuité est normale à la membrane et sa vitesse de propagation est

$$\mathfrak{V} = \pm\sqrt{\frac{\Theta}{\rho} + 2\frac{H^2}{k^2}\,\frac{\mathcal{E}\alpha^2 - 2\mathcal{F}\alpha\beta + \mathcal{G}\beta^2}{\rho}}.$$

Rotation de l'ellipsoïde hétérogène et figure exacte de la Terre;

PAR ALEX. VÉRONNET.

INTRODUCTION.

Je me suis proposé, dans ce travail, de reprendre et de compléter les travaux sur la figure d'équilibre de l'ellipsoïde hétérogène en rotation, en particulier ceux de MM. Hamy, Callandreau, Poincaré, Roche, Tisserand, etc., avec application à la Terre et aux planètes.

J'ai donc étudié le *cas général de vitesse* et d'aplatissement, puis le *cas pratique d'une vitesse lente*, d'abord en première approximation en négligeant e^2 ou λ^4, puis en *seconde approximation* en tenant compte de ce second terme, et en particulier les *limites imposées à l'aplatissement* de la Terre par la considération de la précession et de l'attraction (problème de M. Poincaré). Enfin j'ai soumis ces différents problèmes à des *calculs pratiques et numériques*, au moyen de différentes lois de densité, afin de vérifier, préciser et compléter les calculs purement théoriques.

En donnant toutefois la première place à l'hypothèse fondamentale de Clairaut, je ne me suis attaché exclusivement à aucune, mais je me suis efforcé de les envisager toutes successivement avec leurs inconvénients, leurs avantages et les limites des solutions qu'elles peuvent fournir.

J'ai tout d'abord posé les *équations générales* du problème suivant la méthode classique et suivant celle de M. Hamy, en étendant ces équations à l'hypothèse d'une variation continue de la densité (M. Hamy n'avait considéré que des couches discontinues). J'en ai

déduit une relation générale et simple entre la variation de la vitesse en profondeur et en latitude et la variation de l'aplatissement

$$\frac{\partial \omega^2}{\partial a} + 2a\frac{\partial \omega^2}{\partial x^2} = \frac{2\pi f C}{(1+\lambda^2)^2}\frac{d\lambda^2}{da} \qquad \text{où} \qquad C > 0.$$

On en conclut, entre autres choses, que dans l'équilibre permanent les surfaces de niveau ne peuvent pas être rigoureusement ellipsoïdales (Hamy) et que, de plus, l'aplatissement des ellipsoïdes déformés croît toujours du centre à la surface.

J'ai étudié, dans le second Chapitre, le *cas général des ellipsoïdes de révolution* et j'ai pu réussir à étendre à l'ellipsoïde hétérogène les démonstrations faites pour les ellipsoïdes de Maclaurin. On démontre, en effet, que dans les différents cas la relation entre la vitesse et l'aplatissement des surfaces de niveau conserve une forme analogue : la vitesse est nulle pour $\lambda^2 = 0$ et pour $\lambda^2 = \infty$ et passe par un maximum dans l'intervalle. De plus, la force centrifuge ne saurait, en aucun cas, devenir égale à l'attraction, ni aucune surface être sphérique. Dans le cas d'une vitesse uniforme sur toutes les couches, on aurait

$$D_1 y < \frac{\omega^2}{2\pi f} < \rho_0 y, \qquad y = \frac{3+\lambda_1^2}{\lambda_1^3}\operatorname{arc\,tang}\lambda_1 - \frac{3}{\lambda_1^2};$$

on sait qu'on a $\omega^2 = 2\pi f D_1 y$ dans le cas de l'ellipsoïde homogène.

J'ai ensuite repris, rapidement, les principales démonstrations relatives à l'*équation et au problème de Clairaut*, au moyen des nouvelles équations établies par la méthode de M. Hamy. Ces démonstrations sont souvent ainsi simplifiées, et je les complète pour les adapter aux différentes hypothèses envisagées dans ce travail et aux calculs numériques postérieurs. J'ai mis en évidence la fonction très utile dans la suite $\zeta = -\frac{rD'}{D}$ analogue à η de M. Radau et la formule qui les relie : $0 < \eta < \zeta < 3$. J'ai démontré que cette fonction η peut avoir un maximum et pas de minimum et que, dans le cas de la Terre, elle était toujours croissante. Enfin, j'ai établi que la loi de variation des aplatissements ne dépend que de celle des densités et nullement de la vitesse, de la densité moyenne ou de la masse : l'aplatissement superficiel seul en dépend.

A la suite de M. Poincaré, j'ai repris l'étude des *limites de l'aplatis-*

sement en tenant compte de la précession et de l'attraction. J'ai d'abord mis en relief les trois formules fondamentales : équation de Clairaut à la surface, formule des moments d'inertie et formule tirée de ces deux-là, qui permettront de calculer *numériquement* trois valeurs distinctes de l'aplatissement : l'une dépendant seulement de l'attraction et de la force centrifuge ou de φ, l'autre des moments d'inertie ou de J, la troisième des deux quantités φ et J.

J'ai donné ensuite l'équation de condition qu'on tire des précédentes en y introduisant la condition de la vitesse constante, on a

$$\lambda^2 + \frac{4}{5} J \frac{\sqrt{1+\eta_1}}{K} = 2J + \varphi \qquad \text{ou} \qquad e + \frac{2}{5} J \frac{\sqrt{1+\eta_1}}{K} = J + \frac{\varphi}{2}.$$

M. Poincaré avait établi une limite inférieure $\frac{1}{e} > 287,10$ en vertu du maximum de K. Comme η est toujours croissant dans le cas de la Terre, donc $\eta < \eta_1$, j'en ai déduit une limite supérieure $\frac{1}{e} < 297,40$. Des calculs numériques et pratiques variés (25 déterminations), avec différentes lois de densités, donnent des limites encore beaucoup plus étroites

$$297,13 < \frac{1}{e} < 297,22.$$

Mais en négligeant λ^4, on laisse planer une indétermination de 1,5 au moins, qui exige qu'on tienne compte de λ^4.

J'ai donc repris rapidement pour les appliquer à ce nouveau problème, et en partant toujours des nouvelles équations tirées de la méthode de M. Hamy, les calculs de M. Callandreau, dans son beau Mémoire où il *tient compte de* λ^4 et de la déformation de l'ellipsoïde. Après avoir retrouvé et transformé ses formules pour les appliquer à l'équation de condition du problème de M. Poincaré, je trouve pour les nouvelles limites théoriques

$$\frac{1}{e} = 297,12 \pm 0,38 \qquad \text{à } 0,01 \text{ près.}$$

De plus, l'influence des termes en e^3 est négligeable, on a cinq chiffres exacts. Pour tout aplatissement situé en dehors de ces limites, il faudrait faire, pour la Terre, d'autres hypothèses que celle de Clairaut.

Je donne enfin la formule de la variation de la pesanteur, en tenant compte de e^2. Elle introduit un terme en e^2 qui peut élever de 2 à 3 unités l'inverse de l'aplatissement déterminé autrefois par le pendule, et un terme en $e^2 \cos^4 l$ qui se trouve être *pratiquement* nul pour la Terre. Le nombre trouvé par Faye devient 296,7.

J'ai alors étudié dans le Chapitre suivant les *principales de ces hypothèses* et montré comment elles modifient l'équation de condition et de quelle manière elles pourraient cadrer avec les différents aplatissements possibles. Dans le cas d'une Terre solide et $\frac{1}{e} < 297$, il aurait fallu qu'elle se solidifie à une vitesse constante plus grande que la vitesse actuelle, ou bien avec la même vitesse superficielle, mais des vitesses intérieures décroissantes à partir de la surface. Dans le cas d'une Terre fluide et $\frac{1}{e} < 297$, il faudrait admettre des vitesses croissantes à partir de la surface dont le ralentissement s'expliquerait par le frottement des marées. Il a fallu, dans cette hypothèse générale toute nouvelle des vitesses variables, reprendre la théorie de la précession et l'on aboutit, pour déterminer la nouvelle valeur des rapports des moments d'inertie, à la formule

$$\omega_1 \int_0^1 \frac{\rho}{\omega} da^5 \lambda^2 = 2\mathrm{J} \int_0^1 \rho\, da^5 \qquad \text{ou} \qquad \omega_1 \int_0^1 \frac{\rho}{\omega} da^5 e = \mathrm{J} \int_0^1 \rho\, da^5.$$

Les calculs de précession m'ont amené à étudier la déviation élémentaire exercée dans ce cas par l'action du Soleil et de la Lune sur un anneau fluide tournant suivant un parallèle terrestre. Je trouve que la déviation, maximum à l'équateur, décroît puis devient nulle vers 35° où elle change alors de signe. Il s'ensuit que les couches superficielles de ce parallèle sont alternativement comprimées et dilatées suivant les mêmes périodes et les mêmes maximums que la nutation elle-même. Ce qui permet d'esquisser une *théorie des tremblements de Terre* qui cadre avec la théorie expérimentale de de Parville.

Le Chapitre VII est consacré aux *calculs numériques pratiques*, faits au moyen de la loi de Lipschitz et appliqués aux différentes hypothèses étudiées ci-dessus. L'hypothèse de Clairaut et les trois équations fondamentales qui s'y rattachent fournissent trois séries de valeurs pour e, quand on fait varier ρ_1 de 2 à 3. Ces séries, intéres-

santes en elles-mêmes, le sont plus encore par ce fait que leur accord a toujours lieu pour $\frac{1}{e} = 287,17$ à 0,02 près. Les mêmes calculs dans le cas d'une Terre solide ou de vitesses variables fixent les conditions pratiques que ces hypothèses exigent. Ils montrent qu'alors au contraire l'aplatissement peut varier dans de larges limites, au delà de 280 et de 300. Des Tableaux et des graphiques résument ces calculs, qui complètent les essais de Roche et de M. Hamy, qui n'avaient considéré que trois couches distinctes seulement. La variation de densité étudiée ici est au contraire continue. J'ai étudié encore deux autres lois : $\eta' = 0$ ou $\eta = \eta_1$ qui est un cas limite, et $\rho = \rho_0(1 - \alpha r^n)^m$ qui permet d'expliquer l'aplatissement considérable de Jupiter et de Saturne, ce qui est impossible avec la loi de Lipschitz. J'ai enfin donné quelques formules et calculé quelques éléments pour la seconde approximation en tenant compte de e^2. La déformation maximum de l'ellipsoïde reste comprise entre $1^m,26$ et $4^m,27$. (Valeur probable $3^m,28$.)

Il faut remarquer, en terminant, que les limites indiquées ici cadrent parfaitement avec la détermination de l'aplatissement faite par M. Helmert. Si elle est confirmée, comme elle semble l'être déjà, d'après la Note de M. Poincaré dans l'*Annuaire* de 1911, Note A, ce sera une confirmation également de l'hypothèse de Clairaut, puisque toute autre hypothèse exige un aplatissement un peu différent, comme on l'a vu.

Rappelons que l'hypothèse de Clairaut suppose que la Terre tourne tout d'une pièce avec une vitesse constante et qu'elle est assez fluide, ou du moins que l'écorce possède assez de jeu ou d'élasticité pour se mettre, au moins à la longue, en équilibre avec les forces d'attraction et la force centrifuge. Or, comme le disait excellemment M. Poincaré dans la Note citée : « Il convient, sans doute, de se représenter la Terre comme pourvue d'une certaine viscosité, de telle sorte que tout en se comportant comme un solide sous l'influence de forces dont les variations seraient relativement rapides, elle aurait cédé à la façon d'un corps pâteux à des actions séculaires dont les effets se seraient accumulés lentement » (p. 23). Les expériences de M. Hecker, à Potsdam (*Annuaire*, 1909, Note de M. Lallemand), sur la déviation de la verticale démontrent que l'écorce possède assez de souplesse pour

obéir, en 24 heures, au moins partiellement, aux forces perturbatrices produisant des marées diurnes. Il est évident qu'elle est depuis longtemps en équilibre avec les forces constantes de l'attraction et de la force centrifuge [1]. Il en serait de même *a fortiori* à l'intérieur car déjà à 20^{km} de profondeur la pression serait assez considérable pour écraser et réduire en poussière le granit qui forme la partie superficielle de l'écorce (RADAU, *La constitution intérieure de la Terre*, p. 79). M. Radau ajoutait alors, en 1880 : « Le cuivre, l'acier, la fonte de fer résistent à des pressions doubles ou triples, mais que deviennent les métaux sous une pression cent fois, mille fois plus fortes? » Nous le savons maintenant et les expériences de MM. Tesla, Guillaume, etc. établissent que sous fortes pressions les métaux *fluent* comme les liquides et se moulent même à froid. De même à de grandes vitesses, sous de fortes pressions, les liquides acquièrent une rigidité apparente égale à celle des solides. Un jet d'eau sous une pression de 500^{atm} acquière la rigidité de l'acier et ne peut être coupé même par un fort coup d'épée. On peut dire que, sous fortes pressions, les corps ne sont plus ni liquides ni solides mais possèdent à la fois des propriétés de ces deux états qui nous paraissent contradictoires, de même qu'à de hautes températures, au delà du point critique, et sous fortes pressions, les corps ne sont ni liquides ni gazeux mais possèdent des propriétés mixtes. Et c'est pourquoi j'ai tenu à envisager également les différentes

---

[1] Ces expériences de Potsdam justifient pleinement les hypothèses de Pratt et de Faye sur la *compensation* des masses continentales et sous-marines, l'hypothèse de l'*isostasie* de Airy reprise par M. Hayford, appuyées d'ailleurs sur de sérieuses considérations expérimentales. Si l'écorce possède un certain jeu et repose sur un sous-sol au moins visqueux, on aura à une certaine profondeur une surface de niveau en équilibre hydrostatique, sur laquelle la pression est partout la même. Le poids et la masse des couches situées entre cette surface et la surface extérieure seront donc aussi partout les mêmes. Il y aura *une certaine* compensation au point de vue de l'attraction. D'ailleurs on s'explique, qu'au moment de la formation de la croûte terrestre, les parties les plus lourdes se sont enfoncées le plus profondément, refoulant les plus légères, les continents, et formant les cavités remplies par les eaux, les océans. Le refroidissement au contact de l'eau n'a fait qu'accentuer la différence de densité et par conséquent de niveau.

hypothèses qui peuvent ne pas s'exclure et qui du moins contribuent à limiter la meilleure solution.

Les principaux Mémoires utilisés ont été :

1° Pour le problème général des deux premiers Chapitres, la thèse de M. Hamy, *Étude de la figure des corps célestes*, 1887, où il admet des couches discontinues et ne traite complètement que le cas des surfaces homofocales.

2° Pour le problème de Clairaut et celui de M. Poincaré, de nombreuses Notes indiquées au cours du travail. C'est d'ailleurs une partie classique sur laquelle on pourra consulter avec fruit, par exemple, le Tome II de la *Mécanique céleste* de Tisserand.

3° Pour la seconde approximation, en tenant compte de λ^4 ou e^2, j'ai surtout utilisé le travail de M. Callandreau, *Mémoire sur la théorie de la figure des planètes*, 1889, précédé de celui de Airy, suivi de ceux de Helmert, Wiechert, Darwin, etc.

4° Enfin, pour les calculs numériques, il faut citer ceux de Roche, Hamy, Wiechert, faits dans l'hypothèse d'une Terre composée de 2 ou 3 couches seulement, et un calcul isolé de G.-H. Darwin au moyen de la formule de Roche.

CHAPITRE I.

ÉQUATIONS GÉNÉRALES ET ÉQUILIBRE PERMANENT.

1. *Les deux méthodes.* — Soit une masse fluide hétérogène composée de couches ellipsoïdales de densité variable ρ. En suivant la *méthode imaginée par M. Hamy* (¹), nous pouvons la regarder comme formée, non plus de couches ellipsoïdales superposées, mais de véritables ellipsoïdes qui se compénètrent. Nous donnons à l'ellipsoïde limité par la surface S, et d'axes a, b, c, une densité égale à la différence de densité entre deux surfaces voisines. Mais nous remplaçons ici les différences finies de M. Hamy par les différentielles et les Σ par des $\int$ afin de considérer une variation continue et quelconque de la

(¹) *Étude de la figure des corps célestes*, 1887, p. 3.

densité. On représentera cette différentielle de la densité par $-\rho' da$ parce qu'on a $\rho' < 0$ et que les densités doivent être positives. On les évaluera sur l'axe de rotation a.

Soit un point $N(x_n, y_n, z_n)$ situé sur l'ellipsoïde S_n d'axes a_n, b_n, c_n. Les composantes de l'attraction des ellipsoïdes pour lesquels ce point est extérieur seront, en employant les formules de Jacobi,

$$X_e = -2\pi f x_n \int_0^{a_n} -\rho' da \int_\mu^\infty \frac{ds}{(a^2+s)\Delta_s},$$

où

$$\Delta_s = \frac{\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}}{abc},$$

et μ étant la racine positive de l'équation,

$$(1) \qquad \frac{x_n^2}{a^2+\mu} + \frac{y_n^2}{b^2+\mu} + \frac{z_n^2}{c^2+\mu} = 1.$$

Pour les ellipsoïdes qui contiennent le point N à leur intérieur, en commençant par l'ellipsoïde $S_1(\rho_1, a_1, b_1, c_1)$, on aura

$$X_i = -2\pi f x_n \rho_1 \int_0^\infty \frac{ds}{(a_1^2+s)\Delta_s} - 2\pi f x_n \int_{a_n}^1 -\rho' da \int_0^\infty \frac{ds}{(a^2+s)\Delta_s}$$
$$= -2\pi f x_n \int_{a_n}^1 (\rho_1 - \rho' da) \int_0^\infty \frac{ds}{(a^2+s)\Delta_s} \quad [1],$$

$$(2) \qquad X = X_e + X_i = -2\pi f x_n \int_0^{a_n} -\rho' da \int_\mu^\infty \frac{ds}{(a^2+s)\Delta_s}$$
$$- 2\pi f x_n \int_{a_n}^1 (\rho_1 - \rho' da) \int_0^\infty \frac{ds}{(a^2+s)\Delta_s}.$$

Les composantes Y et Z s'obtiendraient en changeant x_n, a_n, a en y_n, b_n, b et en z_n, c_n, c.

---

[1] Cette dernière notation, qui réduit X_i à un seul terme, n'est pas très régulière; mais je l'ai trouvée très commode pour la suite du calcul car elle permet de réduire la formule fondamentale (5) à deux termes comme la formule (5'), ce qui en fait ressortir davantage les analogies et rend plus facile le passage de l'une à l'autre. Il suffit de se rappeler que le terme en ρ_1 est une constante où l'on donne à l'élément d'intégration sa valeur à la surface.

Les $\int_\mu^\infty$ et $\int_0^\infty$ sont des fonctions de a, b, c de la couche S, à laquelle correspond ρ' et ρ ou ρ_1. Les $\int_\mu^\infty$ sont en outre fonction de x_n, y_n, z_n, d'après (1).

En désignant par ω la vitesse de rotation du point N, les composantes de la force agissant sur le point N seront :

$$X, \quad Y + \omega^2 y_n, \quad Z + \omega^2 z_n,$$

les coordonnées x_n, y_n, z_n du point N vérifiant la relation

$$\frac{x_n^2}{a_n^2} + \frac{y_n^2}{b_n^2} + \frac{z_n^2}{c_n^2} = 1. \tag{3}$$

L'équilibre exige que la force soit normale à la surface, d'où les conditions

$$X\frac{a_n^2}{x_n} = (Y + \omega^2 y_n)\frac{b_n^2}{y_n} = (Z + \omega^2 z_n)\frac{c_n^2}{z_n},$$

$$\omega^2 = -\frac{Y}{y_n} + \frac{a_n^2}{b_n^2}\frac{X}{x_n} = -\frac{Z}{z_n} + \frac{a_n^2}{c_n^2}\frac{X}{x_n}. \tag{4}$$

Ces deux conditions donnent immédiatement :

$$\frac{\omega^2}{2\pi f} = \frac{1}{b_n^2}\int_0^{a_n} -\rho'\,da \int_\mu^\infty \left(\frac{b_n^2}{b^2+s} - \frac{a_n^2}{a^2+s}\right)\frac{ds}{\Delta_s} \tag{5}$$
$$+ \frac{1}{b_n^2}\int_{a_n}^1 (\rho_1 - \rho'\,da)\int_0^\infty \left(\frac{b_n^2}{b^2+s} - \frac{a_n^2}{a^2+s}\right)\frac{ds}{\Delta_s},$$

$$\frac{\omega^2}{2\pi f} = \frac{1}{c_n^2}\int_0^{a_n} -\rho'\,da \int_\mu^\infty \left(\frac{c_n^2}{c^2+s} - \frac{a_n^2}{a^2+s}\right)\frac{ds}{\Delta_s} \tag{6}$$
$$+ \frac{1}{c_n^2}\int_{a_n}^1 (\rho_1 - \rho'\,da)\int_0^\infty \left(\frac{c_n^2}{c^2+s} - \frac{a_n^2}{a^2+s}\right)\frac{ds}{\Delta_s}.$$

Ces deux valeurs de ω doivent être égales. Il y a une solution évidente : $b = c$, $b_n = c_n$: ellipsoïdes de révolution. Dans les autres cas, on ignore.

La *méthode classique* consiste à considérer directement l'ellipsoïde hétérogène comme formé de couches ellipsoïdales de densité et d'apla-

tissement variables. Or la différentiation des formules de l'ellipsoïde homogène donne pour l'attraction d'une couche élémentaire

$$dX_e = -2\pi f x_n \rho d \int_\mu^\infty \frac{ds}{(a^2+s)\Delta_s}, \qquad dX_i = -2\pi f x_n \rho d \int_0^\infty \frac{ds}{(a^2+s)\Delta_s}.$$

Pour l'attraction de l'ellipsoïde hétérogène, puis pour ω^2, on a ensuite

$$X = X_e + X_i = -2\pi f x_n \left[\int_0^{a_n} \rho d \int_\mu^\infty \frac{ds}{(a^2+s)\Delta_s} + \int_{a_n}^1 \rho d \int_0^\infty \frac{ds}{(a^2+s)\Delta_s} \right],$$

(5′)
$$\frac{\omega^2}{2\pi f} = \frac{1}{b_n^2} \int_0^{a_n} \rho d \int_\mu^\infty \left(\frac{b_n^2}{b^2+s} - \frac{a_n^2}{a^2+s} \right) \frac{ds}{\Delta_s}$$
$$+ \frac{1}{b_n^2} \int_{a_n}^1 \rho d \int_0^\infty \left(\frac{b_n^2}{b^2+s} - \frac{a_n^2}{a^2+s} \right) \frac{ds}{\Delta_s}.$$

Cette dernière formule peut s'écrire :

$$\frac{\omega^2 b_n^2}{2\pi f} = \int_0^{a_n} \rho \, d\Lambda_\mu + \int_{a_n}^1 \rho \, d\Lambda_0, \qquad \Lambda_\mu = \int_\mu^\infty \left(\frac{b_n^2}{b^2+s} - \frac{a_n^2}{a^2+s} \right) \frac{ds}{\Delta_s}.$$

En intégrant par parties, on obtient

$$\frac{\omega^2 b_n^2}{2\pi f} = (\rho \Lambda_\mu)_0^{a_n} + (\rho \Lambda_0)_{a_n}^1 - \int_0^{a_n} \Lambda_\mu \, d\rho - \int_{a_n}^1 \Lambda_0 \, d\rho.$$

Or, si l'on fait $a = 0$, on a $b = 0$ et $c = 0$, d'où $\frac{1}{\Delta_s} = 0$ et $\Lambda_\mu = 0$. De même, pour $a = a_n$, on a $b = b_n$; $c = c_n$ et $\mu = 0$, d'après 1 et 3. On a donc

$$(\rho \Lambda_\mu)^{a_n} = (\rho \Lambda_0)^{a_n} \qquad \text{et} \qquad (\rho \Lambda_\mu)_0^{a_n} + (\rho \Lambda_0)_{a_n}^1 = (\rho \Lambda_0)^1 = \rho_1 \Lambda_0.$$

Il vient :

$$\frac{\omega^2 b_n^2}{2\pi f} = -\int_0^{a_n} \Lambda_\mu \, d\rho - \int_{a_n}^1 \Lambda_0 \, d\rho + \rho_1 \Lambda_0 = \int_0^{a_n} - \rho' \Lambda_\mu \, da + \int_{a_n}^1 (\rho_1 - \rho' \, da) \Lambda_0.$$

C'est précisément la formule (5). Ces deux formules (5) et (5′) sont donc identiques. La première a l'avantage de présenter les Λ_0 et les Λ_μ sous le signe somme, sans différentiation, en conservant la forme

simple de l'attraction des ellipsoïdes homogènes. On pourra donc plus facilement, au moyen de ces formules en ρ', tenir compte de tous les résultats acquis sur ce dernier point.

Nous distinguerons maintenant l'*équilibre permanent* où les frottements ont égalisé les vitesses en profondeur et en latitude et l'*équilibre transitoire* où ces vitesses ne sont pas encore égalisées (Soleil, Jupiter, Saturne). Ce dernier équilibre, d'ailleurs, serait définitif si le frottement était nul.

Nous allons donc étudier l'expression de la variation de ω^2 en latitude et en profondeur.

2. *Variation de la vitesse de rotation en latitude.* — Les formules (5) et (6) donnent la vitesse de rotation sur la couche S_n. Il suffit de les dériver par rapport à x_n^2. On remarquera que ω^2 est fonction de x_n^2, seulement par l'intermédiaire de μ. On aura

$$(7) \qquad \frac{\partial}{\partial x_n^2}\frac{\omega^2}{2\pi f} = \frac{1}{b_n^2}\int_0^{a_n} -\rho'\frac{\partial A_\mu}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial x_n^2}\,da,$$

$$(8) \qquad \frac{\partial A_\mu}{\partial \mu} = -\left(\frac{b_n^2}{b^2+\mu} - \frac{a_n^2}{a^2+\mu}\right)\frac{1}{\Delta_\mu} \qquad (\Delta_\mu = \Delta_s \quad \text{où} \quad s=\mu).$$

μ est défini par (1). Pour obtenir $\frac{\partial \mu}{\partial x_n^2}$ éliminons y_n^2 entre (1) et (3) en multipliant d'abord (3) par $\frac{b_n^2}{b^2+\mu}$ et lui retranchant (1). On obtient

$$\frac{x_n^2}{a_n^2}\left(\frac{b_n^2}{b^2+\mu} - \frac{a_n^2}{a^2+\mu}\right) + \frac{z_n^2}{c_n^2}\left(\frac{b_n^2}{b^2+\mu} - \frac{c_n^2}{c^2+\mu}\right) = \frac{b_n^2}{b^2+\mu} - 1.$$

Dérivons par rapport à x_n^2, on a

$$(9) \qquad B\frac{\partial \mu}{\partial x_n^2} = -\frac{1}{a_n^2}\left(\frac{b_n^2}{b^2+\mu} - \frac{a_n^2}{a^2+\mu}\right),$$

en posant

$$(10) \qquad \begin{aligned} B &= \frac{x_n^2}{(a^2+\mu)^2} + \frac{z_n^2}{(c^2+\mu)^2} - \frac{b_n^2}{(b^2+\mu)^2}\left(\frac{x_n^2}{a_n^2} + \frac{z_n^2}{c_n^2} - 1\right) \\ &= \frac{x_n^2}{(a^2+\mu)^2} + \frac{y_n^2}{(b^2+\mu)^2} + \frac{z_n^2}{(c^2+\mu)^2}. \end{aligned}$$

Portant (8) et (9) dans (7), on obtient

$$\text{(11)} \qquad \frac{\partial \omega^2}{\partial x_n^2} = \frac{2\pi f}{a_n^2 b_n^2} \int_0^{a_n} \left(\frac{b_n^2}{b^2+\mu} - \frac{a_n^2}{a^2+\mu} \right)^2 \frac{-\rho'\, da}{\mathrm{B}\Delta_\mu}.$$

La seconde condition (6) donne de même

$$\text{(11')} \qquad \frac{\partial \omega^2}{\partial x_n^2} = \frac{2\pi f}{a_n^2 c_n^2} \int_0^{a_n} \left(\frac{c_n^2}{c^2+\mu} - \frac{a_n^2}{a^2+\mu} \right)^2 \frac{-\rho'\, da}{\mathrm{B}\Delta_\mu}.$$

Pour que la vitesse de rotation soit la même sur toute la surface S_n quelconque, c'est-à-dire pour que la figure ellipsoïdale d'équilibre soit compatible avec une vitesse de rotation uniforme en latitude, il faut, ou bien :

1° $\rho' = 0$, densité constante, ellipsoïde homogène;

2° ou $\dfrac{a_n^2}{a^2+\mu} = \dfrac{b_n^2}{b^2+\mu} = \dfrac{c_n^2}{c^2+\mu}$, quel que soit a, b, c : ellipsoïdes homofocaux.

Dans ce dernier cas, on aurait

$$\lambda^2 a^2 = b^2 - a^2 = h^2, \qquad \lambda'^2 a^2 = c^2 - a^2 = k^2.$$

λ et λ' deviendraient infinis au centre, avec $a = 0$; $b = h$; $c = k$. L'aplatissement serait égal à 1 et l'ellipsoïde central réduit à un disque aplati.

5. *Variation de la vitesse de rotation en profondeur.* — Pour plus de simplicité nous l'étudierons le long de l'axe polaire a, suivant lequel on évalue aussi les densités [1]. (*Voir* la Note à la fin.)

Transformons d'abord la formule (5) de façon à n'avoir qu'une seule limite en a_n. On aura :

$$\text{(12)} \qquad \frac{\omega^2}{2\pi f} = \frac{1}{b_n^2} \int_0^{\infty} (\rho_1 - \rho'\, da) \int_0^{\infty} \left(\frac{b_n^2}{b^2+s} - \frac{a_n^2}{a^2+s} \right) \frac{ds}{\Delta}$$
$$- \frac{1}{b_n^2} \int_0^{a_n} -\rho'\, da \int_0^{\mu} \left(\frac{b_n^2}{b^2+s} - \frac{a_n^2}{a^2+s} \right) \frac{ds}{\Delta}.$$

---

[1] Le long de l'axe polaire $y_n = z_n = 0$, les formules (1) et (3) se réduisent à

$$1' \ \frac{x_n^2}{a^2+\mu} = 1, \qquad 3' \ \frac{x_n^2}{a_n^2} = 1, \qquad a^2 + \mu = a_n^2 = x_n^2.$$

Cette expression dérivée par rapport à a_n donne

(13) $$\frac{1}{2\pi f}\frac{\partial\omega^2}{\partial a_n}=\frac{\partial D}{\partial a_n}-\frac{a_n^2}{b_n^2}\frac{\partial E}{\partial a_n}-C\frac{d}{da_n}\left(\frac{a_n^2}{b_n^2}\right)$$

où

$$D=\int_0^{a_n}-\rho'\,da\int_0^{\mu}\frac{ds}{(b^2+s)\Delta_s},\qquad E=\int_0^{a_n}-\rho'\,da\int_0^{\mu}\frac{ds}{(a^2+s)\Delta_s},$$

et en rétablissant les intégrales dans l'ordre primitif

$$C=\int_0^{a_n}-\rho'\,da\int_{\mu}^{\infty}\frac{ds}{(a^2+s)\Delta_s}+\int_{a_n}^{1}(\rho_1-\rho'\,da)\int_0^{\infty}\frac{ds}{(a^2+s)\Delta_s}=-\frac{1}{2\pi f}\frac{X}{a_n}.$$

On aura donc d'abord $C>0$ avec $\rho'<0$, puis

$$\frac{a_n^2}{b_n^2}=\frac{1}{1+\lambda^2},\qquad -C\frac{d}{da_n}\left(\frac{a_n^2}{b_n^2}\right)=\frac{C}{(1+\lambda^2)^2}\frac{d\lambda^2}{da_n}.$$

Dans E, ρ' dépend seulement de la variable a, $\int_0^{\mu}$ est fonction de a et de μ qui, défini par (1), est fonction de a et de a_n, de a_n par x_n d'après (3). Nous aurons donc

$$\frac{\partial E}{\partial a_n}=-\rho'\left[\int_0^{\mu}\frac{ds}{(a^2+s)\Delta_s}\right]^{a_n}+\int_0^{a_n}-\rho'\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\int_0^{\mu}\frac{ds}{(a^2+s)\Delta_s}\right]\frac{\partial\mu}{\partial x_n^2}\frac{\partial x_n^2}{\partial a_n}\,da.$$

Dans la première accolade, nous aurons, après intégration, une fonction de μ et de a, où il faudra faire $a=a_n$. Or, si nous faisons $a=a_n$ dans (1), on a $\mu=0$ d'après (3). Donc ce terme est nul.

Dans le second terme, nous avons déjà obtenu

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\int_0^{\mu}\frac{ds}{(a^2+s)\Delta_s}=\frac{1}{(a^2+\mu)\Delta_\mu},\qquad \frac{\partial\mu}{\partial x_n^2}=\frac{-1}{Ba_n^2}\left(\frac{b_n^2}{b^2+\mu}-\frac{a_n^2}{a^2+\mu}\right).$$

On a aussi dans (3') :

$$\frac{\partial x_n^2}{da_n}=\frac{\partial a_n^2}{\partial a_n}=2a_n;$$

d'où, finalement,

$$\frac{\partial E}{\partial a_n}=-\frac{2a_n}{a_n^2}\int_0^{a_n}\left(\frac{b_n^2}{b^2+\mu}-\frac{a_n^2}{a^2+\mu}\right)\frac{-\rho'\,da}{(a^2+\mu)B\Delta_\mu}.$$

On aurait de même :

$$\frac{\partial D}{\partial a_n} = -\frac{2a_n}{a_n^2}\int_0^{a_n}\left(\frac{b_n^2}{b^2+\mu} - \frac{a_n^2}{a^2+\mu}\right)\frac{-\rho'\,da}{(b^2+\mu)B\Delta_\mu};$$

$$\frac{\partial D}{\partial a_n} - \frac{a_n^2}{b_n^2}\frac{\partial E}{\partial a_n} = -\frac{2a_n}{a_n^2 b_n^2}\int_0^{a_n}\left(\frac{b_n^2}{b^2+\mu} - \frac{a_n^2}{a^2+\mu}\right)^2\frac{-\rho'\,da}{B\Delta_\mu}.$$

Ou, en tenant compte de (11),

$$\frac{\partial D}{\partial a_n} - \frac{a_n^2}{b_n^2}\frac{\partial E}{\partial a_n} = -\frac{2a_n}{2\pi f}\frac{\partial \omega^2}{\partial x_n^2}.$$

On obtient donc finalement la *formule fondamentale*

(14) $$\frac{\partial \omega^2}{\partial a_n} + 2a_n\frac{\partial \omega^2}{\partial x_n^2} = \frac{2\pi f C}{(1+\lambda^2)^2}\frac{d\lambda^2}{da_n}.$$

La formule (6) donnerait une expression identique où λ' remplacerait λ et serait défini par

$$c^2 = a^2(1+\lambda'^2).$$

4. *Conclusions.* — Nous étudierons le cas où les deux conditions de l'équilibre permanent seraient réalisées et ceux où il n'y en a qu'une seule.

1° L'équilibre permanent exige $\frac{\partial \omega^2}{\partial a_n} = 0$ et $\frac{\partial \omega^2}{\partial x_n^2} = 0$. Cette dernière condition ne peut être réalisée, nous l'avons vu, que si les surfaces de niveau sont des ellipsoïdes homofocaux. L'ensemble de ces deux conditions exige d'après (14), $\frac{d\lambda^2}{da_n} = 0$, c'est-à-dire que ces surfaces soient des ellipsoïdes homothétiques.

Ces deux conditions sont incompatibles. Dans un fluide hétérogène, l'équilibre permanent est impossible avec des surfaces ellipsoïdales. C'est le théorème de M. Hamy étendu au cas où la variation des densités est continue.

Volterra a également établi directement l'impossibilité d'ellipsoïdes homothétiques comme surfaces de niveau [1].

[1] *Acta mathematica*, t. VII, 1903, p. 105-124. M. Poincaré avait déjà démontré cette impossibilité pour des couches discontinues (*Journal de Liouville*, 4e série, t. 6, 1890, p. 69). Volterra étend cette démonstration à une

2° La formule (11) montre que, sauf pour les ellipsoïdes homofocaux, avec $\rho' < 0$ on a $\frac{\partial \omega^2}{\partial x_n^2} > 0$. La vitesse de rotation sur une surface S_n doit augmenter avec x_n de l'équateur au pôle pour que les surfaces de niveau soient ellipsoïdales.

Si donc l'équilibre permanent est atteint sur la surface S, la vitesse de rotation à l'équateur, devenue égale à celle du pôle, se trouve être un peu plus grande que celle qui permettait de réaliser une figure ellipsoïdale. La surface s'allongera en se renflant à l'équateur. Cet allongement a pour effet de diminuer la valeur X de la composante de l'attraction au pôle. La surface va donc se renfler à la fois au pôle et à l'équateur en se creusant entre les deux. C'est ce que M. Callandreau avait démontré pour un ellipsoïde de révolution en tenant compte de λ^4 (¹).

3° Supposons $\frac{\partial \omega^2}{\partial x_n^2} = 0$, nous aurons

$$\frac{\partial \omega^2}{\partial a_n} = \frac{2\pi f C}{(1+\lambda^2)^2} \frac{d\lambda^2}{da_n}.$$

On voit que, toutes choses égales d'ailleurs, $\frac{d\lambda^2}{da_n}$ est sensiblement proportionnel à $\frac{\partial \omega^2}{\partial a_n}$. La rapidité de variation de l'aplatissement en profondeur augmente avec celle de la vitesse de rotation. Nous vérifierons cette loi, au Chapitre suivant, sur trois exemples : ellipsoïdes homofocaux, λ croît de λ_1 à ∞, variation maximum de la vitesse; ellipsoïdes homothétiques, λ constant, variation de vitesse plus faible; enfin avec une vitesse constante λ décroît de λ_1 à λ_0. Si $\frac{\partial \omega^2}{\partial x_n^2}$ n'est pas nul ou négligeable, ces conclusions s'appliqueront à des ellipsoïdes déformés.

4° Supposons enfin $\frac{\partial \omega^2}{\partial a_n} = 0$. En remplaçant $\frac{\partial \omega^2}{\partial x_n}$ par sa valeur

---

variation continue de la densité, en faisant remarquer en passant que les démonstrations faites pour le discontinu ne permettent pas toujours de passer à la limite et de les appliquer à une variation continue.

(¹) *Mémoire sur la théorie de la figure des planètes*, 1889, p. 51.

dans (14), on a

$$(15)\qquad \frac{2\pi f C}{(1+\lambda^2)^2}\frac{d\lambda^2}{da_n} = \frac{2a_n}{a_n^2 b_n^2}\int_0^{a_n}\left(\frac{b_n^2}{b^2+\mu} - \frac{a_n^2}{a^2+\mu}\right)^2 \frac{-\rho'\,da}{B\Delta_\mu}.$$

Or, le second membre est toujours positif car $\rho' < 0$, donc $\frac{d\lambda^2}{da_n} > 0$. Si l'on suppose $\frac{\partial\omega^2}{\partial x_n^2} \neq 0$ de manière à réaliser des surfaces de niveau rigoureusement ellipsoïdales, leur aplatissement croîtra du centre à la surface. Le théorème de Clairaut en est un cas particulier.

Si $\frac{\partial\omega^2}{\partial x_n^2} = 0$ les surfaces ellipsoïdales sont déformées, mais la conclusion précédente subsiste appliquée à l'aplatissement correspondant.

Au centre $\frac{1}{B} = a_n^2$, $\Delta_\mu = 1$, le second membre tend vers 0, on a $\frac{d\lambda^2}{da_n} = 0$. L'aplatissement passe par un minimum au centre.

D'où le théorème général :

Dans une masse fluide hétérogène, l'équilibre permanent est impossible avec des surfaces ellipsoïdales. Quand il est atteint, les surfaces de niveau prennent la forme d'ellipsoïdes déprimés entre le pôle et l'équateur et dont l'aplatissement augmente, du centre à la surface, avec minimum au centre.

Voir la Note en appendice, page 462.

CHAPITRE II.

ELLIPSOÏDES DE RÉVOLUTION. LIMITES DE VITESSE ET D'APLATISSEMENT.

1. *Formules.* — Les équations générales du Chapitre précédent étaient établies pour des ellipsoïdes quelconques à deux ou trois axes. Pour les ellipsoïdes de révolution, les intégrations sont possibles et la formule (2) devient, d'après les expressions connues de l'attraction des

ellipsoïdes homogènes [1]

$$(16)\qquad \frac{X}{x} = -4\pi f \int_0^r -\rho' \quad \frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}(l - \operatorname{arc\,tang} l)\,da$$

$$-4\pi f \int_r^1 (\rho_1 - \rho'\,da)\frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}(\lambda - \operatorname{arc\,tang}\lambda);$$

$$(17)\qquad \frac{Y}{y} = -2\pi f \int_0^r -\rho' \quad \frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}\left(\operatorname{arc\,tang} l - \frac{l}{1+l^2}\right)da$$

$$-2\pi f \int_r^1 (\rho_1 - \rho'\,da)\frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}\left(\operatorname{arc\,tang}\lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right),$$

où

$$\lambda^2 = \frac{b^2 - a^2}{a^2}, \qquad l^2 = \frac{b^2 - a^2}{a^2+\mu} = \lambda^2\frac{a^2}{a^2+\mu}, \qquad \frac{x^2}{a^2+\mu} + \frac{y^2+z^2}{b^2+\mu} = 1,$$

puis

$$\omega^2 = -\frac{Y}{y} + \frac{a^2}{b^2}\frac{X}{x} = -\frac{Y}{y} + \frac{1}{1+\lambda^2}\frac{X}{x}$$

donne

$$(18)\quad \frac{\omega^2}{2\pi f} = \int_0^r -\rho' \quad \frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}\left(\frac{3+\lambda_r^2}{1+\lambda_r^2}\operatorname{arc\,tang} l - \frac{l}{1+l^2} - \frac{2l}{1+\lambda_r^2}\right)da$$

$$+\int_r^1 (\rho_1 - \rho'\,da)\frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}\left(\frac{3+\lambda_r^2}{1+\lambda_r^2}\operatorname{arc\,tang}\lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2} - \frac{2\lambda}{1+\lambda_r^2}\right).$$

Nous supposons, dans ce qui suit, que la vitesse est variable en latitude de manière que les surfaces soient rigoureusement ellipsoïdales. Pour plus de simplicité et pour rendre les résultats comparables, on évaluera la valeur de ω le long de l'axe polaire. Alors on a

$$a^2 + \mu = a_n^2 = r^2.$$

Alors

$$l^2 = \lambda^2\frac{a^2}{a^2+\mu} = \frac{a^2}{r^2}\lambda^2 \qquad \text{et} \qquad \frac{dl}{dr} = -\frac{a}{r^2}\lambda = -\frac{l}{r}.$$

Au centre, $l = 0$; sur la couche r, $l = \lambda_r$. On aura, en général, $l < \lambda_r$, sauf dans le cas des couches homofocales où $l = \lambda_r$.

La loi de variation des densités dans la masse étant supposée donnée,

---

[1] On désignera désormais par r le rayon polaire de la couche considérée et par l'indice r les éléments correspondants.

nous étudierons ce que deviennent ω et λ dans les différents cas principaux : couches homothétiques, surfaces homofocales, vitesse uniforme.

2. *Le rapport entre la force centrifuge et la composante de l'attraction*, en un point sur la surface S_r quelconque, est $\varphi = \frac{\omega^2 y}{Y}$. Il est égal au rapport des seconds membres de (18) et (17).

Les éléments d'intégration ne diffèrent que par la quantité entre crochets. Or on remarque qu'on a quand $\lambda_r = \infty$,

$$u = \frac{3+\lambda_r^2}{1+\lambda_r^2}\operatorname{arc\,tang} l - \frac{l}{1+l^2} - \frac{2l}{1+\lambda_r^2} = \operatorname{arc\,tang} l - \frac{l}{1+l^2} = u_\infty,$$

et

$$\frac{du}{d\lambda_r} = 4\lambda_r \frac{l - \operatorname{arc\,tang} l}{(1+\lambda_r^2)^2}.$$

Cette quantité est toujours positive : u varie donc toujours dans le même sens que λ_r. On a donc toujours : $u < u_\infty$. Il en est de même pour l'expression analogue en λ. Les éléments d'intégration de (18) sont donc tous plus petits que ceux de (17). On a toujours $\varphi < 1$. D'où le théorème :

L'attraction est toujours supérieure à la force centrifuge, à l'intérieur comme à la surface d'une masse fluide hétérogène, dont les surfaces de niveau sont des ellipsoïdes de révolution, quelles que soient la répartition des densités et la vitesse de rotation.

Les formules s'appliquent aussi bien à une variation brusque de la densité, le $-\rho' da$ étant alors un accroissement fini. Le théorème s'applique donc à toute la masse d'une planète, y compris son atmosphère. Si des éléments équatoriaux se sont détachés (anneaux de Saturne, anneaux de Laplace), il fallait que la vitesse de rotation fût plus grande que celle qui est compatible avec des surfaces ellipsoïdales d'équilibre.

Si les surfaces de niveau sont homofocales, on a au centre $\lambda_0 = \infty$ et $\varphi = 1$. Dans un ellipsoïde homogène φ est indépendant de ρ et tend vers 1 quand λ tend vers ∞ (disque aplati) :

$$\varphi = \frac{\omega^2 y}{Y} = \frac{(3+\lambda^2)\operatorname{arc\,tang}\lambda - 3\lambda}{(1+\lambda^2)\operatorname{arc\,tang}\lambda - \lambda}.$$

Remarque. — Si une surface quelconque était sphérique, c'est-à-dire $\lambda_r = 0$, on aurait

$$\frac{\omega^2}{2\pi f} = \int_0^r -\rho' \frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}\left(3 \operatorname{arc\,tang} l - \frac{l}{1+l^2} - 2l\right)$$
$$+ \int_r^1 (\rho_1 - \rho' da)\frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}\left(3 \operatorname{arc\,tang} \lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2} - 2\lambda\right).$$

Or l'expression en λ est nulle pour $\lambda = 0$ et sa dérivée est toujours négative. Cette expression est donc négative, si $\lambda \neq 0$. Il en est de même de l'expression en l. On ne peut donc pas avoir $\lambda \neq 0$ pour aucune surface, autrement on aurait $\omega^2 < 0$. On a donc partout, dans ce cas, $\lambda = 0$ et aussi $\omega^2 = 0$, d'où le théorème :

Dans une masse fluide hétérogène en équilibre, aucune surface de niveau, en particulier la surface extérieure, ne peut être sphérique, que si la vitesse de rotation est nulle sur toutes les surfaces de niveau, qui sont alors toutes sphériques.

5. *La dérivée de la vitesse* s'obtient facilement en écrivant

$$u_l = \frac{3+\lambda_r^2}{1+\lambda_r^2}\operatorname{arc\,tang} l - \frac{l}{1+l^2} - \frac{2l}{1+\lambda_r^2} = \frac{l^3}{1+l^2} - \frac{3+\lambda_r^2}{1+\lambda_r^2}(l - \operatorname{arc\,tang} l).$$

On aura ensuite $R > 0$ toujours, en posant

$$R = \int_0^r -\rho' \frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}(l - \operatorname{arc\,tang} l)\, da + \int_r^1 (\rho_1 - \rho' da)\frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}(\lambda - \operatorname{arc\,tang} \lambda).$$

La formule (18) devient, en remarquant que $\int_r^1 (\rho_1 - \rho' da) = \rho$,

$$\frac{\omega^2}{2\pi f} = \int_0^r -\rho' \frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}\,\frac{l^3}{1+l^2}\,da + \rho - \frac{3+\lambda_r^2}{1+\lambda_r^2}R.$$

Dérivant alors par rapport à r, on obtient

$$\frac{1+\lambda^2}{4\pi f}\,\frac{d\omega^2}{dr} = \frac{R}{1+\lambda^2}\,\frac{d\lambda^2}{dr} - \frac{1}{r}\int_0^r -\rho' \frac{1+\lambda^2}{(1+l^2)^2}\,\frac{l^3}{\lambda^3}(\lambda_r^2 - l^2)\,da.$$

Si les surfaces sont homothétiques, $d\lambda^2 = 0$; si elles sont homofocales, $l^2 = \lambda_r^2$ et $d\lambda^2 < 0$: dans les deux cas, $d\omega^2 < 0$. La vitesse croît de la surface au centre.

Si la vitesse de rotation est uniforme, on a

$$\frac{d\omega^2}{dr} = 0, \qquad \frac{R}{1+\lambda^2}\frac{d\lambda^2}{dr} = \frac{1}{r}\int_0^r \rho' \frac{1+\lambda^2}{(1+l^2)^2}\frac{l^3}{\lambda^3}(\lambda_r^2 - l^2)\,da.$$

Cette relation peut être vérifiée de deux façons : $l < \lambda_r$, $d\lambda^2 > 0$, les aplatissements croissent du centre à la surface. Ou bien $l > \lambda_r$. Les aplatissements seraient alors plus grands que ceux des surfaces homofocales correspondantes. On aurait alors $d\lambda^2 < 0$, aplatissements décroissants. Nous verrons que ce cas ne pourrait être réalisé que pour des valeurs considérables de l'aplatissement superficiel : $\lambda_1 > 2,53$. Nous savons, d'ailleurs, par la démonstration générale du Chapitre précédent, que ce cas n'est jamais réalisé car λ est croissant si ω est constant.

Dans le cas de la vitesse uniforme, on a toujours au centre

$$\frac{R_0}{1+\lambda^2}\frac{d\lambda^2}{dr} = -\rho'\frac{1+\lambda^2}{(1+l^2)^2}\frac{l^3}{\lambda^3}(\lambda_r^2 - l^2)\frac{da}{r},$$

les rapports se réduisent à l'unité et $l^2 = \lambda_0^2$, donc : $d\lambda^2 = 0$. L'aplatissement tend vers une limite minimum.

Les courbes représentatives des aplatissements dans les différents cas seraient données par la figure 1 :

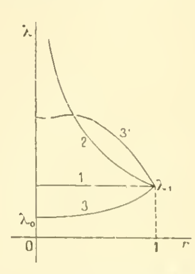


Fig. 1. — Lois des aplatissements.

1. Surfaces homothétiques. — 2. Surfaces homofocales. — 3. Vitesse constante.

Remarque. — On peut trouver de même l'expression de la variation de vitesse en latitude. En effet, les formules qui définissent l et la

surface S_u peuvent s'écrire :

$$x^2 + \frac{y^2}{1+l^2} = \frac{\lambda^2}{l^2} a^2, \qquad x^2 + \frac{y^2}{1+\lambda_r^2} = r^2.$$

En éliminant y^2 entre ces deux relations, on obtient

$$(a) \qquad \frac{x^2}{r^2} l^4 + \left(1 + \lambda_r^2 - \frac{x^2}{r^2}\lambda_r^2 - \frac{a^2}{r^2}\lambda^2\right) l^2 - \frac{a^2}{r^2}\lambda^2 = 0.$$

On en tire

$$\frac{dl}{dx^2} = \frac{l^3}{2}\,\frac{\lambda_r^2 - l^2}{a^2\lambda^2 + x^2 l^2}.$$

L'expression de u donne aussi

$$\frac{du}{dl} = \frac{2 l^2}{(1+l^2)^2}\,\frac{\lambda_r^2 - l^2}{1+\lambda_r^2}.$$

Or ω^2 est fonction de x^2 seulement par l'intermédiaire de l. On aura

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi f}\,\frac{\partial\omega^2}{\partial x^2} &= \int_0^r -\rho'\,\frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}\,\frac{\partial u}{\partial l}\,\frac{\partial l}{\partial x^2}\,da \\ &= \int_0^r -\rho'\,\frac{1+\lambda^2}{1+\lambda_r^2}\,\frac{l^5}{\lambda^3}\left(\frac{\lambda_r^2 - l^2}{1+l^2}\right)^2 \frac{da}{a^2\lambda^2 + x^2 l^2}.\end{aligned}$$

Cette expression est toujours positive. Pour que les surfaces de niveau soient ellipsoïdales, il faut que sur chaque surface la vitesse de rotation croisse de l'équateur au pôle, conclusion conforme au résultat général du Chapitre précédent.

4. *Étude des fonctions z.* — Dans les cas limites étudiés, les éléments d'intégration dépendent d'une fonction

$$(19) \qquad z = \frac{3+\lambda^2}{\lambda^3}\,\text{arc tang}\,l - \frac{l}{\lambda^3}\,\frac{1+\lambda^2}{1+l^2} - \frac{2l}{\lambda^3}.$$

où $l = \frac{a}{r}\lambda = \lambda\varepsilon$ avec $0 < \varepsilon < 1$ et qui devient égale à

$$(20) \qquad y = \frac{3+\lambda^2}{\lambda^3}\,\text{arc tang}\,\lambda - \frac{3}{\lambda^2}$$

pour $l = \lambda$ ou $\varepsilon = 1$.

Cette expression (20) définit la relation entre la vitesse de rotation d'un ellipsoïde homogène et son aplatissement. Nulle pour $\lambda = 0$ et pour $\lambda = \infty$, elle atteint son maximum 0,22467... pour $\lambda = 2,5293$....

Les fonctions z qui en diffèrent seulement par la valeur de ε ou l ont une allure analogue. Pour $\lambda = 0$ ou pour $\lambda = \infty$, elles sont toutes égales à o. Elles sont, de plus, toujours inférieures à la valeur correspondante de y. En effet, on trouve

$$(21)\qquad \frac{dz}{dl} = \frac{2l^2(\lambda^2 - l^2)}{\lambda^3(1+l^2)^2}, \qquad \frac{dz}{d\varepsilon} = \frac{2\lambda^2\varepsilon^2(1-\varepsilon^2)}{(1+\lambda^2\varepsilon^2)^2}.$$

Cette expression, nulle pour $\varepsilon = 0$ et pour $\varepsilon = 1$, reste toujours positive; z varie dans le même sens que ε. Nul pour $\varepsilon = 0$ (minimum), il croît jusqu'à y (maximum) quand ε croît de o à 1. Donc $0 < z < y$.

Si λ varie de o à ∞, z aura donc un maximum comme y. La position et la valeur de ce maximum auront une grande importance pour la suite.

Comme $l = \lambda\varepsilon$ on pourra écrire

$$(19')\qquad z = \frac{3+\lambda^2}{2\lambda^3}\,\text{arc tang}\,\lambda\varepsilon - \frac{\varepsilon}{\lambda^2}\,\frac{1+\lambda^2}{1+\lambda^2\varepsilon^2} - \frac{2\varepsilon}{\lambda^2}.$$

On aura après réduction en prenant la dérivée

$$\frac{dz}{d\lambda} = \frac{9+\lambda^2}{\lambda^4}\left[\frac{9+\lambda^2+15\lambda^2\varepsilon^2+3\lambda^4\varepsilon^2+4\lambda^4\varepsilon^4}{(9+\lambda^2)(1+\lambda^2\varepsilon^2)^2}\,\lambda\varepsilon - \text{arc tang}\,\lambda\varepsilon\right].$$

Appelons v la parenthèse, on aura $v = 0$ pour $\lambda = 0$ et $v = -\frac{\pi}{2}$ pour $\lambda = \infty$. On trouve ensuite

$$\frac{dv}{d\lambda} = \frac{2\lambda^2\varepsilon^2}{(9+\lambda^2)^2(1+\lambda^2\varepsilon^2)^3}\left[3(5-3\varepsilon^2)+\lambda^2(1-3\varepsilon^2)^2-\lambda^4\varepsilon^2(1+\varepsilon^2)\right].$$

Cette expression, qui est d'abord positive pour $\lambda = 0$, devient nulle puis reste négative quand λ tend vers l'infini. Donc v, d'abord nul, croît jusqu'à un maximum positif, puis décroît jusqu'à $-\frac{\pi}{2}$, en ne passant qu'une seule fois par o. Il en est de même de dz. Donc z a un maximum et un seul.

Désignons par u cette dernière parenthèse et traçons les courbes de u, v, z (*fig.* 2). Appelons λ_u et λ_v les valeurs de λ qui sont racines de u et de v. On aura toujours $\lambda_v > \lambda_u$ puisque v s'annule seulement après avoir passé par son maximum.

Or on peut écrire

$$-u = \lambda^4\varepsilon^2(1+\varepsilon^2) - \lambda^2(1-3\varepsilon^2)^2 - 3(5-3\varepsilon^2).$$

C'est un trinome du second degré en λ^2. Le produit des racines est négatif et leur somme positive :

$$P = -\frac{3(5-3\varepsilon^2)}{\varepsilon^2(1+\varepsilon^2)}, \qquad S = \frac{(1-3\varepsilon^2)^2}{\varepsilon^2(1+\varepsilon^2)}.$$

On a deux racines de signe contraire et la plus grande est positive.

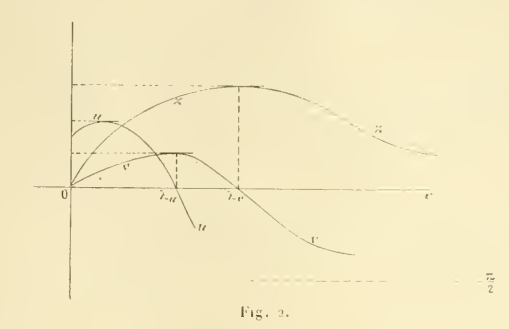


Fig. 2.

Quand ε tend vers o, P et S tendent vers ∞. La racine positive λ_u tend vers ∞. Il en est de même de λ_v. Le maximum de z est donc rejeté à ∞ avec λ. Pour $\varepsilon = 1$, on a

$$-u = 2(\lambda^2+1)(\lambda^2-3).$$

La valeur minimum de λ_u^2 est 3. On aura donc $\lambda_v^2 > 3$. Quand ε varie de 1 à o, le maximum du z correspondant a lieu pour une valeur $\lambda_v^2 > 3$ et qui augmente indéfiniment quand ε tend vers o.

En même temps la valeur de ce minimum tend vers o. En effet, d'après la formule (21), z varie toujours dans le même sens que ε. Les courbes des z seront toutes intérieures les unes aux autres et décroissantes avec ε ainsi que leurs maximums (*fig.* 3).

A l'origine, on a, en développant suivant les puissances de λ,

$$\frac{dz}{d\lambda} = \frac{4}{9}\frac{9+\lambda^2}{\lambda^4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\varepsilon^2\right)\lambda^5\varepsilon^3 = \frac{4}{9}(9+\lambda^2)\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\varepsilon^2\right)\lambda\varepsilon^3.$$

Pour $\lambda = 0$ à l'origine, la dérivée est nulle et la courbe tangente à l'axe des λ.

En procédant à quelques séries de calculs numériques pour des valeurs de ε de dixièmes en dixièmes, on obtient le Tableau suivant des valeurs de dz ainsi que la position et la valeur des maximums (on

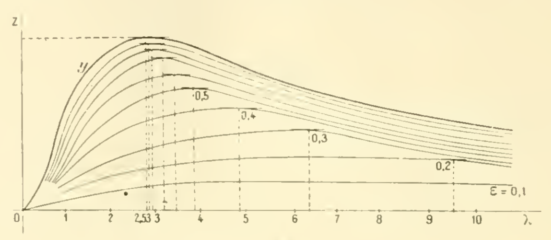


Fig. 3. — Courbes des valeurs de z pour 10 valeurs de ε.

a pris comme unité la quatrième décimale). On a pu tracer ainsi les courbes représentatives correspondantes de la figure 3.

$\varepsilon =$ λ	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	Moyenne
2,53	0	0,0029	154	281	310	271	136	117	50	19	0	0,014
3	0	0,0030	150	242	209	141	67	− 10	− 65	−100	109	−56
4	0	0,0038	120	120	60	− 16	− 80	−130	−159	−179	−183	−47
6	0	0,0037	54	− 6	− 49	− 93	−122	−145	−154	−160	−162	−79
10	0	0,0021	− 3	− 38	− 59	− 72	− 80	− 88	− 90	− 90	− 90	−58
$\lambda_m = \infty$		20	9,5	6,3	4,7	3,8	3,5	2,9	2,7	2,6	2,53	3,55
$z_m = 0$			0,069	103	135	160	177	201	214	222	225	

Tableau des valeurs de $\frac{dz}{d\lambda}$. L'avant-dernière colonne où $\varepsilon = 1$ donne les valeurs de $\frac{dy}{d\lambda}$.

5. *Ellipsoïdes homothétiques.* — Si toutes les surfaces de niveau sont homothétiques, on a $\lambda = \lambda_r =$ const. On peut écrire

$$(22) \qquad \frac{\omega^2}{2\pi f} = \int_0^x -\rho'\left(\frac{3-\lambda^2}{\lambda^3}\operatorname{arc\,tang} l - \frac{l}{\lambda^3}\,\frac{1+\lambda^2}{1+l^2} - \frac{2l}{\lambda^3}\right)da$$

$$+ \rho\left(\frac{3+\lambda^2}{\lambda^3}\operatorname{arc\,tang}\lambda - \frac{3}{\lambda^2}\right),$$

au centre :

$$\frac{\omega_0^2}{2\pi f} = \rho_0\left(\frac{3+\lambda^2}{\lambda^3}\operatorname{arc\,tang}\lambda - \frac{3}{\lambda^2}\right) = \rho_0\, y.$$

On a pour ω_0 l'expression connue qui relie ω et λ dans le cas d'un

ellipsoïde homogène. On sait qu'alors si λ varie de o à ∞ la valeur $\frac{\omega^2}{2\pi f \rho_0} = y$ croît de o à 0,22467... maximum ($\lambda = 2,5293$), pour décroître ensuite jusqu'à o.

Pour $\frac{\omega^2}{2\pi f \rho} > 0,22467...$ l'équilibre est impossible avec une figure ellipsoïdale. Pour $\frac{\omega^2}{2\pi f \rho} < 0,22467...$ on a deux valeurs de λ et deux ellipsoïdes d'équilibre.

On a vu que, dans ce cas, la vitesse de rotation diminue du centre à la surface. Si donc la vitesse centrale a une limite maximum, toutes les autres, la vitesse de la surface en particulier, passeront aussi par une limite, inférieure à celle de ω_0 et variable suivant les conditions.

La formule (22) peut s'écrire :

$$(23) \qquad \frac{\omega^2}{2\pi f} = \rho y + \int_0^r -\rho' z \, da.$$

On en tire immédiatement

$$(24) \qquad \frac{1}{2\pi f}\frac{d\omega^2}{d\lambda} = \rho \frac{dy}{d\lambda} + \int_0^r -\rho' \frac{dz}{d\lambda} da.$$

Sous le signe d'intégration, z prendra toutes les valeurs de o à y, puisque ε varie de o à 1. Il en sera de même de dz.

Quand λ varie de o à 2,53, dy et tous les dz sont positifs (*fig.* 3). Toutes les vitesses sont croissantes.

Quand λ dépasse la valeur 2,53, dy devient négatif avec une valeur absolue de plus en plus grande. D'autre part, un nombre de plus en plus considérable de dz deviennent également négatifs. Il arrive nécessairement un moment où, pour une certaine valeur λ_m de λ, le second membre de (24) devient nul, puis négatif. La vitesse de rotation ω de la couche correspondante S_r passe par un maximum puis décroît.

A partir du centre l'importance du second terme de (24) croît avec r, et celle du premier, au contraire, diminue avec ρ. La valeur négative de celui ci l'emportera donc d'autant plus tard que la couche sera plus éloignée du centre et ω_1 passera par son maximum la dernière, pour une certaine valeur λ_1.

On aura en résumé

$$2,53 < \lambda_m < \lambda_1.$$

Cette valeur extrême λ_1 et la rapidité avec laquelle les différentes couches atteignent leur maximum dépend de la répartition des *densités*.

Or cette répartition peut se ramener à trois types principaux, selon qu'on a $\rho'' = 0$; $\rho'' < 0$ ou $\rho'' > 0$, c'est-à-dire variation constante, plus rapide vers la surface ou plus rapide au centre : courbes 1, 2, 3 (*fig.* 4).

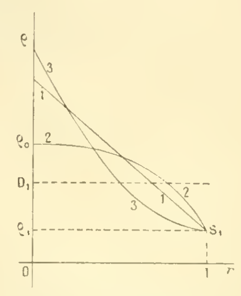


Fig. 4. — Lois des densités.
1. $\rho'' = 0$. — 2. $\rho'' < 0$. — 3. $\rho'' > 0$.

On voit immédiatement sur la formule (23) que, pour une même valeur de λ, ω^2 s'éloignera d'autant plus de ω_0^2 que ρy sera plus différent de $\rho_0 y$ et que $\int_0^r - \rho' da = \rho_0 - \rho$ sera plus grand, en somme, d'autant plus que la condensation vers le centre sera plus prononcée. Il en sera de même d'après (24) pour le maximum de ω^2.

En résumé, les valeurs et les maximums des ω, confondus, dans le cas de l'homogénéité, avec ω_0, seront d'autant plus faibles et auront lieu pour des valeurs de λ d'autant plus grandes que l'ensemble s'éloignera davantage de l'homogénéité, ou ρ_0 différent de ρ_1.

Les courbes de variation des vitesses en profondeur, pour une même valeur de λ, seraient analogues à celles des densités correspondantes.

Les courbes représentatives de la variation des vitesses avec λ seront

analogues à celles des z, celle de ω_0 analogue à celle de y (*fig.* 5). Si l'on tire une ligne horizontale, on voit qu'à toute valeur ω_1 plus petite que le maximum correspondent deux valeurs distinctes de λ mais qui

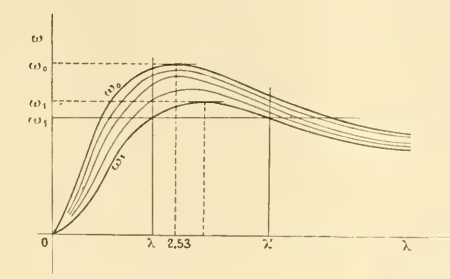


Fig. 5. — Courbes des vitesses de rotation dans le cas des surfaces homothétiques.

exigent une autre valeur de ω_0 et un autre mode de répartition des vitesses. Pour une valeur de ω_1 supérieure au maximum, les surfaces ne pourraient plus être ellipsoïdales.

Quelques calculs numériques montrent, d'après le Tableau des dz, que si $\rho'' = 0$ le maximum de ω_1 a lieu au plus tard pour $\lambda_1 = 3,55$, quand la moyenne des accroissements positifs et négatifs est nulle.

Pour que le maximum ait lieu pour $\lambda_1 = 3$, il suffirait que la densité soit encore $\rho = \frac{3}{4}\rho_0$ à la distance 0,7 du centre, celle qui correspond à $dz = 0$. Alors $\rho'' < 0$.

Pour que ce maximum soit repoussé à $\lambda_1 = 4$ il faudrait que la densité à la distance 0,5 soit déjà réduite à $\rho = \frac{1}{3}\rho_0$. Ces trois valeurs de λ_1 sont calculées avec $\rho_1 = 0$; en réalité, le champ de variation serait encore réduit. Pratiquement, il ne peut pas être considérable.

Dans le cas de la Terre avec $\rho'' = 0$; $\rho_1 = 2,5$ et $\rho_0 = 10$, on aurait au maximum $\frac{\omega_0^2}{2\pi f} = 0,220\,\rho_0$; $\frac{\omega_1^2}{2\pi f} = 0,163\,\rho_0$; dans le cas d'homogénéité : $D_1 y = 0,125\,\rho_0$.

6. *Ellipsoïdes homofocaux.* — Si les surfaces de niveau sont homofocales, on a $b^2 - a^2 = b_1^2 - a_1^2$, avec $b^2 = a^2(1 + \lambda^2)$. On en

tire : $\lambda a = \lambda_1 a_1$. On a alors $l = \frac{a}{r}\lambda = \lambda_r$, car $\lambda a = r\lambda_r$ et la formule (18) devient

$$(25)\quad \frac{\omega^2}{2\pi f} = \left(\frac{3+\lambda_r^2}{1+\lambda_r^2}\operatorname{arc\,tang}\lambda_r - \frac{3\lambda_r}{1+\lambda_r^2}\right)\int_0^r -\rho'\,\frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}\,da$$
$$+\int_r^1(\rho_1-\rho'\,da)\left(\frac{3+\lambda_r^2}{1+\lambda_r^2}\operatorname{arc\,tang}\lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2} - \frac{2\lambda}{1+\lambda_r^2}\right)\frac{1+\lambda^2}{\lambda^3};$$

$$(25')\qquad a\lambda = r\lambda_r \qquad \text{et} \qquad V = \frac{4}{3}\pi a^3(1+\lambda^2)$$

donnent

$$\frac{1+\lambda^2}{\lambda^3} = \frac{V}{V_r}\,\frac{1+\lambda_r^2}{\lambda_r^3},$$

d'où

$$(26)\quad \frac{\omega^2}{2\pi f} = \left(\frac{3+\lambda_r^2}{\lambda_r^3}\operatorname{arc\,tang}\lambda_r - \frac{3}{\lambda_r^2}\right)\int_0^r -\rho'\,\frac{V}{V_r}\,da$$
$$+\int_r^1(\rho_1-\rho'\,da)\frac{V}{V_r}\left(\frac{3+\lambda_r^2}{\lambda_r^3}\operatorname{arc\,tang}\lambda - \frac{\lambda}{\lambda_r^3}\,\frac{1+\lambda_r^2}{1+\lambda^2} - \frac{2\lambda}{\lambda_r^3}\right).$$

On a vu que la vitesse croît de la surface au centre : $\omega_1 < \omega < \omega_0$. *A la surface*, on aura, avec

$$\int_0^1(\rho_1-\rho'\,da)\frac{V}{V_1} = \frac{M_1}{V_1} = D_1,$$

$$(27)\qquad \frac{\omega_1^2}{2\pi f} = \left(\frac{3+\lambda_1^2}{\lambda_1^3}\operatorname{arc\,tang}\lambda_1 - \frac{3}{\lambda_1^2}\right)D_1 = D_1 y.$$

Ainsi la rotation et l'aplatissement sont liés par la même expression que dans un ellipsoïde homogène de densité D_1, expression analogue à celle de ω_0 dans les ellipsoïdes homothétiques, mais ici ω_1 est indépendant de la loi de variation des densités.

Au centre $\lambda_r = \infty$ et la formule (25) donne

$$(28)\qquad \frac{\omega_0^2}{2\pi f} = \int_0^1(\rho_1-\rho'\,da)\left(\operatorname{arc\,tang}\lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right)\frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}.$$

En tenant compte de (25'), on a

$$(28')\qquad \frac{\omega_0^2}{2\pi f} = \frac{1+\lambda_1^2}{V_1\lambda_1^3}\int_0^1 V\left(\operatorname{arc\,tang}\lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right)(\rho_1-\rho'\,da).$$

Pour $\lambda_1 = 0$, on a

$$\lambda = \frac{a_1}{a}\lambda_1 = 0$$

et

$$\text{arc tang}\lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2} = \frac{2}{3}\lambda^3 - \frac{4}{5}\lambda^5 - \ldots.$$

La formule (28) donne

$$\omega_0^2 = \frac{4}{3}\pi f \rho_0.$$

Pour $\lambda_1 = \infty$. $\omega_0 = 0$, d'après (28').

Posons

$$v = \frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}\left(\text{arc tang}\lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right).$$

On a

$$\frac{dv}{d\lambda} = -\frac{1}{\lambda}\left(\frac{3+\lambda^2}{\lambda^3}\text{arc tang}\lambda - \frac{3}{\lambda^2}\right) = -\frac{v}{\lambda}.$$

v varie en sens inverse de λ et par conséquent de λ_1. Ainsi ω_0 est toujours décroissant et varie de $\frac{4}{3}\pi f \rho_0$ à o quand λ_1 croît de o à ∞.

Pour étudier la variation de ω_0 avec la *densité* posons encore

$$u = \text{arc tang}\lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}, \qquad \frac{du}{d\lambda} = \frac{2\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2}.$$

L'élément d'intégration de (28') croît avec la valeur de λ de la surface au centre où $u_0 = \frac{\pi}{2}$, car $\lambda_0 = \infty$. Donc ω_0 croît d'autant plus que ρ' est plus grand vers le centre, c'est-à-dire que la concentration est plus considérable. A la limite, on aurait

$$\frac{\omega_0^2}{2\pi f} = \frac{1+\lambda_1^2}{V_1\lambda_1^3}\frac{\pi}{2}M_1 = \frac{\pi}{2}\,\frac{1+\lambda_1^2}{\lambda_1^3}D_1.$$

On a donc deux limites, l'une en fonction de la densité centrale, l'autre en fonction de l'aplatissement superficiel, qui se complètent sans s'exclure :

(29) $$\omega_0^2 < \frac{4}{3}\pi f \rho_0, \qquad \omega_0^2 < \pi^2 f\,\frac{1+\lambda_1^2}{\lambda_1^3}D_1.$$

Toutes les autres vitesses et courbes représentatives seront comprises entre celles des formules (27) et (29).

Comme on a

$$\int_0^r -\rho' V\,da = -\rho V_r + \int_0^r \rho\,dV = (D-\rho)V_r,$$

la formule (26) peut s'écrire

$$(30)\qquad \frac{\omega^2}{2\pi f} = (D-\rho)y + \int_r^1 \frac{V}{V_r}z(\rho_1 - \rho'\,da),$$

où

$$z = \frac{3+\lambda_r^2}{\lambda_r^3}\operatorname{arc\,tang}\lambda - \frac{\lambda}{\lambda_r^3}\,\frac{1+\lambda_r^2}{1+\lambda^2} - \frac{2\lambda}{\lambda_r^3}$$

est une fonction z déjà étudiée, l étant remplacé par λ, et λ par λ_r. On a

$$\lambda = \frac{r}{a}\lambda_1 = \lambda_r \varepsilon = l.$$

De r à l limites d'intégration, ε varie de 1 à $\frac{r}{a_1} < 1$ et non de 1 à 0. Une fraction seulement des z figure sous chaque signe d'intégration, ceux dont l'ε est supérieur à celui de la couche S_r. La variation est la même, les conclusions analogues à celles du cas précédent.

Ainsi, quand λ_1 croît, les vitesses des couches intérieures passent successivement par leur maximum, du centre à la surface où ω_1 sera décroissante la dernière, comme pour les surfaces homothétiques.

En effet, on a vu que les maximums de z ont lieu pour des valeurs de plus en plus grandes de λ_r. Mais ici les λ croissent de la surface au centre $\lambda_r = \frac{\lambda_1}{r}$. Ils atteignent, dans le même ordre, la valeur λ_m correspondant au maximum de chaque surface. Il en sera de même des ω.

Voici d'abord le Tableau des valeurs respectives des λ_m et des λ_r pour $\lambda_1 = 2,53\ldots$, maximum de ω_1 :

ε.........	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	.
λ_r.........	2,53	2,8	3,2	3,6	4,2	5,0	6,3	8,4	12,6	.
λ_m.......	2,53	2,6	2,7	2,9	3,3	3,8	4,7	6,3	9,5	.
$\lambda_r - \lambda_m$...	0	0,2	0,5	0,7	0,9	1,2	1,6	2,1	3,1	.

Quand ω_1 atteint son maximum les z de toutes les surfaces et par conséquent tous les autres ω ont déjà dépassé leur maximum puisque $\lambda_r > \lambda_m$, pour tous les z (*fig.* 6).

D'ailleurs λ_r croît toujours plus vite que λ_m. En effet, dans l'étude des fonctions z on a vu, formule (21), que $\frac{dz}{dl} > 0$, z et l varient dans le même sens. Or on a ici au maximum $l = \lambda_m \varepsilon$. Cette quantité $\lambda_m \varepsilon$ varie donc dans le même sens que z_m et décroît avec ε. Au contraire, dans les surfaces homofocales, $\lambda_r \varepsilon = \lambda_1$. Ainsi $\lambda_r \varepsilon$ reste constant et λ_r croît plus vite que λ_m.

Si donc, à un certain moment, pour un certain $\lambda_1 < 2{,}53$, le λ_r de

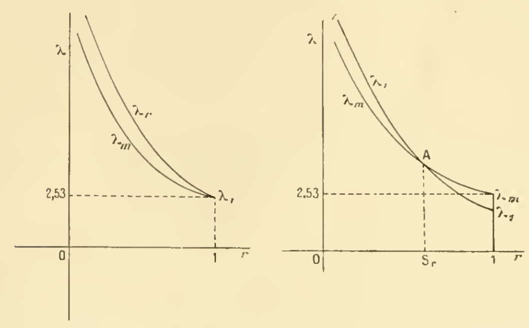


Fig. 6 et 6'. — Courbes comparées des λ et des λ_m dans le cas des surfaces homofocales.

la surface S_r égale le λ_m du z correspondant, tous les λ et les z intérieurs à S_r auront dépassé leur maximum. Tous les λ et les z supérieurs ne l'auront pas dépassé (*fig.* 6'). Or de (30) on tire

$$(31) \qquad \frac{1}{2\pi f}\frac{d\omega^2}{d\lambda} = (D-\rho)\frac{dy}{d\lambda} + \int_r^1 \frac{V}{V_r}\frac{dz}{d\lambda}(\rho_1 - \rho'\, da).$$

$d\omega^2$ ne dépend que des dz supérieurs, tous positifs ici, ainsi que dy. On a donc $d\omega^2 > 0$ et ω^2 est encore croissant, ainsi que tous les ω supérieurs [1]. Faisons décroître λ_1 de 2,53 à 0, les λ passeront successivement, de la surface au centre, par le λ_m du z correspondant. Le maximum de ω reculera dans le même sens.

---

[1] M. Hamy avait déjà donné cette démonstration sous une forme plus compliquée. *Étude sur la figure des corps célestes*, p. 14-20.

En résumé, si λ_1 croît, les couches voisines du centre passeront par leur maximum dès que λ_1 sera différent de o, puisque leur λ_0 est infini, et ainsi successivement des autres jusqu'à la surface. On pourra répéter ici tout ce qui a été dit à propos des surfaces homothétiques sur les

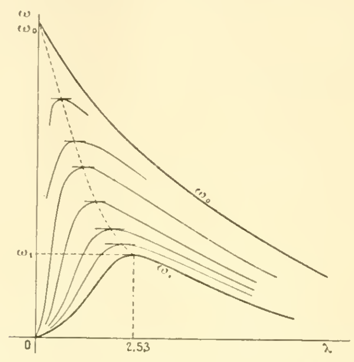


Fig. 7. — Courbes des vitesses de rotation dans le cas des surfaces homofocales.

modifications introduites par la variation des densités. Mais ici ω_1 ne dépend que de D_1 et non des ρ. On aura les courbes ci-dessus (*fig.* 7).

7. *Vitesse uniforme et classification des vitesses.* — Nous utiliserons les résultats précédents. La formule (18) devient à la surface :

$$(30)\quad \frac{\omega_1^2}{2\pi f} = \int_0^1 (\rho_1 - \rho'\,da)\,\frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}\left(\frac{3+\lambda_1^2}{1+\lambda_1^2}\operatorname{arc\,tang} l - \frac{l}{1+l^2} - \frac{2l}{1+\lambda_1^2}\right).$$

Si $\lambda_1 = 0$, on a

$$l = \lambda - \lambda_1 = 0,$$

car ici $\lambda \leq \lambda_1$ et alors on a

$$\omega_1 = 0.$$

Si $\lambda_1 = \infty$ tous les λ sont infinis car la figure se réduit à un disque aplati et l'on a encore $\omega_1 = 0$, d'après (30).

La vitesse est donc nulle pour $\lambda_1 = \infty$ comme pour $\lambda_1 = 0$. Elle

aura un maximum dans l'intervalle, comme dans le cas d'un fluide homogène.

La formule (30) peut s'écrire

$$\frac{\omega_1^2}{2\pi f} = \int_0^1 (\rho_1 - \rho' da) \frac{1+\lambda^2}{1+\lambda_1^2} \frac{\lambda_1^3}{\lambda^3} z = \int_0^1 (\rho_1 - \rho' da) \frac{1+\lambda^2}{1+\lambda_1^2} \frac{a^3}{r_1^3} \frac{\lambda_1^3}{l^3} z.$$

Or le facteur $\frac{1+\lambda^2}{1+\lambda_1^2} \frac{a^3}{r_1^3} = \frac{V}{V_1}$ reste constant pour chaque surface quand λ varie. Si λ_1 reste le même, la valeur de l'élément d'intégration varie seulement avec $\frac{z}{l^3}$ quand les λ intérieurs varient, c'est-à-dire quand on passe de l'un des cas étudiés à l'autre. On a

$$\frac{d}{dl} \frac{z}{l^3} = \frac{1}{l^4} \left[\frac{2 l^3 (\lambda_1^2 - l^2)}{\lambda_1^3 (1+l^2)^2} - 3z \right].$$

En désignant la parenthèse par u, on a pour $l = 0$, $z = 0$, $u = 0$ et pour $l = \lambda_1$, $u = -3y$. On obtient ensuite

$$\frac{du}{dl} = -\frac{4 l^4}{\lambda_1^3 (1+l^2)^2} - \frac{8 l^4 (\lambda_1^2 - l^2)}{\lambda_1^3 (1+l^2)^3},$$

quantité négative avec $l < \lambda_1$, donc u reste négative et les éléments d'intégration varient avec z en raison inverse de l ou de $\lambda, (l = \lambda\varepsilon)$.

Ainsi donc pour le même λ_1 la vitesse superficielle croît quand on passe des couches homofocales aux couches homothétiques, puis à celles du cas de la vitesse uniforme, car alors le λ de chaque couche décroît. On a donc

$$(31) \qquad \omega_1 \text{ homofocal} < \omega_1 \text{ homothétique} < \omega_1 \text{ uniforme}.$$

Les courbes des ω_1 s'étageront dans le même ordre.

La formule (18) devient au centre

$$\frac{\omega_0^2}{2\pi f} = \int_0^1 (\rho_1 - \rho' da) \frac{1+\lambda^2}{\lambda^3} \left(\frac{3+\lambda_0^2}{1+\lambda_0^2} \operatorname{arc\,tang} \lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2} - \frac{2\lambda}{1+\lambda_0^2} \right)$$
$$= \int_0^1 (\rho_1 - \rho' da) Z_0.$$

$$(32) \qquad \frac{dZ_0}{d\lambda} = -\frac{3+\lambda_0^2}{1+\lambda_0^2} \frac{1}{\lambda} \left(\frac{3+\lambda^2}{\lambda^3} \operatorname{arc\,tang} \lambda - \frac{3}{\lambda^2} \right) = -\frac{3+\lambda_0^2}{1+\lambda_0^2} \frac{y}{\lambda}.$$

Pour le même λ_0 la valeur de chaque élément d'intégration varie donc en sens inverse de λ. Or, dans ce cas, λ_0 étant le même, les λ augmentent de la vitesse uniforme aux couches homothétiques et aux surfaces homofocales. On aura

(33) $$\omega_0 \text{ uniforme} < \omega_0 \text{ homothétique} < \omega_0 \text{ homofocal.}$$

Or on a pour les surfaces homothétiques : $\omega_0^2 = 2\pi f \rho_0 y$. Donc dans le cas d'une vitesse uniforme, si λ_0 varie de o à ∞, la valeur de la vitesse restera toujours inférieure à celle-ci.

La courbe de ω uniforme correspondant à λ_0 sera tout entière

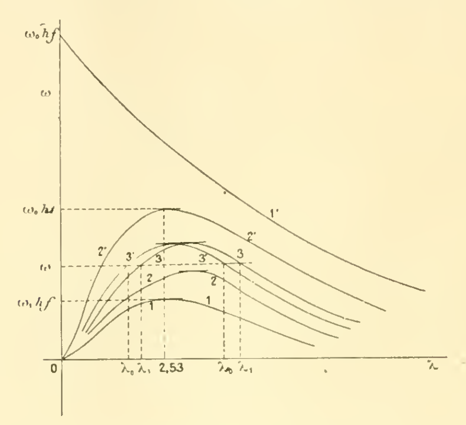


Fig. 8. — Tableau d'ensemble des courbes de vitesses.
1 et 1'. ω_1 et ω_0 des surfaces homofocales. — 2 et 2'. ω_1 et ω_0 des surfaces homothétiques.
3 et 3'. Courbes de vitesse constante en fonction de λ_1 et de λ_0.

inférieure à celle de ω_0 homothétique. D'autre part, la courbe correspondant aux variations de λ_1 sera tout entière au-dessus de ω_1 homothétique d'après (31). Ces deux courbes seront comprises entre celles des ω_1 et ω_0 homothétiques.

Cela est évident jusqu'au maximum, car alors la courbe correspondant aux λ_1 est à droite et au-dessus de celle des λ_0 puisqu'on a $\lambda_0 < \lambda_1$. Il en sera de même au delà du maximum, au moins jusqu'à une certaine limite. Il n'est pas démontré qu'il en sera toujours ainsi.

La figure 8 traduit ces résultats en donnant la position relative des différentes courbes.

La courbe de ω_1 homofocal seule ne dépend pas de la répartition des densités, mais seulement de D_1. Les autres courbes s'élèveront d'autant plus au-dessus de celle-là que l'ensemble s'éloigne davantage de l'homogénéité.

Pour toute valeur de ω plus petite que le maximum, on aura deux valeurs de l'aplatissement, comme dans le cas de l'homogénéité, mais la vitesse correspondante sera toujours plus grande.

On voit aussi (*fig.* 8) que la vitesse uniforme correspond toujours pour un aplatissement donné λ_1 à celle d'une couche homothétique ou homofocale dont l'ensemble aurait le même λ_1. On peut donc passer de ces deux cas à celui d'une vitesse uniforme simplement en augmentant la vitesse des couches supérieures à celle-ci et diminuant celle des couches inférieures, sans que l'aplatissement λ_1 varie.

En résumé, la vitesse uniforme ω d'un ellipsoïde hétérogène tournant tout d'une pièce, étant comprise entre ω_0 homothétique et ω_1 homofocal, on pourra écrire

$$(34)\qquad D_1 y < \frac{\omega^2}{2\pi f} < \rho_0 y \qquad \text{avec} \qquad y = \frac{3+\lambda_1^2}{\lambda_1^3}\,\text{arc tang}\,\lambda_1 - \frac{3}{\lambda_1^2}.$$

8. *Quelques cas limites.* — Nous allons en étudier trois en dehors des trois principaux.

1° Si l'aplatissement à partir de la surface croît plus vite que dans le cas des surfaces homofocales, on aura $\omega_1 < \omega_1$ homofocal par le même raisonnement qui a conduit à (31), et cette vitesse tendra vers 0 quand tous les λ tendront vers ∞.

On a vu aussi que λ_0 restant constant, ω_0 varie en raison inverse de λ. On aura donc également ici $\omega_0 < \omega_0$ homofocal et cette vitesse tendra également vers 0.

Donc si les λ intérieurs tendent vers ∞, tous les ω tendent vers 0.

2° Si, au contraire, à l'intérieur les λ décroissent plus vite que dans le cas de la vitesse uniforme, ω_1 augmente d'après la démonstration générale de (31) et devient plus grand que ω_1 uniforme, pour la même valeur de λ_1.

D'après la formule de la dérivée de la vitesse (18′), on a ici

$$\frac{d\omega^2}{dr} > 0,$$

car la variation de l'aplatissement est plus rapide que dans le cas de ω constant, et $\frac{d\lambda^2}{dr}$ est plus grand que dans le cas de $d\omega^2 = 0$. La vitesse diminue donc à partir de la surface.

A la limite, on aurait à l'intérieur des couches sphériques avec un aplatissement superficiel λ_1. Or, dans la formule (18), l'élément d'intégration

$$Z = \frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}\left(\frac{3+\lambda_r^2}{1+\lambda_r^2}\operatorname{arc\,tang} l - \frac{l}{1+l^2} - \frac{2l}{1+\lambda_r^2}\right)$$

se réduit, quand les λ tendent vers 0, à

$$Z = \frac{2}{3}\,\frac{1+\lambda^2}{1+\lambda_r^2}\,\frac{a^3}{r^3}\left(\lambda_r^2 - \frac{6}{5}\,\frac{a^2}{r^2}\lambda^2 - \ldots\right) = \frac{2}{3}\,\frac{V}{V_r}\lambda_r^2 - \ldots.$$

Ils s'annulent tous avec λ_r. Les vitesses de rotation tendent donc vers 0 avec les λ.

On aurait alors à la surface

$$\frac{\omega_1^2}{2\pi f} = \rho_1 y_1 + \frac{2}{3}\int_0^1 -\rho'\,\frac{V}{V_1}\lambda_1^2\,da = \rho_1 y_1 + \frac{2}{3}\lambda_1^2(D_1 - \rho_1).$$

Mais ω_1 ne croîtrait pas sans limite avec λ_1, car il passe par un maximum et s'annule, quand λ_1 tend vers ∞, comme on l'a vu à propos de la formule (30). D'ailleurs la limite ne peut pas être atteinte, car on a vu (n° **1**) qu'une couche ne peut être sphérique que si toutes le sont, et si la vitesse est nulle partout.

3° Dans le cas où l'on aurait une vitesse uniforme avec λ croissant de la surface au centre (*voir* n° **2**), pour le même λ_1, on aurait $\omega_1 < \omega_1$ homothétique, puisque le λ de chaque couche est plus grand que celui de la couche homothétique correspondante [formule (31)]. Quand λ_1 variera de 0 à ∞, on aura une courbe intérieure à celle de ω_1 homothétique.

Pour le même λ_0 on aura $\omega_0 > \omega_0$ homothétique [formule (32)]. La courbe correspondante sera donc au-dessus de celle des ω_0 homothé-

tiques. Comme on a dans ce cas $\lambda_0 > \lambda_1$, on voit d'après la figure 8 qu'on ne peut avoir $\omega_0 = \omega_1$ que si λ_1 a déjà dépassé son maximum. On sait, d'ailleurs, d'après la démonstration du Chapitre premier, que l'on ne peut pas avoir λ décroissant avec ω constant.

En résumé, la vitesse de rotation, dans le cas d'un ellipsoïde hétérogène tournant tout d'une pièce, reste toujours comprise, quand λ varie de o à ∞, entre la vitesse de deux ellipsoïdes homogènes, qui auraient pour densité et aplatissement, l'un la densité moyenne et l'aplatissement superficiel, l'autre la densité et l'aplatissement central de cet ellipsoïde hétérogène. Elle est nulle pour $\lambda = 0$ et pour $\lambda = \infty$ et maximum un peu après $\lambda = 2,53\ldots$.

Jusqu'au delà du maximum, et probablement toujours, on peut dire encore que *la vitesse de rotation reste comprise entre celle de deux ellipsoïdes homogènes ayant même aplatissement et comme densité, l'un la densité moyenne et l'autre la densité centrale de celui-ci*, ou encore qu'elle reste comprise entre la vitesse qu'il aurait s'il était homogène et sa vitesse centrale si ses surfaces de niveau étaient homothétiques.

$$D_1 y < \frac{\omega^2}{2\pi f} < \rho_0 y, \qquad y = \frac{3+\lambda^2}{\lambda^3} \operatorname{arctg} \lambda - \frac{3}{\lambda^2}.$$

Dans le cas de l'ellipsoïde homogène on a $\omega^2 = 2\pi f D y$.

De la surface au centre, dans les autres cas, la vitesse varie plus ou moins vite dans les mêmes proportions que λ et ρ.

Dans tous les cas de variation quelconque de ω, ρ, λ, *à l'intérieur, la vitesse des surfaces de niveau suit le même cycle que pour un ellipsoïde homogène :* nulle pour $\lambda = 0$ et $\lambda = \infty$, elle a un maximum qu'elle atteint plus ou moins après $\lambda = 2,53\ldots$.

Pour le même aplatissement, la vitesse est d'autant plus élevée que la répartition des densités s'éloigne davantage de l'homogénéité.

CHAPITRE III.

PROBLÈME DE CLAIRAUT.

VITESSE UNIFORME, APLATISSEMENT FAIBLE DONT LE CARRÉ EST NÉGLIGEABLE.

Le problème de Clairaut consiste à étudier les conditions d'équilibre d'une masse fluide hétérogène en rotation, en supposant la vitesse constante et l'aplatissement assez faible pour qu'on puisse négliger son carré. Les nouvelles formules en ρ' permettent souvent de simplifier et de compléter les anciennes démonstrations, dont quelques-unes ont été reprises rapidement dans ce Chapitre, en vue de les généraliser ou de les adapter aux calculs numériques ultérieurs.

1. *Équation générale de Clairaut. Les fonctions η et ζ. Limite de λ^2 et de e.* — La formule (18) développée s'écrira en négligeant l^4

$$(35)\qquad \frac{\omega^2}{2\pi f} = \frac{2}{3}\int_0^r -\rho' \frac{l^3}{\lambda^3}\left(\lambda_r^2 - \frac{3}{5}l^2\right)da + \frac{2}{3}\int_r^1 (\rho_1 - \rho'\,da)\left(\lambda_r^2 - \frac{3}{5}\lambda^2\right).$$

Or, en négligeant λ^4, on a (¹), r étant la valeur de a sur S_r

$$l^2 = \lambda^2 \frac{a^2}{a^2+\mu} = \frac{a^2}{r^2}\lambda^2,$$

d'où

$$(36)\qquad \frac{3\omega^2}{4\pi f} = \int_0^r -\rho' \frac{a^3}{r^3}\left(\lambda_r^2 - \frac{3}{5}\frac{a^2}{r^2}\lambda^2\right)da + \int_r^1 (\rho_1 - \rho'\,da)\left(\lambda_r^2 - \frac{3}{5}\lambda^2\right).$$

En intégrant par parties, on obtient immédiatement

$$(37)\qquad \frac{3\omega^2}{4\pi f} = \frac{\lambda^2}{r^3}\int_0^r \rho\,da^3 - \frac{3}{5}\frac{1}{r^5}\int_0^r \rho\,da^5\lambda^2 - \frac{3}{5}\int_r^1 \rho\,d\lambda^2;$$

(¹) En négligeant λ^4, l et par conséquent ω est indépendant de x et constant sur chaque surface de niveau (*voir* Chap. II, n° 3, formule a). L'équilibre est donc possible avec des surfaces ellipsoïdales, dans l'hypothèse de Clairaut.

posons

$$\frac{1}{r^3}\int_0^r \rho\, da^3 = D \qquad \text{et} \qquad \frac{3\omega^2}{4\pi f D_1} = \varphi,$$

il vient

(38) $$\frac{5}{3}(\lambda^2 D - \varphi D_1) = \frac{1}{r^5}\int_0^r \rho\, da^5 \lambda^2 + \int_r^1 \rho\, d\lambda^2.$$

Ces formules (36), (37), (38) sont trois formes équivalentes de l'équation de Clairaut, reliant les éléments ω, λ, ρ, r de la surface S_r, éléments qui peuvent être tous variables.

Remarque — On a

(39) $$\frac{1}{r^3}\int_0^r -\rho' a^3\, da = -\rho + \frac{1}{r^3}\int_0^r \rho\, da^3 = D - \rho \qquad \rho < D:$$

en dérivant, on obtient successivement

(40) $$3\rho = 3D + rD',$$

(41) $$3\rho' = 4D' + rD''.$$

Nous poserons

(42) $$\zeta = -\frac{rD'}{D} = 3\left(1 - \frac{\rho}{D}\right),$$

ζ sera analogue à la fonction η de M. Radau et d'une grande utilité pratique, comme on le verra dans la suite.

Or, au centre, $D = \rho = \rho_0$, d'où $\zeta = 0$.

A la surface, si $\rho_1 = 0$ et en dehors de la masse, on a $\zeta = 3$.

On aura donc toujours avec $0 < \rho < D$

(43) $$0 < \zeta < 3.$$

La formule (36) devient à la surface avec $r = 1$

(44) $$\frac{3\omega^2}{4\pi f} = \int_0^1 -\rho' a^3\left(\lambda_1^2 - \frac{3}{5}a^2\lambda^2\right) da + \frac{2}{5}\rho_1\lambda_1^2.$$

Or on a, du centre à la surface, $0 < a^2\lambda^2 < \lambda_1^2$. Tenant compte de (39), on en déduit

(45) $$\frac{2}{5}\lambda_1^2 \leqq \varphi \leqq \lambda_1^2\left(1 - \frac{3}{5}\frac{\rho_1}{D_1}\right), \qquad \frac{2}{5} \leqq \frac{\varphi}{\lambda_1^2} \leqq 1 - \frac{3}{5}\frac{\rho_1}{D_1}.$$

Si $\rho_1 = 0$ en posant $\lambda_1^2 = 2e$, on a

$$\frac{\varphi}{2} \leqq e \leqq \frac{5}{4}\varphi \qquad \text{ou} \qquad \frac{4}{5} \leqq \frac{\varphi}{e} \leqq 2. \tag{46}$$

On aura $e = \frac{\varphi}{2}$ si $a^2\lambda^2 = 0$ dans (44), c'est-à-dire : 1° si toute la matière était condensée au centre, ou 2° si toutes les surfaces de niveau intérieures étaient sphériques.

On aura $e = \frac{5}{4}\varphi$: 1° si $a^2\lambda^2 = \lambda_1^2$ à l'intérieur comme à la surface, cas des surfaces homofocales, ou bien 2° si l'intégrale se réduit à l'élément de surface correspondant à ρ_1, c'est-à-dire si $\rho' = 0$, ellipsoïde homogène.

Dans le cas d'une masse fluide en rotation uniforme, les limites seraient atteintes seulement dans le cas d'homogénéité ou de condensation totale au centre. L'aplatissement superficiel ne dépend alors que du degré de concentration. Il se rapproche de $\frac{\varphi}{2}$ ou de $\frac{5}{4}\varphi$ selon les cas.

Si $\rho'' < 0$, ρ tend vers une limite au centre, ρ' prend des valeurs plus fortes vers la surface (voir *fig.* 4). Ce sont les éléments d'intégration qui donnent un aplatissement voisin de $\frac{5}{4}\varphi$ qui dominent dans (44). C'est le cas de la Terre où $\frac{\varphi}{e} = \frac{297}{288} = 1,03$ environ. Pour Jupiter, au contraire, $\frac{\varphi}{e} = 1,456$, et pour Saturne 1,434; ces valeurs sont plus voisines de 2 que de $\frac{4}{5}$. Il doit y avoir une condensation prononcée, comme l'indique d'ailleurs la faible densité moyenne.

Ce rapport $\frac{\varphi}{e}$ entre dans la définition de $\eta_1 = \frac{5}{2}\frac{\varphi}{e} - 2$. C'est pourquoi M. Callandreau a pu appeler η_1 : *le paramètre de condensation* [1]. Les quantités $-\frac{rD'}{D}$, $\frac{\rho}{D}$, en somme ζ, jouent plus directement le même rôle, mais elles sont moins nettement déterminées.

2. *Dérivée de la vitesse. Équation de Clairaut-Radau.* — En

(1) *Bul. ast.*, mai 1889.

prenant les dérivées dans la formule (36), on obtient immédiatement

$$(47)\qquad \frac{3}{4\pi f}\frac{d\omega^2}{dr} = \mathrm{D}\frac{d\lambda^2}{dr} - \frac{3}{r}\int_0^r -\rho'\frac{a^3}{r^3}\left(\lambda_r^2 - \frac{a^2}{r^2}\lambda^2\right)da.$$

Posons avec M. Radau

$$\eta = \frac{re'}{e} = \frac{r}{\lambda^2}\frac{d\lambda^2}{dr},$$

d'où

$$\frac{d\lambda^2}{dr} = \frac{\lambda^2\eta}{r},$$

multiplions (47) par r^6 et dérivons de nouveau par rapport à r, on aura successivement

$$r^5\mathrm{D}\lambda^2\eta - 3\int_0^r -\rho' a^3(r^2\lambda_r^2 - a^2\lambda^2)\,da = \frac{3}{4\pi f}r^6(\omega^2)',$$

$$(5r^4\mathrm{D} + r^5\mathrm{D}')\lambda^2\eta + r^4\mathrm{D}\lambda^2(\eta^2 + r\eta') - 3(2r\lambda^2 + r\lambda^2\eta)(\mathrm{D}-\rho)r^3 = \frac{3}{2\pi f}(r^6\omega\omega')',$$

$$(48)\quad r\eta' + \eta^2 + 5\eta - 2\zeta(\eta + 1) = \frac{3}{2\pi f}\frac{(r^6\omega\omega')'}{r^4\mathrm{D}\lambda^2} = \frac{3}{4\pi f}\frac{r^2(\omega^2)'' + 6r(\omega^2)'}{e\mathrm{D}}.$$

Cas particuliers : Dans le cas des surfaces *homothétiques*, $d\lambda^2 = 0$, la formule (37) donnera

$$\frac{3}{4\pi f}\omega^2 r^5 = \lambda^2\mathrm{D}r^5 - \frac{3}{5}\lambda^2\int_0^r \rho\,da^5,\qquad \frac{3}{4\pi f}(\omega^2 r^5)' = 2\lambda^2 r^4\mathrm{D}.$$

Dans le cas des surfaces *homofocales*, on aura dans (47) et (48)

$$\lambda_r^2 = \frac{a^2}{r^2}\lambda^2 \qquad \text{et} \qquad \lambda^2 = \frac{\lambda_1^2}{r^2},$$

d'où

$$\frac{d\lambda^2}{dr} = 2\frac{\lambda^2}{r} \qquad \text{et} \qquad \eta = -2;$$

$$\frac{d\omega^2}{dr} = -\frac{8}{3}\pi f\lambda_1^2\frac{\mathrm{D}}{r_3},\qquad (r^6\omega\omega')' = \frac{4}{3}\pi f\lambda_1^2(\zeta - 3)\mathrm{D}r^2.$$

Mais ces formules des surfaces homofocales ne peuvent s'appliquer qu'au voisinage de la surface, car on a

$$r^2\lambda_r^2 = \lambda_1^2$$

et les λ croissent rapidement et au delà de toute limite au centre.

Cas principal : Problème de Clairaut. Dans le cas d'une *vitesse uniforme*, $d\omega^2 = 0$, (47) et (48) deviennent

$$(47') \qquad r\mathrm{D}\frac{d\lambda^2}{dr} = \mathrm{D}\lambda^2\eta = \frac{3}{r^3}\int_0^r -\rho'\left(\lambda_r^2 - \frac{a^2}{r^2}\lambda^2\right)a^3\,da,$$

$$(48') \qquad r\eta' + \eta(\eta + 5) - 2\zeta(\eta + 1) = 0.$$

Cette dernière est l'équation de Clairaut-Radau, équation différentielle du premier ordre qui définit l'hypothèse d'une vitesse uniforme.

Au centre $\lambda_r^2 = \frac{a^2}{r^2}\lambda^2$, d'où $\frac{d\lambda^2}{dr} = 2e'_0 = 0$ et $\eta_0 = 0$ d'après (42'), puis (48') peut alors s'écrire en divisant par r

$$\eta' + r\frac{e'^2}{e^2} + 5\frac{e'}{e} = -2\frac{\mathrm{D}'}{\mathrm{D}}\left(1 + r\frac{e'}{e}\right).$$

Or, au centre, on aura d'après (41)

$$2\mathrm{D}'_0 = \frac{3}{2}\rho'_0.$$

d'où

$$\eta'_0 = -\frac{3}{2}\frac{\rho'_0}{\rho_0} \qquad \text{et} \qquad \eta'_0 > 0;$$

η nul au centre commence donc par croître et devient positif. Il le restera toujours, car si dans la suite on avait $\eta = 0$, on aurait aussi

$$r\eta' = 2\zeta > 0$$

et η ne pourrait pas devenir négatif. On a donc $\eta > 0$.

(47') peut encore s'écrire d'après (39) et (42)

$$(47'') \qquad (\zeta - \eta)r^5\mathrm{D}\lambda^2 = 3\int_0^r -\rho' a^5\lambda^2\,da.$$

Le second membre est positif, on a donc immédiatement, puis d'après (43)

$$(49) \qquad \eta < \zeta \qquad \text{et} \qquad 0 < \eta < \zeta < 3 \quad (^1).$$

La fonction η est toujours plus petite que ζ et comprise entre 0 *et* 3.

De $\eta = \frac{re'}{e} > 0$ on déduit $e' > 0$, donc λ^2 et e sont toujours croissants du centre à la surface (Clairaut).

---

(1) M. Poincaré avait signalé $\eta < 3$ et M. Callandreau $\eta > 0$. On verra au numéro suivant l'importance de $\eta < \zeta$ pour limiter le champ de variation de η.

De $\eta < \zeta$ on déduit $\frac{e'}{e} < -\frac{D'}{D}$, d'où $\frac{(eD)'}{eD} < 0$ et eD est décroissant. De $\eta - 3 < 0$ on déduit $\frac{1}{r^3}(re' - 3e) < 0$, d'où $\left(\frac{e}{r^3}\right)' < 0$ et $\frac{e}{r^3}$ décroissant (Clairaut). Pour la Terre, on aura $\eta < 1$, d'où $\left(\frac{e}{r}\right)' < 0$ et $\frac{e}{r}$ décroissant.

Dans quels cas η peut-il atteindre ses limites?

Si $\eta = 0$ sur une surface quelconque S, il faut, d'après (47'), que depuis le centre jusqu'à cette surface, on ait : 1° ou bien $\lambda_r^2 = \frac{a^2}{r^2}\lambda^2$; on aurait alors des surfaces homofocales, ce qui est impossible puisque dans ce cas on a $\eta = -2$ comme on l'a vu; 2° ou bien $\rho' = 0$, c'est-à-dire une masse homogène. Réciproquement, s'il y a homogénéité, on a $\zeta = 0$ et $\eta = 0$, d'après (47'').

Si $\eta = \zeta$ sur une surface, d'après (47''), on a du centre à cette surface $\rho' = 0$, homogénéité ou $\lambda^2 = 0$, surfaces sphériques, ce qui exige que toutes les surfaces le soient (Chap. II, n° 1). La réciproque est vraie.

Si $\eta = 3$ on a $\zeta = 3$, c'est-à-dire $\rho = 0$. Toute la masse est réunie au centre. Réciproquement, s'il y a concentration totale, $\rho = 0$ et $\zeta = 3$, l'équation qui suit montre qu'on a aussi $\eta = 3$.

Intégrons par parties le second membre de (47'), on a

$$D\lambda^2(3-\eta) = \frac{3}{r^3}\int_0^r \rho\, da^5\lambda^2 \qquad \eta < 3.$$

En combinant avec (38) on aura ensuite

$$(50)\qquad D\lambda^2(\eta+2) - 5\rho D_1 = 3\int_r^1 \rho\, d\lambda^2 \quad \text{ou} \quad D(re'+2e) - \frac{5}{2}\rho D_1 = 3\int_r^1 \rho\, de.$$

A la surface on a

$$(51)\qquad \eta_1 = 5\frac{\varphi}{\lambda_1^2} - 2 = \frac{5}{2}\frac{\varphi}{e} - 2;$$

(50) dérivée sous la forme η donne immédiatement l'équation de Clairaut-Radau. La seconde forme donne l'équation primitive de Clairaut, équation différentielle du second ordre :

$$r^2e'' + 2re'(3-\zeta) = 2\zeta e,$$

Elle permettait de démontrer que e reste croissant, s'il l'est au centre.

5. *Discussion de l'équation de Clairaut-Radau. Variation de* η. — L'équation de Clairaut-Radau peut encore s'écrire

$$r\eta' = 2\zeta + (2\zeta - 5)\eta - \eta^2 = (\eta - \beta)(\alpha - \eta). \tag{52}$$

Le second membre est un trinome du second degré qui pour $0 < \zeta < 3$ a deux racines de signe contraire

$$-5 < \beta < -2 \qquad \text{et} \qquad 0 < \alpha < \zeta < 3,$$

qui tendent vers -5 et 0 pour $\zeta = 0$; vers 0 et 3 pour $\zeta = 3$. Elles

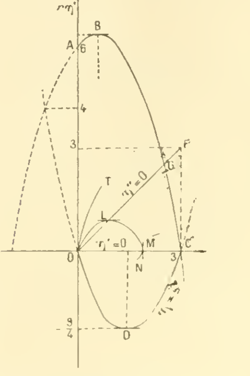


Fig. 9. — Champ de variation de $r\eta'$ et η, OABCD.

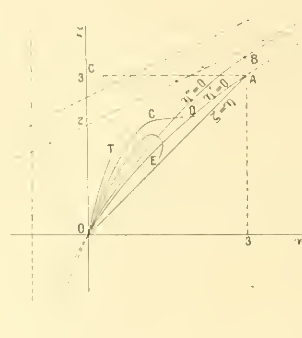


Fig. 10. — Champ de variation de ζ, η, OAC.

varient toujours dans le même sens que ζ. Pour avoir $\eta' = 0$, il faut $\eta = \alpha$.

On a encore la relation (49) $\eta < \zeta < 3$. Donnons à ζ ses deux valeurs limites. dans (52) on aura

$$\eta(\eta - 3) < r\eta' < (\eta + 2)(3 - \eta). \tag{53}$$

Et comme d'après (49) on a $0 < \eta < 3$, le champ de variation de $r\eta'$ par rapport à η sera limité par l'axe de $r\eta'$, OA, et par les deux paraboles ABC et ODC (*fig.* 9).

Dérivons de nouveau l'équation de Clairaut-Radau, il vient

$$r\eta'' + 2\eta'(\eta + 3) = 2(\zeta\eta)' + 2\zeta'.$$

Pour avoir $\eta'' = 0$, il faut ou bien $\eta' = 0$ et $\zeta' = 0$ à la fois (¹), alors η aurait un point d'inflexion et resterait croissant ; ou bien

$$\eta'(\eta + 3) = (\zeta\eta)' + \zeta', \qquad \eta\, d\eta + 3\, d\eta = d\zeta\eta + d\zeta.$$

En intégrant cette équation de 0 à r et remarquant que la constante est nulle, car pour $r = 0$ on a $\eta = \zeta = 0$, il vient

$$2\zeta(\eta + 1) = \eta(\eta + 6).$$

Cette valeur portée dans l'équation de Clairaut-Radau donne $r\eta' = \eta$. La ligne des points d'inflexion sera donc représentée dans la figure 9 par la droite OF ; la ligne des maximums et minimums, $\eta' = 0$, par l'axe OC.

Au centre on a $\eta = \frac{re'}{e} = 0$, puis $\eta > 0$. La courbe des η part donc de l'origine en montant avec $\eta' = 0$. Si elle ne coupe pas OF où $\eta'' = 0$, elle reste montante et η croissant. C'est le cas de la Terre, car à la surface on a à peu près $\eta = 0,5$, $\zeta = 1,5$ et $\eta' = 1,75$, d'où le point figuratif T et la courbe OT.

Or le domaine de variation de $r\eta'$ et η comprend trois parties bien distinctes : 1° OABG où l'on a $\eta'' > 0$, η' croissant et positif, η croissant ; 2° OGC où l'on a $\eta'' < 0$, η' décroissant mais positif, η croissant ; 3° enfin OCD où l'on a $\eta'' < 0$, η' décroissant et négatif, η décroissant. Il est facile de voir dès lors que la courbe de variation ne peut être qu'une courbe analogue à celle de OLMN ou une portion d'une telle courbe selon que le point figuratif de la surface extérieure tombe dans l'une ou dans l'autre de ces trois parties du domaine.

En résumé, la variation générale de η du centre à la surface ne dépend que des valeurs de η et η' à la surface, c'est-à-dire de φ, e_1, ρ_1, D_1. Si $\eta_1' \geqq 0$, c'est-à-dire si l'on a

$$\zeta_1 \geqq \frac{\eta_1}{2}\,\frac{\eta_1 + 5}{\eta_1 + 1} \qquad \text{ou} \qquad \frac{\rho_1}{D_1} \geqq \frac{\eta_1 + 2}{6}\,\frac{3 - \eta_1}{\eta_1 + 1},$$

(¹) Cas très particulier, peu probable. La courbe de variation OLMN, au lieu de couper OC en M, lui serait tangente. La discussion suivante et les conclusions n'en sont pas modifiées.

η est toujours croissant. Dans le cas contraire, η_1 décroissant vers la surface passe par un maximum. Il n'a jamais de minimum. D'où le théorème général :

Si η est croissant à la surface, il l'est dans toute la masse. S'il est décroissant à la surface, il aura un maximum à l'intérieur.

Pour la Terre, en admettant $\frac{1}{e} = 297,40$, on aurait $\eta'_1 = 0$ pour $\rho_1 = 3,667$. La densité superficielle est certainement plus faible que ce dernier chiffre; on a donc $\eta' > 0$ et η toujours croissant.

Pour Jupiter et Saturne on a pour η_1 les valeurs $1,640$ et $1,586$. Les limites correspondantes de ρ_1 sont $0,406$ et $0,226$. Il faudrait que la densité superficielle soit supérieure à ces chiffres pour que η soit décroissant à la surface. Notons que les densités moyennes sont ici $1,30$ et $0,69$.

L'équation de Clairaut-Radau donne encore pour $\eta' = 0$ et $\eta'' = 0$ les équations

$$\zeta = \frac{\eta}{2}\frac{\eta + 5}{\eta + 1} \qquad \text{et} \qquad \zeta = \frac{\eta}{2}\frac{\eta + 6}{\eta + 1}.$$

Traçons les courbes correspondantes (*fig.* 10) nous avons deux hyperboles passant par l'origine. La courbe $\eta'' = 0$ est toujours au-dessus de celle de $\eta' = 0$. On vérifie ainsi de nouveau que si η' devient négatif, il le restera puisqu'on ne peut plus avoir $\eta'' = 0$ au-dessous de la ligne $\eta' = 0$. Traçons la droite $\zeta = \eta$. Toute la courbe sera au-dessus de cette droite OA puisqu'on a $\eta < \zeta$.

Nous venons d'étudier ce qu'on peut savoir de la variation de η d'après sa valeur à la surface. On peut la déduire aussi de la loi de variation de ζ ou de ρ à l'intérieur.

En effet η est d'abord croissant au centre. Il ne peut décroître qu'en passant par un maximum, lequel exige $\eta'' < 0$ et $\eta' = 0$. Dérivons (52) en y faisant $\eta' = 0$, on a

$$\eta'' = 2\zeta'(\eta + 1).$$

Premier cas. — Si ζ' reste positif et ζ croissant, on a $\eta' > 0$ et η reste croissant. Or

$$\zeta' = -3\left(\frac{\rho}{D}\right)' = -\left(\frac{rD'}{D}\right)'.$$

1° Si $\frac{\rho}{D}$ reste décroissant, ζ et η restent croissants. Or $\frac{\rho}{D}$ (rapport de la densité d'une couche à la densité moyenne à l'intérieur de cette couche) reste décroissant pour toutes les lois de densité étudiées par les astronomes : Legendre et Laplace, Roche, Radau, Lipschitz et Maurice-Lévy, quelle que soit la valeur des paramètres arbitraires. Il est facile de s'en assurer par des calculs très simples. On peut donc dire que pratiquement η reste toujours croissant.

Cependant $\frac{\rho}{D}$ serait croissant si ρ restait constant d'une surface S à une autre S', car D continue à diminuer. Mais même en admettant un fluide homogène, la simple compression des couches accroît assez la densité pour que $\frac{\rho}{D}$ soit toujours décroissant comme le montrent les formules de Laplace et Roche basées sur la compression d'un fluide homogène.

Avec la loi $\rho = \frac{\rho_1}{r^n}$ et $0 < n < 3$, on a

$$\frac{\rho}{D} = \frac{3-n}{3} = \text{const.}$$

Ce sera un cas limite. De plus, avec $n = \zeta_1$, cette loi vérifie l'équation de Clairaut; on a alors $\eta = \eta_1 = \text{const.}$

2° On a encore

$$\left(\frac{rD'}{D}\right)' = \frac{D'}{D} + \frac{rD''}{D} - \frac{rD'^2}{D^2}.$$

Cette expression sera toujours négative et η toujours croissant si $D'' < 0$.

3° On a enfin

$$\left(\frac{\rho}{D}\right)' = \frac{1}{D^2}(\rho' D - \rho D').$$

Or (39) donne en tenant compte de (40) et intégrant par parties

$$\frac{1}{3} D' = \frac{1}{4r^4}\int_0^r \rho' \, da^4 = \frac{1}{4}\rho' - \frac{1}{4r^4}\int_0^r \rho'' a^4 \, da$$

et

$$D = \rho - \frac{1}{r^3}\int_0^r \rho' a^3 \, da.$$

on aura

$$D^2\left(\frac{\rho}{D}\right)' = \rho' D - \rho D' = \frac{1}{4}\rho\rho' - \frac{\rho'}{r^3}\int_0^r - \rho' a^3\,da + \frac{3}{4}\frac{\rho}{r^4}\int_0^r \rho'' a^4\,da.$$

Si $\rho'' < 0$ tous les termes du second membre sont négatifs, $\frac{\rho}{D}$ est décroissant, ζ et η croissants (1).

D'ailleurs ce troisième cas équivaut au second. En effet, dans le cas limite où $\rho'' = 0$, ρ est linéaire. On voit facilement que D l'est aussi et $D'' = 0$. Or ρ'' et D'' ne peuvent être toujours positifs ou toujours négatifs qu'en passant par cette limite. Ils y passent tous deux ensemble. Ils seront toujours négatifs ou toujours positifs ensemble.

Deuxième cas. — Si ζ' est nul en un point où $\eta' = 0$, alors $\eta'' = 0$. C'est un point d'inflexion. η' reste positif et η croissant, comme on l'a vu.

Si ζ reste nul et ζ constant à partir d'un certain point jusqu'à la surface, alors de ce point jusqu'à r quelconque on peut intégrer l'équation de Clairaut-Radau prise sous la forme (52) où α et β, fonctions de ζ, sont constants. On a (2)

$$\frac{d\eta}{\eta - \beta} + \frac{d\eta}{\alpha - \eta} = (\alpha - \beta)\frac{dr}{r}, \qquad \frac{\alpha - \eta}{\eta - \beta}\, r^{\alpha-\beta} = \text{const.}$$

Or il est facile de voir, en résolvant le trinome de (52), qu'on a $4 < \alpha - \beta < 5$. D'autre part $\frac{\alpha - \eta}{\eta - \beta}$ varie en sens inverse de η. Donc quand r croît, η croît également. Si r croît indéfiniment, η tend vers α et η' vers 0, mais asymptotiquement. On a toujours η croissant : courbe OCD (*fig.* 10).

Troisième cas. — Si ζ est négatif avec $\eta' = 0$, alors on a $\eta' < 0$ et η devient décroissant. Mais peut-on avoir $\eta' = 0$?

Prenons le cas extrême où la décroissance de ζ est maximum, c'est-

(1) M. Callandreau a signalé le premier et le troisième cas et surtout étudié ce dernier, beaucoup moins général que le premier.

(2) Si ζ est constant partout, la constante est nulle puisqu'au centre on a $r = 0$, alors $\eta = \alpha$ et $\eta' = 0$ partout, η reste constant. C'est le cas limite cité plus haut.

à-dire où la densité reste constante à partir d'un certain point. Si à partir de $r=a$ on a $\rho'=0$ l'intégrale de (47″) reste constante et l'on peut écrire

$$(\zeta-\eta)r^5 D\lambda^2 = k. \tag{48'}$$

Or $r^5 D\lambda^2$ est croissant, donc η tend asymptotiquement vers ζ, et comme ζ tend vers o, si ρ reste constant, η doit finir par devenir décroissant. Mais cela suppose un rayon très grand.

D'ailleurs, on peut éliminer $D\lambda^2$ de l'équation précédente par dérivation. On obtient en effet

$$r(\zeta'-\eta')+(\zeta-\eta)(5+\eta-\zeta)=0 \qquad \text{ou} \qquad ry'+y(5-y)=0,$$

en posant $\zeta-\eta=y$. On obtient

$$\frac{\zeta-\eta}{5+\eta-\zeta}r^5 = \text{const.}$$

par une nouvelle intégration. D'autre part, en remplaçant $r\eta'$ par sa valeur dans l'équation précédente, ou en dérivant directement la valeur de ζ, on obtient

$$r\zeta'=\zeta(\zeta-3), \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\zeta r^3}{3-\zeta}=\text{const.}$$

On vérifie les mêmes conclusions : quand r croît indéfiniment, ζ tend vers o et $\eta<\zeta$ tend vers ζ, donc vers o.

4. *Équation de Clairaut appliquée à l'Océan.* — Le troisième cas du numéro précédent est celui d'une masse ellipsoïdale et hétérogène recouverte d'un fluide de densité constante. L'équation (48′) pourra donc s'écrire à la surface, en remplaçant $\lambda^2=2e$,

$$(\zeta_1-\eta_1)D_1 e_1 = 3\int_0^r -\rho' a^5 e\,da,$$

où r désigne le rayon du noyau, $r_1=1$ celui de la masse totale. En remplaçant ζ_1 et η_1 par leurs valeurs et en intégrant le second membre par parties, on retrouve la formule beaucoup plus compliquée

donnée par Laplace et dont Roche s'est servi [1]. La formule ci-dessus a encore l'avantage de s'appliquer au cas où il y aurait variation brusque de densité entre le noyau et l'enveloppe, comme c'est le cas pour l'Océan. Il suffit, en effet, d'ajouter au second membre le terme d'intégration correspondant à cette variation de densité,

$$-\rho' da = \rho - \rho_1;$$

il vient

$$(\zeta_1 - \eta_1) D_1 e_1 = 3\int_0^r -\rho' a^5 e\, da + 3(\rho - \rho_1) e r^5, \tag{54}$$

où ρ et e désignent la densité et l'aplatissement à la surface du noyau.

On peut démontrer d'ailleurs que cette discontinuité dans la densité n'en introduit pas une dans la variation de η ou de e. En effet, l'équation de Clairaut-Radau montre d'abord que η' reste toujours fini quel que soit η et ζ, et même que $r\eta' < \frac{25}{4}\cdot$ Donc η ne peut pas éprouver de saut brusque.

Pour serrer de plus près la difficulté, on peut toujours supposer à la surface de discontinuité une variation extrêmement rapide de la densité. L'équation de Clairaut-Radau reste applicable. Si nous posons $\zeta = \eta + f(r)$, elle devient

$$r\eta' + \eta(\eta + f) = f \qquad \text{ou} \qquad y' + Py = Q,$$

équation linéaire et intégrable qui donne

$$y = e^{-\int P\,dx}\left(C + \int Q\, e^{\int P\,dx}\, dx\right) = (1 - P\,dx)[C + (1 + P\,dx) Q\,dx],$$

car le champ de la variation, supposée très rapide, se réduit à un seul

---

[1] *Méc. cél.*, Liv. III, n° 34, et *Mémoire sur l'état intérieur du globe terrestre*, 1881, p. 29. Mais il faut remarquer que Roche suppose la terre formée de trois couches homogènes et applique cette formule aux deux couches intérieures, sans tenir compte de la troisième, ni de la discontinuité dans les densités. Hamy, dans son *Étude sur la figure des corps célestes*, 1887, a repris la même hypothèse des trois couches homogènes sous une forme plus rigoureuse. Dans les calculs numériques, j'ai pu traiter le cas général d'une variation continue de la densité (*voir* Chap. VII).

élément d'intégration, et l'on peut développer, en série, en ne conservant que les premiers termes. Or, pour $dx = 0$, on aura $y = C = \eta_1$, d'où finalement

$$\eta = \left(1 - \frac{4+f}{r}dx\right)\left(\eta_1 + \frac{f}{r}dx\right) = \eta_1 - \frac{4+f}{r}\eta_1 dx + \frac{f}{r}dx.$$

La valeur voisine de η_1 au point de discontinuité n'en diffère que d'un infiniment petit, η ne subit donc pas de variation brusque. D'ailleurs, en remplaçant f par sa valeur, on retrouve identiquement la loi de Clairaut-Radau, qui demeure donc applicable même dans le cas de densités discontinues

$$\eta - \eta_1 = d\eta = [2\zeta(\eta + 1) - \eta(\eta + 5)]\frac{dr}{r}.$$

Si dr, la profondeur de l'Océan supposée constante, est assez petite, cette dernière formule suffit pour donner la variation de η de la surface de l'écorce à la surface de l'Océan.

La formule (52) donnera aussi dans ce cas

$$(\eta + 2)De - 5\rho D_1 = 3\rho_1 de.$$

En écrivant

$$\eta = \eta_1 - d\eta, \qquad D = D_1 - dD, \qquad e = e_1 - de,$$

en développant et tenant compte de la valeur précédente de $d\eta$, on obtient

$$\frac{de}{e_1} = \eta_1\frac{dr}{r} \qquad \text{ou} \qquad \frac{re'}{e_1} = \eta_1.$$

La variation de e est encore donnée à la surface dans le cas d'une discontinuité, par la même valeur de η que dans le cas d'une variation continue de la densité.

Si η_1 et e_1 ont été calculés dans l'hypothèse d'une loi continue de la densité pour la surface solide d'une planète, la valeur de correction de $d\eta$ pour la surface sera encore donnée par la loi de Clairaut-Radau [1].

---

(1) Il serait intéressant de pouvoir tenir compte de l'influence de l'Océan dans les calculs numériques, mais il s'introduit de nombreux termes de correction qui rendent les calculs pénibles. D'ailleurs les irrégularités de la surface

4. *Étude de ω^2 en fonction de ρ et de e.* — On a

$$1 + \lambda^2 = \frac{1}{(1-e)^2} = 1 + 2e + 3e^2 + \ldots.$$

Dans (36) faisons $\lambda^2 = 2e$ et changeons la variable a en r pour simplifier :

$$(55) \qquad \frac{3\omega^2}{8\pi f} = \frac{e}{r^3}\int_0^r \rho\, dr^3 - \frac{3}{5}\frac{1}{r^5}\int_0^r \rho\, d e r^5 - \frac{3}{5}\int_r^1 \rho\, de.$$

Or quelles que soient la loi des densités et celle des aplatissements, comme $0 < r < 1$, on peut les supposer développées suivant les puissances de r :

$$(56) \quad \rho = \rho_0(1 + \alpha_1 r + \alpha_2 r^2 + \ldots), \qquad \rho_1 = \rho_0(1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots) = \rho_0(1 + \alpha),$$

$$(57) \quad e = e_0(1 + \beta_1 r + \beta_2 r^2 + \ldots), \qquad e_1 = e_0(1 + \beta_1 + \beta_2 + \ldots) = e_0(1 + \beta).$$

En portant ces valeurs dans (55) et intégrant, on aura

$$(55') \qquad \frac{3\omega^2}{8\pi f} = e_0\rho_0(k_0 + k_1 r + k_2 r^2 + \ldots).$$

On obtient facilement en faisant les calculs :

$$k_0 = \frac{2}{5} - \frac{3}{5}\Big[\beta_1\Big(1 + \frac{1}{2}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_2 + \ldots\Big)$$
$$+ 2\beta_2\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\alpha_1 + \frac{1}{4}\alpha_2 + \ldots\Big) + 3\beta_3\Big(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\alpha_1 + \ldots\Big) + \ldots\Big],$$

$$k_1 = \Big(\beta_1 + \frac{3}{4}\alpha_1\Big) - \frac{3}{5}\Big(\beta_1 + \frac{5}{6}\alpha_1\Big) + \frac{3}{5}\beta_1 = \beta_1 + \frac{1}{4}\alpha_1,$$

$$k_2 = \Big(\beta_2 + \frac{3}{4}\alpha_1\beta_1 + \frac{3}{5}\alpha_2\Big) - \frac{3}{5}\Big(\beta_2 + \frac{6}{7}\alpha_1\beta_1 + \frac{5}{7}\alpha_2\Big) + \frac{3}{5}\Big(\beta_2 + \frac{1}{2}\alpha_1\beta_1\Big),$$

$$k_3 = \Big(\beta_3 + \frac{3}{4}\alpha_1\beta_2 + \frac{3}{5}\alpha_2\beta_1 + \frac{3}{6}\alpha_3\Big)$$
$$- \frac{3}{5}\Big(\beta_3 + \frac{7}{8}\alpha_1\beta_2 + \frac{6}{8}\alpha_2\beta_1 + \frac{5}{8}\alpha_3\Big) + \frac{3}{5}\Big(\beta_3 + \frac{2}{3}\alpha_1\beta_2 + \frac{1}{3}\alpha_2\beta_1\Big).$$

La loi de formation des termes est évidente. Après réduction, le terme

---

lui enlèvent de l'importance, d'autant plus que les différentes lois de densité donnent à très peu près le même aplatissement, quelle que soit la densité superficielle admise.

général peut s'écrire

$$(58)\qquad k_n = \beta_n + \frac{3}{7}\alpha_1\beta_{n-1} + \frac{3}{9}\alpha_2\beta_{n-2} + \ldots + \frac{3}{n+3}\alpha_n - \frac{3}{n(n+5)}(\alpha_1\beta_{n-1} + 2\alpha_2\beta_{n-2} + \ldots + n\alpha_n).$$

Cette formule, linéaire en α et en β, relie α_n et β_n aux α et β précédents. Si ω est constant, il faudra faire

$$k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0.$$

On voit d'après la formule de récurrence (58) que tous les β seront facilement déterminés de proche en proche au moyen des α, ou réciproquement les α au moyen des β. Avec $k_1 = 0$, on a

$$\beta_1 = -\frac{1}{7}\alpha_1. \qquad \ldots$$

Si donc on se donne la loi des densités, on en déduira celle des aplatissements et réciproquement. Il suffit de connaître $e_1 = e_0(1+\beta)$, d'où $e_0 = \frac{e_1}{1+\beta}$, où β sera déterminé par (55). Il n'y a qu'une seule solution.

Si ω n'est pas constant, on pourra écrire

$$(59)\quad \omega^2 = \omega_0^2(1 + \gamma_1 r + \gamma_2 r^2 + \ldots), \qquad \omega_1^2 = \omega_0^2(1 + \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots) = \omega_0^2(1+\gamma).$$

Il faudra alors connaître deux quelconques des relations (56), (57), (59) pour déterminer la troisième. On aura

$$\omega_0^2 = \frac{8}{3}\pi f e_0 \rho_0 k_0 \qquad \text{et} \qquad \gamma_1 = \frac{k_1}{k_0}, \qquad \ldots.$$

Il est plus naturel de supposer ρ connu, car il sera plus facile de faire des hypothèses ou des mesures concernant cette donnée physique.

Nous pouvons supposer ρ_1 et D_1 suffisamment connus, ce qui permet de déterminer deux des paramètres $\rho_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ de (56). On peut supposer tous les autres nuls, sauf α_2, et l'on a la formule de Roche

$$\rho = \rho_0(1 - \alpha r^2),$$

où ρ_0 et α sont complètement déterminés par les valeurs expérimen-

tales ρ_1 et D_1, ce qui ne laisse pas assez de souplesse à la formule pour représenter les autres données. (On écrit $-\alpha$, car ρ est décroissant, $\rho' < 0$.)

Si, au contraire, on annule tous les coefficients α, sauf α_n qu'on laisse indéterminé, on aboutit à la formule de Lipschitz à trois paramètres

$$\rho = \rho_0(1 - \alpha r^n), \qquad D = \rho_0\left(1 - \frac{3\alpha}{n+3} r^n\right).$$

ρ et α sont déterminés par ρ_1 et D_1, et n pourra varier de 0 à ∞. La loi des densités variera en même temps depuis l'homogénéité parfaite jusqu'à une certaine condensation, qui n'est jamais totale.

Dans ce dernier cas, on voit facilement sur la formule de récurrence (58) que tous les β seront nuls, sauf les multiples de n, et l'on aura

$$(61) \qquad e = e_0(1 + \beta_n r^n + \beta_{2n} r^{2n} + \ldots).$$

On a vu que si ω est constant les β ne dépendent que des α. La loi de variation des aplatissements ne dépend que de celle des densités. Si cette loi des densités est donnée et reste la même, celle des aplatissements restera également la même, quels que soient la vitesse de rotation et le rayon total de la masse. Il suffit que le rapport des distances soit conservé dans la concentration ou la dilatation de la masse.

Dans le cas de ω constant la formule (55') donne

$$\frac{3\omega^2}{8\pi f} = e_0 \rho_0 k_0 = e_1 \rho_0 \frac{k_0}{1+\beta},$$

or

$$\frac{3\omega^2}{4\pi f D_1} = \varphi$$

et

$$(62) \qquad D_1 = \rho_0\left(1 + \frac{3}{4}\alpha_1 + \frac{3}{5}\alpha_2 + \ldots\right) = \rho_0(1 + \alpha'),$$

on a

$$(63) \qquad e_1 = \frac{\varphi}{2} \frac{(1+\alpha')(1+\beta)}{k_0}, \qquad e_1 = \frac{\varphi}{2} f(\alpha).$$

α', β et k_0 ne dépendent que des α; il en est de même de e si φ ou ω^2

reste constant. De plus, si la loi des densités reste la même, e_1 est proportionnel à φ ou à ω^2 [1].

Or e_1 et φ étant donnés, on pourra toujours déterminer $f(\alpha)$ de manière à vérifier (63), ou bien on pourra faire varier $f(\alpha)$ de manière à réaliser différents aplatissements, mais toujours à la condition que ω soit faible et e^2 négligeable. On a vu dans le Chapitre précédent qu'autrement il n'en est plus de même et que ω passe par un maximum.

On a donc le *théorème général* suivant :

Dans une masse fluide hétérogène, remplissant les conditions du problème de Clairaut, la loi de variation des aplatissements ne dépend que de celle des densités et l'aplatissement superficiel est proportionnel à φ.

Si ω varie en profondeur, les e et e_1 dépendront en outre des paramètres $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ qui définissent cette vitesse.

CHAPITRE IV.

PROBLÈME DE M. POINCARÉ.

Le problème posé par M. Poincaré consiste à déterminer les limites de l'aplatissement qui vérifie à la fois les conditions de la précession et celles de l'attraction. Ces conditions sont traduites expérimentalement par la valeur de J, rapport des moments d'inertie déduit de la constante de précession et par la valeur de φ, rapport de la force centrifuge à l'attraction, sur l'équateur.

1. *Les trois équations qui déterminent e en fonction de φ, de J, de φ et de J.* — L'équation de Clairaut (38) devient à la surface

$$(64)\qquad \frac{5}{3}(\lambda^2 - \varphi)D_1 = \int_0^1 \rho\, da^5 \lambda^2, \qquad \frac{5}{3}\left(e - \frac{\varphi}{2}\right)D_1 = \int_0^1 \rho\, da^5 e.$$

(1) M. Hennessy avait déjà indiqué une formule analogue à (63), relative à l'aplatissement superficiel seul. Voir *Comptes rendus*, t. XCIV, p. 526.

Si la loi des densités est donnée, on en déduit celle de e dans l'hypothèse de ω constant (Chapitre précédent) et (64) donne e_1 en fonction de φ, valeur qu'on désignera par e_φ.

On peut déduire également e de la considération des moments d'inertie. Pour un ellipsoïde homogène de révolution, on a

$$A = \frac{2}{5} m b^2, \qquad B = \frac{1}{5} m (a^2 + b^2), \qquad m = \frac{4}{3} \pi \rho a b^2,$$

$$A = \frac{8}{15} \pi \rho a^5 (1 + \lambda^2)^2, \qquad B = \frac{4}{15} \pi \rho a^5 (1 + \lambda^2)(2 + \lambda^2).$$

Les moments d'inertie d'une couche ellipsoïdale de densité ρ seront

$$dA = \frac{8}{15} \pi \rho \, da^5 (1 + \lambda^2)^2, \qquad dB = \frac{4}{15} \pi \rho \, da^5 (1 + \lambda^2)(2 + \lambda^2).$$

Ceux de l'ellipsoïde hétérogène seront alors

$$(65) \qquad A = \frac{8}{15} \pi \int_0^1 \rho \, da^5 (1 + \lambda^2)^2, \qquad B = \frac{4}{15} \pi \int_0^1 \rho \, da^5 (1 + \lambda^2)(2 + \lambda^2).$$

Puis on aura immédiatement en négligeant λ^6

$$(65') \qquad J = \frac{A - B}{A} = \frac{\displaystyle\int_0^1 \rho \, da^5 (1 + \lambda^2) \lambda^2}{\displaystyle 2 \int_0^1 \rho \, da^5 (1 + 2\lambda^2)}.$$

Si l'on néglige de plus λ^4, on a

$$(66) \qquad \int_0^1 \rho \, da^5 \lambda^2 = 2J \int_0^1 \rho \, da^5, \qquad \int_0^1 \rho \, da^5 e = J \int_0^1 \rho \, da^5.$$

Enfin, en combinant avec l'équation de Clairaut (64), on obtient

$$(67) \qquad \frac{5}{3} (\lambda^2 - \varphi) D_1 = 2J \int_0^1 \rho \, da^5, \qquad \frac{5}{3} \left(e - \frac{\varphi}{2} \right) D_1 = J \int_0^1 \rho \, da^5.$$

La valeur de J est déterminée par l'Astronomie, (66) donnera une nouvelle valeur de e qui en dépend et que l'on désignera par e_J.

L'équation (67) donne une troisième valeur de e qui dépend à la fois de φ et de J, et désignée par $e_{\varphi J}$. Ces trois valeurs doivent concorder, la loi des densités étant donnée. Nous verrons par les calculs

pratiques que l'inverse de l'aplatissement, qui satisfait à ces trois relations, varie à peine de quelques dixièmes quelle que soit la loi des densités.

Ces trois relations fondamentales peuvent s'écrire en une seule :

$$\frac{5}{3}\left(e - \frac{\varphi}{2}\right) D_1 - \int_0^1 \rho \, da^5 e = J \int_0^1 \rho \, da^5.$$

2. *Équation de condition entre e, φ, J. Limite inférieure de* $\frac{1}{e}$. — Les trois équations ci-dessus sont indépendantes de la loi de la vitesse de rotation. Elles sont encore vraies quand ω est variable. Avec ω constant, dans le cas du problème de Clairaut, on peut établir théoriquement la nécessité d'une limite étroite entre e, φ, J, en introduisant, au moyen de l'équation différentielle de Clairaut-Radau, cette condition de la constance de la vitesse.

En effet, on a identiquement

$$\int_0^a D \, da^5 = 5 \int_0^a a \, da \int_0^a \rho \, da^3 - \frac{5}{2} a^2 \int_0^a \rho \, da^3 - \frac{3}{2} \int_0^a \rho \, da^5,$$

et à la surface

$$(67') \qquad 3 \int_0^1 \rho \, da^5 = 5 D_1 - 2 \int_0^1 D \, da^5.$$

Portant cette valeur dans (67) il vient

$$(68) \qquad (\lambda^2 - \varphi) D_1 = 2 J D_1 - \frac{4}{5} J \int_0^1 D \, da^5.$$

D'autre part, on a aussi identiquement

$$(68') \qquad \left(a^5 \sqrt{1 + \eta} \, D\right)' = \frac{5 a^4 D}{\sqrt{1 + \eta}} \left(1 + \eta + \frac{a \eta'}{10} + \frac{1 + \eta}{5} \frac{a D'}{D}\right).$$

En introduisant ζ et l'équation Clairaut-Radau, on a

$$\left(a^5 \sqrt{1 + \eta} \, D\right)' = \frac{5 a^4 D}{\sqrt{1 + \eta}} \left(1 + \frac{1}{2} \eta - \frac{1}{10} \eta^2\right).$$

On intègre de o à $r_1 = 1$ et il vient

$$(69) \qquad D_1\sqrt{1+\eta_1} = \int_0^1 \frac{1+\frac{1}{2}\eta - \frac{1}{10}\eta^2}{\sqrt{1+\eta}} D\,da^5 = K\int_0^1 D\,da^5.$$

K désigne la valeur moyenne de l'expression en η où l'on aura $0 < \eta < \eta_1$ puisque η est toujours croissant. Cette valeur portée dans (68) donne

$$(70) \qquad \lambda^2 + \frac{4}{5}J\frac{\sqrt{1+\eta_1}}{K} = 2J + \varphi, \qquad e + \frac{2}{5}J\frac{\sqrt{1+\eta_1}}{K} = J + \frac{\varphi}{2}.$$

C'est l'équation de condition que doit vérifier λ^2 ou e, et qui dépend de φ et de J. Le premier membre est fonction de e, le second en est indépendant.

Or K ne peut varier qu'entre des limites très étroites. On a, en effet, le Tableau de variation suivant :

$$K' = \frac{\eta(1-3\eta)}{20(1+\eta)^{\frac{3}{2}}}.$$

η	0		1/3		η_1		3
K'	0	+	0	-		—	
K	1	↗	1,00075 max	↘	K_1	↘	0,8

Fig. 11.

En admettant $292 < \frac{1}{e} < 298$ avec $\eta_1 = \frac{5}{2}\frac{\varphi}{e} - 2$, on a

$$(71) \qquad 0,531 < \eta_1 < 0,583 \qquad \text{et} \qquad 0,9999 < K_1 < 0,9996.$$

On aura donc finalement

$$0,9996 < K < 1,00075;$$

K ne diffère de l'unité que d'une fraction 0,0004 inférieure à λ^2 ou e. Or, J étant de l'ordre de λ^2, on peut donc faire $K = 1$, en négligeant λ^4.

L'équation (70) donne alors comme solution [1] : $\frac{1}{e} = 297,27$.

[1] Radau, *Comptes rendus*, t. C, 1885, p. 972 et *Bul. ast.*, t. II p. 157.

C'est la seule valeur qui puisse concorder avec les données expérimentales de la précession et de l'attraction, dans les limites de précision du problème et dans l'hypothèse de ω constant.

Remarque. — En dehors de toute hypothèse et de toute donnée expérimentale dont dépende η, on a $K \leqq 1.00075$; on en déduit dans les mêmes conditions [1], $\frac{1}{e} \geqq 297,10$.

5. *Les deux limites de l'équation de condition.* — Il importe d'étudier plus complètement cette équation (70) et les limites précises de ses solutions, avec les limites exactes de K, pour l'étude du Chapitre suivant où l'on tiendra compte de λ^4. D'ailleurs, les termes en λ^4 négligés sont complexes et nombreux ; il est probable qu'ils se détruisent mutuellement et que (70) donne déjà une précision assez grande, comme on le verra en effet dans la suite.

Posons

$$y = e + \frac{2}{5} J \frac{\sqrt{1+\eta_1}}{K}, \qquad \eta_1 = \frac{5}{2}\frac{\varphi}{e} - 2,$$

on a

$$\frac{dy}{de} = 1 - \frac{J}{\varphi K}\frac{\varphi^2}{2e^2}\frac{1}{\sqrt{1+\eta_1}} = 1 - \frac{2}{25}\frac{J}{\varphi K}\frac{(\eta_1+2)^2}{\sqrt{1+\eta_1}}$$

Or l'expression en η_1 est croissante pour $0 < \eta_1 < 3$, on a donc

$$\frac{8}{25} < \frac{2}{25}\frac{(\eta_1+2)^2}{\sqrt{1+\eta_1}} < 1.$$

De plus $\frac{J}{\varphi} = \frac{288,38}{305,31} = 0,94454$; on aura donc

$$\frac{J}{\varphi K} < 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{2}{25}\frac{J}{\varphi K}\frac{(\eta_1+2)^2}{\sqrt{1+\eta_1}} < 1$$

si $K > 0,94454$, ce qui a sûrement lieu pour la Terre d'après (71). Donc y' reste positif ; y toujours croissant ne peut passer qu'une seule

[1] Cette démonstration fondamentale est due à M. Poincaré (*Comptes rendus*, t. CVII, 1888, et *Bul. ast.*, t. VI, p. 5 et 49). *Voir* aussi *Figures d'équilibre d'une masse fluide*, p. 92.

fois par la valeur $\frac{\varphi}{2} + \mathrm{J}$, quand e varie. Il n'y a dans le cas de la Terre qu'une seule valeur de e solution de (70) (¹).

Donnons à K ses deux valeurs limites; on aura, pour déterminer les limites correspondantes de e, les deux équations

$$(70') \qquad e + \frac{2}{5}\mathrm{J}\,\frac{\sqrt{1+\eta_1}}{1{,}000\,75} = \mathrm{J} + \frac{\varphi}{2}, \qquad e + \frac{2}{5}\mathrm{J}\,\frac{1+\eta_1}{1 + \frac{1}{2}\eta_1 - \frac{1}{10}\eta_1^2} = \mathrm{J} + \frac{\varphi}{2}.$$

Or on a

$$\mathrm{J} + \frac{\varphi}{2} = 0{,}005\,009\,19,$$

en donnant à e des valeurs régulièrement espacées et en déduisant η_1, on trouve pour la valeur y du premier membre des équations (70′) le Tableau suivant (on n'a écrit que les deux ou trois dernières décimales de y, en prenant pour unité la huitième) :

$\frac{1}{e}$.	297,0.	297,1.	297,2.	297,3.	297,4.	297,5.
K = 1,00075	0,00500984	917	849	781	711	645
K = K_1.........	0,00501180	1113	1047	981	914	848

On a donc en résumé, par un calcul très simple,

$$(71) \qquad 297{,}097 < \frac{1}{e} < 297{,}393.$$

La valeur de e est renfermée ainsi dans des limites très étroites. Elle dépend de la précision des mesures sur φ et J. Or, on obtient facilement

$$(72) \qquad (e-k)\,d\frac{1}{e} = \frac{\mathrm{J}}{e}\left(e - \frac{\varphi}{2}\right)d\frac{1}{\mathrm{J}} + \frac{\varphi}{e}\left(\frac{\varphi}{2} - k\right)d\frac{1}{\varphi}$$

avec

$$k = \frac{\mathrm{J}\varphi}{2\mathrm{K}e}\,\frac{1}{\sqrt{1+\eta_1}} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{J} + \frac{\varphi}{2} - e\right)\frac{\eta_1 + 2}{\eta_1 + 1}.$$

Pour les limites de e trouvées ci-dessus on a

$$d\frac{1}{e} = 0{,}787\,d\frac{1}{\mathrm{J}} + 0{,}199\,d\frac{1}{\varphi}.$$

(¹) On aurait les mêmes résultats, même pour $\eta_1 = 1$, c'est-à-dire

$$\frac{1}{e} = \frac{6}{5}\,\frac{1}{\varphi} = 346.$$

Un accroissement de 0,1 dans la valeur de $\frac{1}{J}$ et $\frac{1}{\rho}$ produit à peu près le même accroissement 0,0986 dans celle de $\frac{1}{e}$.

4. *Calculs numériques directs au moyen des trois équations fondamentales. Aplatissement qui en résulte.* — Les trois formules (64), (66), (67) appliquées à la loi des densités de Legendre-Laplace : $\rho = \rho_0 \frac{\sin mr}{mr}$ donne les valeurs ci-dessous :

m.	138°.	140°.	142°.	144°.	146°.
$\frac{1}{e_\rho}$	288,7	291,2	293,9	296,7	299,7
$\frac{1}{e_J}$	299,1	298,5	297,9	297,3	296,6
$\frac{1}{e_{\rho J}}$	293,8	294,7	295,8	297,0	298,2

Tisserand avait déjà calculé la première ligne des e_ρ (1). On obtient comme courbes représentatives de ces trois séries de valeurs des lignes presque parfaitement droites, qui se coupent au même point où l'on a

$$\rho_1 = 2,61, \qquad \frac{1}{e} = 297,2.$$

Avec la formule de Roche ou celle plus générale de Lipschitz, on doit faire $\frac{1}{2} < n < 3$ pour avoir $2 < \rho_1 < 3$, et $n < 7$ pour $\rho_1 > 0$. On obtient, dans ces différents cas, comme solution unique :

n.	$\frac{1}{2}$.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	,75.
$\frac{1}{e}$	297,187	297,171	297,173	297,184	297,19	297,20	297,21	297,21
ρ_1 ...	2,961	2,725	2,253	1,779	1,305	0,832	0,357	0,0

Valeurs très voisines et tout à fait concordantes avec celles qui précèdent.

Avec les lois plus compliquées

$$\rho = \rho_0(1 - \alpha r^2)^2 \qquad \text{et} \qquad \rho = \rho_0(1 - \alpha r^2)^3,$$

(1) *Méc. cél.*, t. II, p. 237.

on obtient

$$\frac{1}{e} = 297,183 \quad \text{et} \quad 297,15$$

ainsi que

$$\rho_1 = 2,632 \quad \text{et} \quad 2.734.$$

5. *Calculs numériques au moyen des formules de Tisserand et de M. Lévy.* — Lipschitz avait démontré [1] que, dans le cas de la formule étudiée par lui, la valeur de l'aplatissement, donnée par la formule (64) en y faisant ω constant, était représentée par une série hypergéométrique.

Tisserand est arrivé à résoudre cette équation transcendante d'une manière très simple [2]. Il arrive alors à écrire l'équation (67) entre e, et e_1

$$e - \frac{\varphi}{2} = \frac{3 - R}{5} J,$$

où R est fonction seulement des données superficielles e_1, ρ_1, D_1. En modifiant légèrement les notations par l'introduction de η_1 au lieu de $2h$ et $2R' = R + 2$, l'équation ci-dessus s'écrit

$$e + \frac{2}{5} JR' = J + \frac{\varphi}{2},$$

où

$$R' = 1 + \frac{\eta_1}{2} - \frac{\eta_1^2}{2^3} + \frac{2\zeta - 1}{\zeta}\frac{\eta_1^3}{2^5} - \frac{15\zeta^2 - 31\zeta + 15}{12\zeta^2}\frac{\eta_1^4}{2^7}$$
$$+ \frac{126\zeta^3 - 483\zeta^2 + 665\zeta - 225}{72\zeta^3}\frac{\eta_1^5}{2^9} - \ldots$$

C'est l'équation de condition (70) où la fonction $\frac{\sqrt{1+\eta_1}}{K}$ de M. Poincaré est remplacée par son développement suivant les puissances de $\frac{\eta_1}{2}$ et de ζ dans le cas où les densités suivent la loi de Lipschitz.

---

[1] *Journal de Crelle*, t. 62.

[2] *Comptes rendus*, t. XCIX, 13 oct. 1884, p. 579, et 1er sept. M. Callandreau a repris les mêmes calculs dans son remarquable *Mémoire sur la théorie de la figure des planètes*, p. 71. Tisserand donnait aussi après Lipschitz le développement des termes de la série hypergéométrique. J'ai pu les remplacer par ceux d'une autre série hypergéométrique plus simple et plus rapidement convergente, ce qui a rendu possible les calculs numériques du Chapitre VII.

Tisserand supposait l'aplatissement e suffisamment connu par les mesures géodésiques $\frac{1}{e} = 292,5$ et il pensait pouvoir en déduire la valeur des trois paramètres ρ_0, α, n, de la formule de Lipschitz qui vérifieraient l'aplatissement mesuré et pouvoir déterminer ainsi plus complètement la loi des densités. Il a constaté seulement que R variait très peu, trop peu pour permettre de réaliser l'accord. Il a même cru que finalement cette valeur de R ne dépendait pas de celle de ρ_1. C'était avant les travaux de MM. Radau et Poincaré. Nous savons maintenant que la faible variation de la fonction R de Tisserand tient à la forme même de l'expression K à laquelle elle correspondait.

Ici, je me suis servi des mêmes formules pour résoudre le problème inverse. J'ai supposé l'aplatissement e insuffisamment déterminé par les mesures géodésiques, et cherché la valeur de e qui répond aux conditions du problème. J'ai donc donné à e et à ρ_1 une série de valeurs compatibles avec les limites expérimentales : $2 < \rho_1 < 3$, et les limites déterminées dans le paragraphe précédent :

$$297,10 < \frac{1}{e} < 297,40.$$

Pour chacune de ces valeurs, j'ai déterminé celles de η_1 et de ζ qui y correspondent, puis celles de R en poussant la précision jusqu'au cinquième chiffre et tenant compte du terme en η_1^5. J'ai obtenu ainsi les valeurs de $\frac{3-\mathrm{R}}{5}\mathrm{J} = \mathrm{J} - \frac{2}{5}\mathrm{JR}'$ qui doivent être égales à $e - \frac{\varphi}{2}$ d'après l'équation de condition.

Ces différentes valeurs sont consignées dans le Tableau suivant $\left(\text{la dernière colonne contient celles de } e - \frac{\varphi}{2}\right)$:

$1:e$.	ρ_1. 2,0.	2,2.	2,4.	2,6.	2,8.	3,0.	$e - \frac{\varphi}{2}$.
297,0.....	0,0016320	320	320	321	323	324	332
297,1.....	0,0016316	316	316	317	318	319	321
297,2.....	0,0016311	311	311	312	313	315	309
297,3.....	0,0016306	306	306	307	308	310	298
297,4.....	0,0016302	302	302	303	304	305	287
297,5.....	0,0016297	297	297	298	299	300	278
$1:e$......	297,17	297,17	297,17	297,16	297,14	297,13	

En traçant les courbes de chacune des colonnes qui correspondent à des valeurs différentes de ρ_1 on voit qu'elles coupent toutes la courbe de la dernière colonne $e - \frac{\varphi}{2}$ dans l'intervalle : $297,1 < \frac{1}{e} < 297,2$. Un calcul facile donne dans chaque cas, pour chaque valeur de ρ_1, la valeur précise de l'aplatissement qui satisfait à l'équation de condition, c'est-à-dire à la précession et à l'attraction. Ces valeurs sont consignées dans la dernière ligne du Tableau. On obtient, à 0,01 près, les nombres trouvés par les calculs directs.

Ces valeurs sont plus près de la limite théorique inférieure 297,10 que de la limite supérieure 297,40. La valeur moyenne de η est plus près de celle qui correspond au maximum K que de η_1. Et cela devait être, car la valeur de K égale à 1 au centre, maximum pour $\eta = \frac{1}{3}$ et égale de nouveau à 1 pour $\eta = 0,53\ldots$, reste bien plus longtemps au voisinage de son maximum que de K_1.

Même en faisant varier ρ_1 de 0 à 4, on aurait encore

$$297,0 < \frac{1}{e} < 297,25.$$

M. Lévy (¹) a donné une formule plus générale que celle de Lipschitz, contenant un paramètre de plus : $D = \rho_0(1 - \alpha_1 r^n)^\mu$. Elle se ramène à celle de Lipschitz en y faisant $\mu = 1$ et $\alpha_1 = \frac{3\alpha}{n+3}$ d'après (62). On peut lui appliquer les mêmes calculs. R est à peine modifié de 0,0003 par l'introduction de μ dans le terme en η_1^2 seulement. On obtient les mêmes résultats que ci-dessus, relevés de 0,01 à 0,02.

$\frac{1}{e}$	297,19	297,19	297,19	297,17	297,16	297,14

La loi de Radau (²) : $\frac{e}{e_1} = 1 - \frac{\eta_1}{n}(1 - r^n)$ rentre dans l'un des cas particuliers établis par M. Lévy, celui où

$$\mu = -\frac{\lambda + 5}{2(\lambda + 1)} = -\frac{n+5}{2(n+1)},$$

(¹) *Comptes rendus*, t. CVI, 1888, p. 1270, 1314, 1375.

(²) *Bul. ast.*, t. II, p. 157.

comme il est facile de s'en rendre compte. Elle donnerait donc les mêmes résultats.

Enfin, j'ai étudié aussi une *loi nouvelle* des densités et des aplatissements qui peut être considérée comme un cas limite de condensation. En faisant $\eta' = 0$, on satisfait aux équations de Clairaut avec $\eta = \eta_1$, constant, $\zeta = \zeta_1$, constant, puis $e = e_1 r^{\eta_1}$; $\rho = \rho_1 r^{-\zeta_1}$. Cette loi sera étudiée au Chapitre VII. On trouvera pour la valeur de l'aplatissement qui satisfait à l'équation de condition $\frac{1}{e} = 297,393$. C'est précisément la limite supérieure déterminée dans l'hypothèse où la valeur moyenne de η serait égale à η_1, ce qui a lieu ici puisque η est constant. C'est là une justification remarquable des ces calculs purement théoriques du 3e paragraphe de ce Chapitre.

6. *Calcul de g. Valeur de e qu'on en déduit. Précision des résultats.* — On a immédiatement pour la pesanteur

$$(73)\quad g^2 = X^2 + (Y + \omega^2 y)^2 = \frac{X^2}{x^2}\,\frac{b^2}{1+\lambda^2}(1 - \lambda^2 \sin^2\theta + 2\lambda^4 \sin^2\theta - \lambda^4 \sin^4\theta).$$

en tenant compte de l'équation de l'ellipsoïde et de la condition (4)

$$\frac{Y + \omega^2 y}{y} = \frac{X}{x}\,\frac{1}{1+\lambda^2}.$$

D'autre part, la formule (16), intégrée par parties, devient à la surface

$$(74)\quad \begin{aligned} \frac{X}{x} &= -\frac{4}{3}\pi f \int_0^1 \rho\, da^3 \frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}(l - \operatorname{arc\,tang} l) \\ &= -\frac{4}{3}\pi f \int_0^1 \rho\, da^3 (1+\lambda^2)\frac{l^3}{\lambda^3}\left(1 - \frac{3}{5}l^2 + \frac{3}{7}l^4 + \dots\right). \end{aligned}$$

En remplaçant l par sa valeur donnée par (77), page 67, on a en négligeant λ^4

$$(75)\quad g = f\frac{M}{a^2}(1 - 2e + \varphi)\left[1 - \left(\frac{5}{2}\varphi - e\right)\sin^2\theta\right] \qquad (\theta = \text{colatitude}).$$

La pesanteur est maximum aux pôles

$$g_p = \frac{M}{a^2}(1 - 2e + \varphi).$$

Elle est plus petite que si toute la masse était au centre, car $2e > \varphi$. La variation de la pesanteur de l'équateur aux pôles est

$$n = \frac{5}{2}\varphi - e = e(\eta + 1).$$

On en déduit la valeur de e au moyen des observations du pendule. Le résultat n'est pas très précis ([1]).

Pour la variation de g en profondeur on peut négliger l'aplatissement, on a

$$g = f\frac{m}{r^2} = \frac{4}{3}\pi f \frac{1}{r^2}\int_0^r \rho\, dr^3 = \frac{4}{3}\pi f r \mathrm{D},$$

d'où

$$g' = \frac{4}{3}\pi f(\mathrm{D} + r\mathrm{D}') = \frac{4}{3}\pi f \mathrm{D}(1 - \zeta).$$

Si à la surface on a $\zeta > 1$, c'est-à-dire $\rho_1 < 3,706$, on aura $g' < 0$, alors g varie en raison inverse de r et croît à partir de la surface jusqu'à un maximum pour $\zeta = 1$, puis décroît jusqu'à 0.

Si l'on avait $\zeta = 1$ partout, on aurait $g = \text{const.}$ Il est à remarquer que l'hypothèse $\eta = \text{const.}$ donne $\zeta_1 = 1,017$, valeur très voisine de 1.

Remarque. — On a la relation

$$\frac{b^2}{a^2} = 1 + \lambda^2 = (1 + \varepsilon)^2 = \frac{1}{(1 - e)^2}.$$

On a aussi, e étant l'aplatissement et ε l'ellipticité,

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{a}{b - a}, \qquad \frac{1}{e} = \frac{b}{b - a} = \frac{1}{\varepsilon} + 1.$$

En négligeant ε^2 ou e^2, en prenant e pour ε et réciproquement, on fait donc une erreur d'une unité sur l'inverse de l'aplatissement.

De même, en développant l'expression ci-dessus, on a

$$\lambda^2 = 2e + 3e^2 + 4e^3 + \ldots = 2e\left(1 + \frac{3}{2}e + \ldots\right),$$

([1]) Faye montre dans son *Cours d'Astronomie de l'École Polytechnique*, t. I, p. 357, que les neuf déterminations principales laissent subsister une erreur possible de 6 *unités* sur l'inverse de l'aplatissement, ce qui est énorme. Avec les mesures actuelles plus précises et plus nombreuses, elle resterait cependant du même ordre, c'est-à-dire de l'ordre des unités : $298,3 \pm 1$, d'après Helmert, en tenant compte des termes en e^2.

d'où

$$\frac{2}{\lambda^2} = \frac{1}{e}\left(1 - \frac{3}{2}e + \ldots\right) = \frac{1}{e} - \frac{3}{2} + \ldots.$$

Ainsi en remplaçant λ^2 par $2e$ et négligeant e^2 on fait une erreur de $+1,5$ sur l'inverse de l'aplatissement, sans parler des autres termes de correction. La précision des résultats obtenus ci-dessus, à quelques dixièmes près, est donc illusoire, et il faut de toute nécessité tenir compte de λ^4 pour que la précision réelle égale la précision apparente. C'est l'objet du Chapitre suivant. Mais la précision de cinq et six chiffres en première approximation était nécessaire pour obtenir une précision égale dans la seconde approximation.

CHAPITRE V.

PROBLÈMES DE CLAIRAUT ET DE M. POINCARÉ EN TENANT COMPTE DE λ^4.

Nous reprenons ici les deux problèmes précédents en étudiant les corrections à introduire dans une seconde approximation.

1. *Établissement des formules.* — La formule (18), développée suivant les puissances de l et de λ, donne

$$(76) \quad \frac{3\omega^2}{4\pi f} = \int_0^r -\rho' \frac{l^3}{\lambda^3} \frac{1+\lambda^2}{1+\lambda_r^2}\left(\lambda_r^2 - \frac{3}{5}l^2 - \frac{6}{5}\lambda_r^2 l^2 + \frac{6}{7}l^4\right)da$$
$$+ \int_r^1 (\rho_1 - \rho'\,da)\frac{1+\lambda^2}{1+\lambda_r^2}\left(\lambda_r^2 - \frac{3}{5}\lambda^2 - \frac{6}{5}\lambda_r^2\lambda^2 + \frac{6}{7}\lambda^4\right).$$

La valeur de l est donnée par la formule (a). Chap. II, § 1. En posant $\frac{x^2}{r^2} = \cos^2\theta$ et $\frac{a^2}{r^2}\lambda^2 = \beta^2$ ($r = a$ de S_r) on peut l'écrire

$$(77) \qquad l^4\cos^2\theta + (1 + \lambda_r^2\sin^2\theta - \beta^2)l^2 - \beta^2 = 0.$$

C'est une équation du second degré en l^2. La racine positive seule convient. Représentons par D le discriminant de cette équation, on obtient facilement en développant sa valeur et négligeant les termes

en λ^6

$$\sqrt{\mathrm{D}} = (1 + \lambda_r^2 \sin^2\theta - \beta^2) + 2\beta^2 \cos^2\theta (1 - \lambda_r^2 \sin^2\theta + \beta^2 \sin^2\theta),$$

$$(78) \qquad l^2 = \beta^2[1 - (\lambda_r^2 - \beta^2)\sin^2\theta]\ldots \quad \text{et} \quad l^3 = \beta^3\left[1 - \frac{3}{2}(\lambda_r^2 - \beta^2)\sin^2\theta\right]\ldots \quad (^1).$$

En portant dans l'équation (76) et négligeant λ^6 on obtient

$$(79) \qquad \frac{3\omega^2}{4\pi f} = \int_0^r -\rho' \frac{a^3}{r^3} \frac{1+\lambda^2}{1+\lambda_r^2} \left(\lambda_r^2 - \frac{3}{5}\beta^2 - \frac{6}{5}\lambda_r^2\beta^2 + \frac{6}{7}\beta^4\right) da$$
$$+ \int_r^1 (\rho_1 - \rho'\, da) \frac{1+\lambda^2}{1+\lambda_r^2}\left(\lambda_r^2 - \frac{3}{5}\lambda^2 - \frac{6}{5}\lambda_r^2\lambda^2 + \frac{6}{7}\lambda^4\right)$$
$$- \frac{3}{2}\sin^2\theta \int_0^r -\rho'(\lambda_r^2 - \beta^2)^2 \frac{a^3}{r^3}\, da;$$

en intégrant par parties et remarquant que $\beta_r^2 = \lambda_r^2$, on a

$$(79') \qquad \frac{3\omega^2}{4\pi f} = \int_0^r \rho\, d\, \frac{a^3}{r^3} \frac{1+\lambda^2}{1+\lambda_r^2}\left(\lambda_r^2 - \frac{3}{5}\beta^2 - \frac{6}{5}\lambda_r^2\beta^2 + \frac{6}{7}\beta^4\right)$$
$$+ \int_r^1 \rho\, d\, \frac{1+\lambda^2}{1+\lambda_r^2}\left(\lambda_r^2 - \frac{3}{5}\lambda^2 - \frac{6}{5}\lambda_r^2\lambda^2 + \frac{6}{7}\lambda^4\right)$$
$$- \frac{3}{2}\sin^2\theta \int_0^r \rho\, d\, \frac{a^3}{r^3}(\lambda_r^2 - \beta^2)^2.$$

C'est la formule qu'on aurait trouvée directement par la méthode ordinaire (²). Comme $\sin^2\theta = 1 - \frac{x^2}{r^2}$, il vient

$$(80) \qquad \frac{r^2}{2\pi f}\frac{\partial\omega^2}{\partial x^2} = \frac{1}{r^3}\int_0^r -\rho'(\lambda_r^2 - \beta^2)^2 a^3\, da = \mathrm{A}.$$

C'est bien un cas de la formule générale trouvée au Chapitre I.

(¹) En posant $\cos^2\theta = \frac{x^2}{x^2+y^2}$ et poussant l'approximation plus loin on obtient

$$(78') \qquad l^2 = \beta^2[1 - (\lambda_r^2 - \beta^2)\sin^2\theta(1 - \lambda_r^2 - \beta^2 + 2\beta^2\sin^2\theta)\ldots].$$

(²) On vérifie facilement qu'elle se ramène à la formule (17) de M. Callandreau (*Mémoire sur la théorie de la figure des planètes*, 1889, p. 31; *Annales de l'Observatoire de Paris*, t. XIX).

ω_e et ω_p étant les vitesses à l'équateur et au pôle, on aura encore

$$(80') \quad \begin{cases} \omega^2 = \omega_p^2 - 2\pi f A \sin^2\theta = \omega_e^2 + 2\pi f A \cos^2\theta = \omega_e^2(1+\alpha\cos^2\theta), \\ \omega^2 = \omega_{45}^2 - \pi f A \cos 2\theta, \qquad \omega_{45}^2 = \frac{1}{2}(\omega_e^2 + \omega_p^2). \end{cases}$$

Pour que les surfaces de niveau soient ellipsoïdales, il faut que la vitesse croisse de l'équateur au pôle, sur chacune des surfaces, suivant la loi ci-dessus.

On multiplie A de (80) par r^7, on dérive par rapport à r et l'on obtient, en tenant compte de (47'),

$$(81) \quad r\frac{dA}{dr} + 7A = 2\left(2\lambda_r^2 + r\frac{d\lambda^2}{dr}\right)\frac{1}{r^3}\int_0^r - \rho'(\lambda_r^2 - \beta^2)\, a^3\, da = \frac{2}{3}D\lambda^4\eta(2+\eta).$$

En dérivant de nouveau et tenant compte de (47') et (48'), il vient

$$(82) \qquad 8rA' + r^2A'' = \frac{2}{3}D\lambda^4[\zeta(4+6\eta+3\eta^2) - 2\eta(5+4\eta)].$$

Au centre $A = 0$, il reste ensuite toujours positif, d'après (80).

En divisant (81) par r on a $A' = 0$, au centre; car $\frac{A}{r} = 0$ et $\frac{d\lambda^2}{dr} = 0$. A est croissant au centre. Il ne peut décroître qu'en passant par un maximum, c'est-à-dire pour $A' = 0$ et $A'' < 0$. Il sera toujours croissant, d'après (82), si

$$(83) \qquad \zeta(4+6\eta+3\eta^2) - 2\eta(5+4\eta) > 0.$$

M. Callandreau a montré qu'il en était ainsi pour $n \geqq 3$, avec la formule de M. Radau (¹).

D'ailleurs, $\lambda_r^2 - \beta^2$ est toujours positif et croissant avec r, $\beta^2 = \frac{a^2}{r^2}\lambda^2$ étant décroissant. Si l'on représente par $(\lambda_r^2 - \beta^2)_m$ sa valeur moyenne on a, d'après (80),

$$A = (\lambda_r^2 - \beta^2)_m^2 \frac{1}{r^3}\int_0^r - \rho' a^3\, da = (\lambda_r^2 - \beta^2)_m^2 (D - \rho).$$

Or, pratiquement, $D - \rho$ est toujours croissant comme ζ avec les dif-

---

(¹) Même Ouvrage, p. 39.

férentes lois de densités étudiées. La valeur moyenne de $\lambda_r^2 - \beta^2$ sera croissante également ainsi que A.

Le maximum de $(\lambda_r^2 - \beta^2)^2$ est λ_r^4; d'où $A < \lambda^4(D - \rho)$, quantité toujours croissante.

On peut trouver une limite plus faible encore. En effet, d'après (81), on peut écrire

$$(a^7 A)' = \frac{2}{3} D\lambda^4 \eta(2+\eta)a^6, \qquad r^7 A = \frac{2}{21}\int_0^r D\lambda^4 \eta(2+\eta)\,da^7;$$

λ^2 et η étant croissants, on a

$$\int_0^r \lambda^4 \eta(2+\eta) D\,da^7 < \lambda^4 \eta(2+\eta)\int_0^r D\,da^7.$$

Or

$$\int_0^r D\,da^7 = \frac{7}{5}\int_0^r a^2 D\,da^5 < \frac{7}{5} r^2 \int_0^r D\,da^5.$$

En tenant compte de (69) intégrée de o à r, où l'on fait $K = 1$ en négligeant les λ^6, on a

$$(84)\quad K\int_0^r D\,da^5 = a^5 D\sqrt{1+\eta} \qquad \text{et} \qquad A < \frac{2}{15} D\lambda^4 \eta(2+\eta)\sqrt{1+\eta}.$$

Pour la Terre à la surface on aurait, d'après (80′) avec $2\pi f = \frac{3}{2}\frac{\omega^2}{\varphi D}$,

$$\alpha = \frac{\omega_p^2 - \omega_e^2}{\omega_e^2} = 6\frac{e^2}{\varphi}\frac{A}{D\lambda^4} < \frac{4}{5}\frac{e^2}{\varphi}\eta(2+\eta)\sqrt{1+\eta} = 2e\eta\sqrt{1+\eta} = 0{,}00458.$$

Or toujours d'après (80′) on a, en négligeant α^2,

$$(84')\quad \left\{\begin{aligned} &\omega = \omega_e\left(1 + \frac{\alpha}{2}\cos^2\theta\right), \qquad T = T_e\left(1 - \frac{\alpha}{2}\cos^2\theta\right),\\ &\delta T = -\frac{\alpha}{2} T_e \cos^2\theta, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}.\end{aligned}\right.$$

A 45° la rotation devrait se faire au maximum en 99^s de moins qu'à l'équateur, pour que la surface soit rigoureusement ellipsoïdale.

Par des calculs numériques avec la formule de Roche et $2 < \rho_1 < 3$, on trouve

$$0{,}00133 < \alpha < 0{,}00195, \qquad 28^s{,}7 < \delta T < 42^s{,}2.$$

Il faudrait de 512 à 750 jours pour qu'un point du parallèle de 45° effectue une rotation de plus.

2. *Potentiel et attraction des couches de correction pour tenir compte de la déformation.* — Si l'équilibre permanent est atteint, si la vitesse de rotation est constante en latitude, les surfaces de niveau ne peuvent plus être ellipsoïdales. Mais la déformation est de l'ordre de λ^4 et l'on peut l'évaluer en négligeant λ^6.

Legendre a démontré qu'en passant à l'équilibre permanent le rayon de l'ellipse méridienne subissait un accroissement [1]

$$\delta r = a\lambda^4(\gamma_0 + \gamma_1 \sin^2\theta + \gamma \sin^2\theta \cos^2\theta).$$

L'accroissement du demi-axe a est $\gamma_0 a\lambda^4$, celui de b est $(\gamma_0 + \gamma_1)a\lambda^4$. Mais ici on peut négliger l'état antérieur, on suppose l'équilibre établi, et l'on prend les axes dans leur valeur actuelle pour n'étudier que la déformation. Alors on doit faire dans la formule de Legendre, $\gamma_0 = \gamma_1 = 0$,

$$(85) \qquad \delta r = a\gamma\lambda^4 \sin^2\theta \cos^2\theta.$$

λ^2 est toujours défini par $b^2 = a^2(1 + \lambda^2)$, a et b étant les valeurs des axes dans l'état d'équilibre.

Il faut donc corriger l'attraction de chacun de nos ellipsoïdes homogènes de densité $d\rho$, par celle d'une couche d'épaisseur variable δr et de même densité $d\rho$ [2]. Plus simplement, comme on néglige λ^6, on peut la considérer comme une couche sphérique de rayon a et de densité variable $\delta r\, d\rho$.

On calcule le potentiel de ces couches au moyen des fonctions sphériques. On a d'abord

$$V = \int \frac{dm}{d}, \qquad dm = \rho a^2 \sin\theta\, d\theta\, d\psi.$$

(1) Legendre, *Hist. de l'Acad. des Sc.*, 1789, et Callandreau, p. 31.

(2) En employant la méthode des ellipsoïdes de M. Hamy, on ne rencontre aucune difficulté théorique. Dans la méthode ordinaire, au contraire, on corrige une couche ellipsoïdale infiniment mince par une autre couche infiniment mince (Callandreau, p. 14). On retrouvera les mêmes formules après intégration par parties, en employant ici la méthode de M. Hamy.

L'intégrale étant étendue à tout le volume; a, θ, ψ étant les coordonnées polaires et dm la masse du point attirant situé sur la surface S; r, θ_r, ψ_r sont celles du point attiré situé sur la surface S_r (sa masse $= 1$); d étant la distance des deux points. On a

$$\frac{1}{d} = (a^2 + r^2 - 2\alpha a r)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} + \frac{a}{r^2}P_1(\alpha) + \frac{a^2}{r^3}P_2(\alpha) + \ldots;$$

$$\alpha = \cos\theta\cos\theta_r + \sin\theta\sin\theta_r\cos(\psi - \psi_r).$$

La densité sera, en posant $\cos\theta = \mu$,

$$\rho = -\rho' \, da \, \delta r = -\rho' a \gamma \lambda^4 (1 - \mu^2)\mu^2.$$

En exprimant les μ au moyen des polynomes de Legendre

$$X_2 = \frac{3}{2}\left(\mu^2 - \frac{1}{3}\right), \qquad X_4 = \frac{35}{8}\left(\mu^4 - \frac{6}{7}\mu^2 + \frac{3}{35}\right),$$

on obtient

$$(1 - \mu^2)\mu^2 = \frac{2}{15} + \frac{2}{21}X_2 - \frac{8}{35}X_4,$$

on a ensuite

$$d\mu = -\sin\theta\,d\theta \qquad \text{et} \qquad \int_0^\pi \sin\theta\,d\theta = \int_{-1}^{+1} d\mu.$$

On aura pour le potentiel en un point de la surface S_r

$$V = \int_0^r \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} -\rho'\gamma\lambda^4 \frac{1}{r}\left(1 + \frac{a}{r}P_1 + \frac{a^2}{r^2}P_2 + \ldots\right)$$
$$\times \left(\frac{2}{15} + \frac{2}{21}X_2 - \frac{8}{35}X_4\right) a^3 \, da \, d\mu \, d\psi.$$

Or

$$\int_0^{2\pi} d\psi = 2\pi.$$

De plus les P fonctions des α peuvent s'écrire ([1])

$$P_i(\alpha) = X_i(\mu)\,X_i(\mu_r) + f(\theta, \theta_r)\cos(\psi - \psi_r).$$

En intégrant par rapport à ψ de o à 2π, les termes en $\cos(\psi - \psi_r)$ disparaissent. Il reste seulement les doubles produits des X_i. On a

([1]) *Voir*, par exemple, TISSERAND, *Méc. cél.*, t. II, p. 251 et suiv.

alors

$$V = \frac{2\pi}{r}\int_0^r -\rho'\gamma\lambda^4 a^3\, da \int_{-1}^{+1}\left[\frac{2}{15} + \frac{2}{21}X_2(\mu) - \frac{8}{35}X_4(\mu)\right]$$
$$\times\left[1 + \frac{a}{r}X_1(\mu)X_1(\mu_r) + \frac{a^2}{r^2}X_2(\mu)X_2(\mu_r) + \ldots\right]d\mu.$$

Or on a

$$\int_{-1}^{+1} X_i(\mu)X_j(\mu)\,d\mu = 0, \qquad \int_{-1}^{+1} X_i^2(\mu)\,d\mu = \frac{2}{2i+1}.$$

Il ne reste après intégration que les coefficients de X_2^2 et X_4^2

$$V_e = \frac{2\pi}{r}\int_0^r -\rho'\gamma\lambda^4\left[\frac{2}{15} + \frac{2}{5}\,\frac{2}{21}\,\frac{a^2}{r^2}X_2(\mu_r) - \frac{2}{9}\,\frac{8}{35}\,\frac{a^4}{r^4}X_4(\mu_r)\right]a^3\,da.$$

C'est le potentiel des points pour lesquels la surface S_r est extérieure ou V_e. Pour avoir le potentiel V_i des autres, il faut développer $\frac{1}{d}$ en fonction de $\frac{r}{a} < 1$; on a

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{a}\left(1 + \frac{r}{a}P_1 + \frac{r^2}{a^2}P_2 + \ldots\right).$$

Les X sont les mêmes et l'on obtient

$$V_i = 2\pi\int_r^1 (\rho_1 - \rho'\,da)a^2\gamma\lambda^4\left[\frac{2}{15} + \frac{2}{5}\,\frac{2}{21}\,\frac{r^2}{a^2}X_2(\mu_r) - \frac{2}{9}\,\frac{8}{35}\,\frac{r^4}{a^4}X_4(\mu_r)\right].$$

Il faut en déduire les composantes de l'attraction qui sont

$$X = f\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad Y = f\frac{\partial V}{\partial y}.$$

Or ici $V = F(x, r)$ est fonction explicite de x par $\mu = \cos\theta = \frac{x}{r}$, et par $r^2 = x^2 + y^2$, et fonction de y seulement par r. On aura en dérivant

$$X = \frac{\partial F}{\partial r}\,\frac{x}{r} + \frac{\partial F}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial F}{\partial r}\,\frac{y}{r} + \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Mais

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

d'où

$$\frac{X}{x} - \frac{Y}{y} = \frac{1}{x}\frac{\partial F}{\partial x}.$$

On n'a besoin dans la suite que de cette différence. On obtient alors pour les corrections δX et δY à introduire

$$(86) \qquad \frac{\delta X_e}{x} - \frac{\delta Y_e}{y} = \frac{8\pi f}{r^5}\int_0^r \quad - \rho' \quad \gamma\lambda^4\left(\frac{1}{35} + \frac{2}{21}\frac{a^2}{r^2} - \frac{2}{9}\frac{a^2}{r^2}\cos^2\theta\right) a^5\, da,$$

$$(86') \qquad \frac{\delta X_i}{x} - \frac{\delta Y_i}{y} = 8\pi f\int_r^1 (\rho_1 - \rho'\, da)\, \gamma\lambda^4\left(\frac{1}{35} + \frac{2}{21}\frac{r^2}{a^2} - \frac{2}{9}\frac{r^2}{a^2}\cos^2\theta\right).$$

On aura

$$\delta X = \delta X_e + \delta X_i \qquad \text{et} \qquad \delta Y = \delta Y_e + \delta Y_i,$$

pour la correction des composantes de l'attraction. En intégrant par parties l'expression $\frac{\delta X}{x} - \frac{\delta Y}{y}$, on retrouve les résultats obtenus par M. Callandreau par la méthode classique. Il n'en est pas de même en intégrant les expressions (86) et (86′) séparées, car la définition des éléments intérieurs et extérieurs n'est pas la même dans les deux méthodes.

3. *Introduction de cette correction dans la formule de la vitesse de la rotation.* — En tenant compte de la déformation des surfaces ellipsoïdales, on a

$$x^2 + y^2 = (r + \delta r)^2 = r^2 + 2r\,\delta r = a^2\frac{1+\lambda^2}{1+\lambda^2\cos^2\theta} + 2a^2\gamma\lambda^4\sin^2\theta\cos^2\theta.$$

L'équation de la courbe méridienne devient en coordonnées cartésiennes (*géoïde théorique*)

$$(87) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2\gamma\lambda^4\frac{x^2y^2}{a^2b^2} = 1.$$

Les coefficients directeurs de la normale sont

$$\frac{x}{a^2}(1 - 2\gamma\lambda^4\sin^2\theta), \qquad \frac{y}{b^2}(1 - 2\gamma\lambda^4\cos^2\theta).$$

Leur rapport est égal à

$$\frac{x}{y}\frac{b^2}{a^2}\frac{1-2\gamma\lambda^4\sin^2\theta}{1-2\gamma\lambda^4\cos^2\theta} = \frac{x}{y}(1+\lambda^2)(1-2\gamma\lambda^4\sin^2\theta+2\gamma\lambda^4\cos^2\theta)$$
$$= \frac{x}{y}(1+\lambda^2+2\gamma\lambda^4\cos 2\theta).$$

La force devant être normale à la surface, le rapport de ses composantes est égal au rapport des coefficients de la normale, d'où l'on a

$$\frac{Y+\delta Y+\omega^2 y}{X+\delta X} = \frac{y}{x}\frac{1}{1+\lambda^2+2\gamma\lambda^4\cos 2\theta};$$

$$(88)\qquad \omega^2 = -\frac{Y}{y}+\frac{1}{1+\lambda^2}\frac{X}{x}-2\gamma\lambda^4\frac{X}{x}\cos 2\theta+\frac{\delta X}{x}-\frac{\delta Y}{y}.$$

Dans le terme en $\gamma\lambda^4$, on prendra simplement $\frac{X}{x} = -\frac{4}{3}\pi f D$ en négligeant λ^6.

En remplaçant $\sin^2\theta$ dans (79′) et $\cos^2\theta$ dans (86) et (86′) par $\cos 2\theta$, on a

$$(89)\qquad \frac{3\omega^2}{4\pi f} = \int_0^r \rho\, d\frac{1+\lambda^2}{1+\lambda_r^2}\frac{a^3}{r^3}\left(\lambda_r^2-\frac{3}{5}\beta^2-\frac{3}{4}\lambda_r^4+\frac{3}{10}\lambda_r^2\beta^2+\frac{3}{28}\beta^4\right)$$
$$+\int_r^1 \rho\, d\frac{1+\lambda^2}{1+\lambda_r^2}\left(\lambda_r^2-\frac{3}{5}\lambda^2-\frac{6}{5}\lambda_r^2\lambda^2+\frac{6}{7}\lambda^4\right)$$
$$+6\int_0^r -\rho'\gamma\lambda^4\left(\frac{1}{35}-\frac{1}{63}\frac{a^2}{r^2}\right)\frac{a^5}{r^5}\,da$$
$$+6\int_r^1 (\rho_1-\rho'\,da)\gamma\lambda^4\left(\frac{1}{35}-\frac{1}{63}\frac{r^2}{a^2}\right)$$
$$+\cos 2\theta\left[\frac{3}{4}A+2\gamma\lambda^4 D-\frac{2}{3}\int_0^r -\rho'\gamma\lambda^4\frac{a^7}{r^7}\,da\right.$$
$$\left.-\frac{2}{3}\int_r^1(\rho_1-\rho'\,da)\gamma\lambda^4\frac{r^2}{a^2}\right].$$

On peut simplifier cette expression. En effet l'équilibre permanent étant atteint et la masse tournant tout d'une pièce, l'expression doit être indépendante de θ. Le coefficient de $\cos 2\theta$ égalé à zéro donne donc une première relation qui détermine la valeur du terme de correction γ.

En multipliant ce coefficient nul de $\cos 2\theta$ par $\frac{4}{7}$ et le retranchant du

reste de l'équation (89), on obtiendra, après avoir intégré par parties les deux termes contenant $\gamma\lambda^4$ sous le signe $\int$

$$\frac{3\omega^2}{4\pi f} = \left(1-\frac{6}{7}\lambda_r^2\right)\int_0^r \rho\, d\frac{a^5}{r^3}\,\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda_r^2}\left(\lambda_r^2-\frac{3}{5}\frac{a^2}{r^2}\lambda^2\right)$$
$$-\frac{3}{5}\left(1-\frac{2}{3}\lambda_r^2\right)\int_r^1 \rho\, d\lambda^2\left(1-\frac{3}{7}\lambda^2\right)$$
$$-\frac{2}{7}\left(\frac{\gamma\lambda^4}{r^3}\int_0^r \rho\, da^5-\frac{3}{5}\frac{1}{r^5}\int_0^r \rho\, da^7\gamma\lambda^4-\frac{3}{5}\int_r^1 \rho\, d\gamma\lambda^4\right).$$

On voit que l'ensemble des termes en $\gamma\lambda^4$ est identique au second membre de l'équation de Clairaut (37), où λ^2 serait remplacé par $\gamma\lambda^4$. En représentant pour simplifier par λ^2 sa valeur corrigée $\lambda^2-\frac{2}{7}\gamma\lambda^4$, l'équation ci-dessus pourra s'écrire en négligeant λ^6

$$(90)\qquad \frac{3\omega^2}{4\pi f} = \left(1-\frac{6}{7}\lambda_r^2\right)\int_0^r \rho\, d\frac{a^5}{r^3}\,\frac{1+\lambda^2}{1+\lambda_r^2}\left(\lambda_r^2-\frac{3}{5}\frac{a^2}{r^2}\lambda^2\right)$$
$$-\frac{3}{5}\left(1-\frac{2}{3}\lambda_r^2\right)\int_r^1 \rho\, d\lambda^2\left(1-\frac{3}{7}\lambda^2\right).$$

Cette équation détermine la valeur de λ^2 et l'aplatissement en tenant compte de λ^4 et du terme de correction γ.

4. *Équation de Clairaut-Radau en seconde approximation.* — En divisant par $1-\frac{2}{3}\lambda_r^2$ et dérivant par rapport à r, on a

$$(91)\qquad r^5\lambda^2 D\left[3-\eta+\frac{5}{21}\lambda^2\eta(2+\eta)\right]-3\int_0^r \rho\, da^5(1+\lambda^2)\lambda^2-\frac{\omega^2}{2\pi f}r^5\lambda^2\eta = 0,$$

$$(92)\qquad D = \frac{1}{r^3}\int_0^r \rho\, da^3(1+\lambda^2) \quad (^1).$$

En dérivant de nouveau, posant $-\frac{rD'}{D}=\zeta$, divisant par $r^4 D\lambda^2$, on a

$$(5+\eta-\zeta)\left[3-\eta+\frac{5}{21}\lambda^2\eta(2+\eta)\right]-r\eta'+\frac{5}{21}\lambda^2[2r\eta'(1+\eta)+2\eta^2+\eta^3]$$
$$-3\frac{\rho}{D}(5+\eta+5\lambda^2+2\lambda^2\eta)+\frac{\omega^2}{2\pi f D}(5\eta+\eta^2+r\eta') = 0.$$

---

(1) Cette expression D devrait être divisée par $1+\lambda_r^2$ pour représenter exactement la densité moyenne. Mais cette forme est plus avantageuse, parce que plus simple pour les calculs (*voir* Callandreau, p. 40).

Or (92) donne

$$(92') \quad 3\rho\left(1+\lambda^2+\frac{1}{3}\lambda^2\eta\right)=3D+rD', \qquad 3\frac{\rho}{D}=(3-\zeta)\left(1-\lambda^2-\frac{1}{3}\lambda^2\eta\right).$$

On tient compte aussi de la première équation de Clairaut-Radau (48') pour éliminer $r\eta'$ dans les termes en λ^2; enfin on pose $\frac{3\omega^2}{4\pi f D}=\varphi$ et l'on obtient l'équation de Clairaut-Radau en λ^4

$$(93) \qquad r\eta'+\eta^2+5\eta-2\zeta(1+\eta)=\chi;$$

$$(94) \qquad \chi=\frac{1}{3}\varphi\zeta(1+\eta)+\frac{1}{21}\lambda^2\zeta(5+4\eta+2\eta^2)+\frac{2}{7}\lambda^2\eta(7+\eta).$$

Le terme de correction en λ^2 est toujours positif et toujours croissant avec φ, ζ, η, λ^2 du centre à la surface où sa valeur est maximum (¹).

Ce terme en λ^2 étant très petit ne modifie pas la discussion de l'équation sans second membre. En effet, on a d'abord pour $\eta=0$,

$$r\eta'=2\zeta\left(1+\frac{2}{3}\varphi+\frac{2}{21}\lambda^2\right), \qquad \eta'=-2\frac{D'}{D}\left(1+\frac{2}{3}\varphi+\frac{2}{21}\lambda^2\right).$$

η' est positif au centre et η y est nul et croissant. Or η ne peut pas ensuite devenir négatif, car on a toujours η' positif et η croissant quand $\eta=0$. On a donc, comme en première approximation,

$$\eta>0, \qquad \frac{r}{\lambda^2}\frac{d\lambda^2}{dr}>0, \qquad d\lambda^2>0 \qquad (\lambda^2 \text{ et } e \text{ croissants}).$$

η croissant ne peut décroître qu'en passant par un maximum qui exige $\eta''<0$ et $\eta'=0$. En dérivant (93) et faisant $\eta'=0$ et $\lambda^2=2e$

(¹) M. Callandreau avait laissé au terme de correction une forme beaucoup plus compliquée. G. H. Darwin, en reprenant les mêmes calculs avec une notation un peu différente [*The figure of the earth carried to the second order of small quantities* (*Monthly Notices of R. A. S.*, 1899, p. 93)], lui donne une forme d'apparence plus simple que (94), mais sans pouvoir démontrer que cette expression est toujours positive ou toujours croissante. Il fait remarquer au même endroit que M. Helmert émet des doutes sur la généralité de la preuve des limites de η. Cette preuve est étendue ici à la seconde approximation et, je crois, aussi rigoureuse que celle donnée en première approximation. Chap. III, § 2.

dans χ, on a

$$r\eta'' = 2\zeta'(1+\eta) + \chi',$$

$$\chi' = \frac{1}{3}(\varphi\zeta' + \varphi'\zeta)(1+\eta) + \frac{8}{21}(e'\zeta + e\zeta')(5 + 4\eta - 2\eta^2) + \frac{4}{7}e'\eta(7+\eta).$$

Or on a $\varphi' > 0$ et $e' > 0$. Si de plus $\zeta' > 0$, on a aussi $\chi' > 0$ et $\eta'' > 0$, par conséquent η n'aura pas de maximum et restera croissant dans les mêmes conditions qu'en première approximation.

D'autre part, en intégrant par parties l'intégrale de (91) et en simplifiant, on pourra encore l'écrire sous une forme analogue à (47″)

$$(\zeta - \eta) r^5 \lambda^2 D = 3\int_0^r - \rho' a^5 (1+\lambda^2)\lambda^2 \, da + \frac{1}{3} r^9 \lambda^4 D \eta \left(\zeta - \frac{20}{\lambda^2} - \frac{5}{7}\eta - \frac{31}{7}\right).$$

Dans le second membre, le terme de correction en λ^4 ne peut pas changer le signe du premier terme en λ^2, d'où l'on a $\zeta > \eta$. D'autre part, d'après (92′), $\zeta < 3$. On a donc encore ici, comme en première approximation, la formule fondamentale

$$0 < \eta < \zeta < 3.$$

En donnant à ζ sa valeur aux deux limites, η et 3, on voit que le champ de variation de $r\eta' - \chi$ en seconde approximation est le même que celui de $r\eta'$ en première approximation

$$\eta(\eta - 3) < r\eta' - \chi < (\eta + 2)(3 - \eta).$$

On aurait la même discussion et les mêmes conclusions.

En troisième et quatrième approximation les termes de correction seraient encore plus petits. La démonstration subsiste, *elle est générale*.

3. *Étude de l'équation définissant la déformation.* — Le coefficient de $\cos 2\theta$ égalé à 0 donne la relation

$$(95)\quad \frac{3}{4}\Lambda + 2\gamma\lambda^4 D - \frac{2}{3}\frac{1}{r^7}\int_0^r - \rho'\gamma\lambda^4 a^7 \, da - \frac{2}{3} r^2 \int_r^1 (\rho_1 - \rho' \, da)\frac{\gamma\lambda^4}{a^2} = 0.$$

On divise par r^2 et l'on dérive par rapport à r, on a

$$(95')\quad \frac{3}{4} r^7 (r\Lambda' - 2\Lambda) + 2r^7(3\rho - 5D)\gamma\lambda^4 + 2r^8 D(\gamma\lambda^4)' + 6\int_0^r - \rho'\gamma\lambda^4 a^7 \, da = 0.$$

On dérive de nouveau, en tenant compte de $\zeta D = -rD' = 3(D - \rho)$

$$2r^2 D(\gamma\lambda^4)'' + 12\rho(\gamma\lambda^4)' + 4(3\rho - 10D)\gamma\lambda^4 + \frac{3}{4}r(8A' + rA'') - \frac{3}{2}(7A + rA') = 0.$$

Les deux derniers termes ont déjà été calculés : (81), (82). On a enfin

$$(96) \qquad \begin{gathered} r^2(\gamma\lambda^4)'' + 2r(3 - \zeta)(\gamma\lambda^4)' - 2(7 + \zeta)\gamma\lambda^4 \\ + \frac{1}{4}\lambda^4 \{\zeta(4 + 6\eta + 3\eta^2) - 2\eta(5\eta + 7)\} = 0. \end{gathered}$$

Au centre $r = 0$, les deux derniers termes de (95) sont nuls, car

$$\rho_1 \frac{r^2}{a^2} = \rho_1 \frac{r^2}{r_1^2} = 0 \qquad \text{et} \qquad r^2 \int_r^1 -\rho' \frac{da}{a^2} = 0,$$

il reste

$$\gamma\lambda^4 = -\frac{3}{8}\frac{A}{D}.$$

$\gamma\lambda^4$ est donc nul au centre avec A, et du même ordre de petitesse que A. Il est ensuite négatif. Il commence donc par décroître. Il ne peut cesser de décroître qu'en passant par un minimum, c'est-à-dire $(\gamma\lambda^4)' = 0$ et $(\gamma\lambda^4)'' > 0$. Il restera toujours décroissant si $(\gamma\lambda^4)'' > 0$, c'est-à-dire

$$(97) \qquad \zeta(4 + 6\eta + 3\eta^2) - 2\eta(5\eta + 7) - 8(7 + \zeta)\gamma > 0.$$

Expression analogue à (83) qui détermine la variation de A.

Du moins γ restera toujours négatif. En effet supposons qu'il devienne positif et soit $r^4\gamma_r$ la valeur maximum et positive de $r^4\gamma$. On multiplie (95) par $\frac{r^4}{\lambda_r^4}$, on a

$$\frac{3}{4}\frac{r^4}{\lambda_r^4}A + 2r^4\gamma_r D - \frac{2}{3}\int_0^r -\rho' \frac{\lambda^4}{\lambda_r^4}\frac{a^3}{r^3}\gamma a^4\, da - \frac{2}{3}\int_r^1 (\rho_1 - \rho'\, da)\frac{\lambda^4}{a^6}\frac{r^6}{\lambda_r^4}\gamma a^4 = 0.$$

Or λ^2 croît. De 0 à r on a $\frac{\lambda^4}{\lambda_r^4} < 1$, donc $\frac{\lambda^4}{\lambda_r^4}\gamma a^4 < r^4\gamma_r$.

$\frac{\lambda^2}{a^3}$ décroît. De r à 1 on a $\frac{\lambda^4}{a^6}\frac{r^6}{\lambda_r^4} < 1$, donc $\frac{\lambda^4}{a^6}\frac{r^6}{\lambda_r^4}\gamma a^4 < r^4\gamma_r$. On obtient

$$\int_0^r -\rho' \frac{\lambda^4}{\lambda_r^4}\frac{a^3}{r^3}\gamma a^4\, da < r^4\gamma_r(D - \rho) \quad \text{et} \quad \int_r^1 (\rho_1 - \rho'\, da)\frac{\lambda^4}{a^6}\frac{r^6}{\lambda_r^4}\gamma a^4\, da < r^4\gamma_r\rho.$$

L'équation (95) deviendra alors

$$(98)\qquad \frac{3}{4}\frac{r^4}{\lambda_r^4}A + 2r^4\gamma_r D - \frac{2}{3}r^4\gamma_r D < 0, \qquad \frac{3}{4}\frac{r^4}{\lambda_r^4}A + \frac{4}{3}r^4\gamma_r D < 0.$$

Ce qui est impossible, les deux termes étant positifs. Donc γ reste toujours négatif, d'où le théorème dû à M. Callandreau :

Dans un fluide hétérogène en équilibre permanent, animé d'une rotation lente, toutes les surfaces de niveau sont des ellipsoïdes déprimés entre le pôle et l'équateur.

On peut obtenir plusieurs limites de γ. On a d'abord dans (95), γ étant toujours négatif,

$$\frac{3}{4}A + 2\gamma\lambda^4 D < 0, \qquad -\gamma > \frac{3}{8}\frac{A}{D\lambda^4}.$$

De plus à la surface en divisant par $D\lambda^4$, on aura

$$\frac{3}{8}\frac{A}{D\lambda^4} - \gamma\left(1 - \frac{1}{3}\frac{\rho_1}{D_1}\right) = \frac{1}{3D_1}\int_0^1 -\rho'\frac{\lambda^4}{\lambda_r^4}\gamma a^7\,da < 0.$$

Si de plus $-\gamma\lambda^4 a^4$, ou à plus forte raison si $-\gamma a^4$ est toujours croissant, ce qu'on peut admettre, ce qui a lieu pratiquement avec les différentes lois de densité, comme on le verra plus loin, on a

$$\frac{1}{3D_1}\int_0^1 -\rho'\frac{\lambda^4}{\lambda_r^4}\gamma a^7\,da > \frac{\gamma}{3D_1}\int_0^1 -\rho' a^3\,da = \frac{\gamma}{3}\left(1 - \frac{\rho_1}{D_1}\right).$$

Ces deux relations donnent à la surface la double inégalité

$$(99)\qquad \frac{6}{6+\xi}\,\frac{9}{16}\,\frac{A}{D\lambda^4} < -\gamma < \frac{9}{16}\,\frac{A}{D\lambda^4}.$$

En tenant compte de la limite déjà trouvée pour A (84), on a

$$(100)\qquad -\gamma < \frac{3}{40}\eta(2+\eta)\sqrt{1+\eta}.$$

Cette formule donne pour la Terre une dépression maximum de $10^{m},10$ à 45°. Nous verrons au Chapitre VII les limites pratiques plus étroites données par la formule (99): $1^{m},26 < \delta r < 4^{m},27$.

Pour Jupiter et Saturne $\eta_1 = 1,640$ et $1,586$, la dépression atteindrait au maximum 183^{km} et 552^{km}, ce qui ferait seulement $\frac{1}{1120}$ et $\frac{1}{3900}$ du rayon et le $\frac{1}{22,9}$ et $\frac{1}{12,3}$ de l'aplatissement.

6. *Application au problème de M. Poincaré, en tenant compte de λ^4 et de la déformation.* — L'équation complète (90) devient à la surface

$$(101)\qquad \frac{3\omega^2}{4\pi f}(1+\lambda_1^2) = \left(1-\frac{6}{7}\lambda_1^2\right)\lambda_1^2 D_1 - \frac{3}{5}\left(1-\frac{6}{7}\lambda_1^2\right)\int_0^1 \rho\, da^5(1+\lambda^2)\lambda^2.$$

Nous transformerons d'abord ω^2 en φ (y étant pris positivement)

$$\varphi = \frac{\omega^2 y}{Y-\omega^2 y} = \frac{\omega^2 y}{Y}\left(1+\frac{\omega^2 y}{Y}\cdots\right),\qquad \text{d'où}\qquad \frac{\omega^2 y}{Y} = \varphi(1-\varphi).$$

Pour un ellipsoïde homogène de révolution, on a à l'équateur

$$\begin{aligned}\frac{Y}{y} &= -2\pi f\rho\frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}\left(\operatorname{arc\,tang} l - \frac{l}{1+l^2}\right)\\ &= -\frac{4}{3}\pi f\rho(1+\lambda^2)\frac{a^3}{r^3}\left(1-\frac{3}{2}\lambda_r^2\right)\left(1+\frac{3}{10}\frac{a^2}{r^2}\lambda^2+\ldots\right).\end{aligned}$$

On obtiendra pour l'ellipsoïde hétérogène, par la méthode ordinaire et en tenant compte de la première approximation (64) dans le terme en λ^2,

$$\begin{aligned}\frac{Y}{y} &= -\frac{4}{3}\pi f\left(1-\frac{3}{2}\lambda_1^2\right)\left\{\int_0^1 \rho\, da^3(1+\lambda^2) + \frac{3}{10}\int_0^1 \rho\, da^5\lambda^2\right\}\\ &= -\frac{4}{3}\pi f D_1\left(1-\lambda_1^2-\frac{\varphi}{2}\right)\end{aligned}$$

et

$$\frac{3\omega^2}{4\pi f}(1+\lambda_1^2) = \frac{\omega^2 y}{Y}(1+\lambda_1^2)\left(1-\lambda_1^2-\frac{\varphi}{2}\right)D_1 = \varphi D_1\left(1-\frac{3\varphi}{2}\right),$$

en portant cette expression dans (101), on a

$$(102)\qquad (\lambda_1^2-\varphi)D_1 + 3\varphi\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{2}{7}\lambda_1^2\right)D_1 = \frac{3}{5}\int_0^1 \rho\, da^5(1+\lambda^2)\lambda^2.$$

Il faut ensuite exprimer l'intégrale de (101) en fonction de J et de l'équation de Clairaut-Radau, pour obtenir l'équation de condition. Nous suivrons la même marche qu'au Chapitre IV, en première approximation.

On a en général pour la somme des trois moments d'inertie suivant trois axes rectangulaires (ici $C = B$) et pour A

$$A + 2B = \frac{4\pi}{5}\int\int \rho\, dr^5\, d\mu. \qquad A = \frac{2\pi}{5}\int\int \rho(1 - \mu^2)\, dr^5\, d\mu.$$

Or ici r^5 est remplacé par $(r + \delta r)^5 = r^5 + 5r^4\delta r + \ldots$ et pour la couche de correction seule par

$$5r^4\delta r = 5r^5\gamma\lambda^4(1 - \mu^2)\mu^2,$$

il vient

$$(103) \qquad \delta(A - B) = \pi\int_0^r \rho\, dr^5\gamma\lambda^4\int_{-1}^{+1}(1 - 3\mu^2)(1 - \mu^2)\mu^2\, d\mu$$
$$= -\frac{2}{7}\,\frac{4\pi}{15}\int_0^r \rho\, dr^5\gamma\lambda^4.$$

Or d'après (65')

$$A - B = \frac{4\pi}{15}\int_0^r \rho\, da^5(1 + \lambda^2)\lambda^2.$$

On voit que cette formule contiendra le terme de correction précédent en $\gamma\lambda^4$ dans (103), en donnant à λ^2 la valeur $\lambda^2 - \frac{2}{7}\gamma\lambda^4$, comme dans l'équation complète (90).

L'équation (65) donnera alors (1)

$$(104) \qquad \int_0^r \rho\, da^5(1 + \lambda^2)\lambda^2 = 2J\int_0^r \rho\, da^5(1 + 2\lambda^2).$$

Or on a identiquement, d'après la valeur de D (92),

$$\int_0^a D\, da^5 + \int_0^a \rho a^5\, d\lambda^2 = \frac{5}{2}a^5 D - \frac{3}{2}\int_0^a \rho\, da^5(1 + \lambda^2).$$

On en déduit à la surface

$$(105) \quad 3\int_0^1 \rho\, da^5(1 + 2\lambda^2) = 5D - 2\int_0^1 D\, da^5 - 2\int_0^1 \rho a^5\, d\lambda^2 + 3\int_0^1 \rho\, da^5\lambda^2.$$

---

(1) Les équations (102) et (104) remplacent (64) et (66) de première approximation, qui donnaient e_2 et e_J.

On remplace le dernier terme en λ^2 par sa valeur (64). On représente par $(\lambda^2\eta)$ la valeur moyenne de $\lambda^2\eta$, d'où

$$\int_0^1 \rho\, a^5\, d\lambda^2 - \int_0^1 \rho\, a^5 \frac{\lambda^2\eta}{a}\, da = \frac{1}{5}(\lambda^2\eta)\int_0^1 \rho\, da^5 = \frac{1}{6}(\lambda^2\eta)(\lambda^2-\varphi)\frac{D}{J}.$$

Ces différentes valeurs (105), (104), (102) portées dans (101) donnent

$$\text{(106)}\qquad \varphi\left(1-\frac{3\varphi}{2}\right) = \left(1-\frac{6}{7}\lambda^2\right)\left(\lambda^2 - 2J + \frac{4}{5}\frac{J}{D}\int_0^1 D\, da^5\right) + \frac{2}{15}(\lambda^2\eta)(\lambda^2-\varphi) - 2J(\lambda^2-\varphi).$$

L'identité

$$\text{(68')}\qquad \left(r^5\sqrt{1+\eta}\,D\right)' = \frac{5r^4 D}{\sqrt{1+\eta}}\left(1+\eta+\frac{r\eta'}{10}+\frac{1+\eta}{5}\frac{rD'}{D}\right),$$

en tenant compte de $\zeta = -\frac{rD'}{D}$ et de l'équation de Clairaut-Radau complète (93) donnera, en intégrant de o à $r_1 = 1$,

$$D_1\sqrt{1+\eta_1} = \int_0^1 \frac{1+\frac{1}{2}\eta - \frac{1}{10}\eta^2 + \frac{1}{10}\chi}{\sqrt{1+\eta}} D\, da^5 = (K+\delta K)\int_0^1 D\, da^5;$$

K est la même fonction de MM. Radau et Poincaré qu'en première approximation; $\delta K = \frac{1}{10}\frac{\chi}{\sqrt{1+\eta}}$ est son accroissement. Désormais K, χ et η désigneront les valeurs moyennes définies par l'équation ci-dessus.

Or χ étant une expression en λ^2 et K étant égal à 1 dans les termes du second ordre, on aura

$$\frac{1}{D_1}\int_0^1 D\, da^5 = \frac{\sqrt{1+\eta_1}}{K}\left(1-\frac{\delta K}{K}\right) = \frac{\sqrt{1+\eta_1}}{K} - \delta K\sqrt{1+\eta_1}.$$

On porte cette valeur dans (106), on remarque

$$\frac{6}{7}\lambda^2\left(\lambda^2 - 2J + \frac{4}{5}J\frac{\sqrt{1+\eta_1}}{K}\right) = \frac{6}{7}\lambda^2\varphi,$$

en vertu de la première approximation (70). On obtient finalement en

négligeant λ^6

$$(107) \qquad \lambda^2 + \frac{4}{5} J \frac{\sqrt{1+\eta_1}}{K} = 2J + \varphi + \varepsilon,$$

$$\varepsilon = \frac{4}{5} J \,\delta K \sqrt{1+\eta_1} + 2\lambda^2\left(J + \frac{3}{7}\varphi\right) - 2J\varphi - \frac{3\varphi^2}{2} - \frac{2}{15}(\lambda^2\eta_1)(\lambda^2 - \varphi).$$

C'est l'équation de condition correspondant à (70), en première approximation et que doit vérifier λ^2, (ε terme de correction).

7. *Calculs numériques et résultats.* — Il faut d'abord calculer la nouvelle expression de η_1 en tenant compte de λ^4. On procède comme en première approximation.

En éliminant l'intégrale de (102) au moyen de (91), et en tenant compte dans le terme de correction de la valeur de η_1 en première approximation, on a facilement

$$(108) \qquad \eta_1 = 5\frac{\varphi}{\lambda_1^2} - 2 + \frac{9}{7}\varphi + \frac{5}{14}\varphi\eta_1 = \frac{5}{2}\frac{\varphi}{e} - 2 - \frac{\varphi}{14}\left(\frac{69}{2} - 5\eta_1\right),$$

η_1 est diminué d'environ

$$\varphi(2,5 - 0,1) = 2,4\,\varphi.$$

Nous désignerons désormais par η_1 la valeur principale calculée en première approximation. Il faudra donc dans (107) remplacer η_1 par la valeur voisine $\eta_1 + d\eta_1$ ou remplacer

$$\sqrt{1+\eta_1} \quad \text{par} \quad \sqrt{1+\eta_1} + \frac{1}{2}\frac{d\eta_1}{\sqrt{1+\eta_1}} = \sqrt{1+\eta_1} - \frac{\varphi}{28}\frac{1}{\sqrt{1+\eta_1}}\left(\frac{69}{2} - 5\eta_1\right).$$

D'autre part λ^2 est mis pour $\lambda^2 - \frac{2}{7}\gamma\lambda^4$ et l'on a $\lambda^2 = 2e + 3e^2 \ldots$. Remplaçons dans (107), λ^2 par cette valeur. Alors e sera mis pour $e - \frac{4}{7}\gamma e^2$ et $\frac{1}{e}$ pour $\frac{1}{e} + \frac{4}{7}\gamma$ et l'on aura

$$(109) \qquad e + \frac{2}{5} J \frac{\sqrt{1+\eta_1}}{K} = J + \frac{\varphi}{2} + \xi + \frac{1}{25} J\chi \frac{\sqrt{1+\eta_1}}{\sqrt{1+\eta_1}} - \frac{2}{15}(e\eta_1)(2e - \varphi),$$

où ξ est l'ensemble des termes de correction indépendants des

limites K_1 et K_m de K.

$$\xi = 2e\left(J + \frac{3}{7}\varphi\right) + \frac{1}{70}\frac{J\varphi}{\sqrt{1+\eta_1}}\left(\frac{69}{2} - 5\eta_1\right) - \frac{3}{2}e^2 - J\varphi - \frac{3}{4}\varphi^2.$$

Or en négligeant les termes du troisième ordre, le maximum de K a lieu pour $\eta = \frac{1}{3}$ comme en première approximation. D'autre part l'indéterminée $(e\eta)$ doit être prise minimum $(e\eta) = 0$, pour avoir la limite la plus basse. L'équation qui donne une des limites de e pour $K = K_m$ devient

$$(109') \qquad e + \frac{2}{5}J\frac{\sqrt{1+\eta_1}}{K_m} = J + \frac{\varphi}{2} + \xi + \frac{\sqrt{3}}{50}J\chi_m\sqrt{1+\eta_1},$$

χ_m est la valeur de χ où l'on a fait $\eta = \frac{1}{3}$ et $\zeta = \zeta_1$; $e = e_1$; valeurs maximums.

Pour la seconde limite $\eta = \eta_1$ il faut remplacer $\frac{1}{K_1}$ par $\frac{1}{K_1} - \frac{K_1'}{K_1^2}d\eta_1$ et donner à $(e\eta)$ sa valeur maximum calculée pour $\eta = \eta_1$. On a alors

$$e + \frac{2}{5}J\frac{\sqrt{2+\eta_1}}{K_1} = J + \frac{\varphi}{2} + \xi + \xi_1,$$

où

$$\xi_1 = \frac{1}{25}J\chi_1 - \frac{4}{15}\frac{3-\zeta_1}{\eta_1+5-\zeta_1}Je_1\eta_1 - \frac{J\varphi}{700}\frac{\eta_1(3\eta_1-1)}{\eta_1+1}\left(\frac{69}{2} - 5\eta_1\right).$$

On remarque tout d'abord que $e^3 = 0{,}000000038$ pour $\frac{1}{e} = 297$. On voit de plus par les calculs numériques que la huitième décimale n'influe que sur les 0,001 de l'inverse de l'aplatissement. En négligeant e^3 ou λ^6 on obtiendra donc les résultats avec cinq chiffres exacts au moins.

On trouve $J + \frac{\varphi}{2} = 0{,}00500919$ puis $\xi = -0{,}00001220$, valeur constante dans l'intervalle considéré. Pour le second cas où $\eta = \eta_1$ et $\zeta = \zeta_1$ constants, les calculs se font complètement sans indétermination et $\xi_1 = 0{,}00000204$. En calculant une série de valeurs du premier membre de 109′ on trouve comme solution dans ce cas $\frac{1}{e} = 297{,}428$. On a donc $\frac{1}{e} < 297{,}504$ en augmentant $\frac{1}{e}$ de $-\frac{1}{7}\gamma'$, calculé d'après (100).

En désignant par ξ_m la valeur du second terme de correction de (109′)

et calculant sa valeur pour différentes valeurs de ρ_1 (on a pris comme unité la huitième décimale), on obtient comme solutions les valeurs inscrites ci-dessous :

ρ_1.....	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0
ζ_m.....	0,00000465	442	419	397	374	352
$1:e$....	296,732	296,766	296,800	296,833	296,866	296,898

On a donc finalement pour limites extrêmes des valeurs qui satisfont à l'attraction et à la précession, en tenant compte de e^2,

$$296,732 < \frac{1}{e} < 297,504 \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{e} = 297,12 \pm 0,38.$$

Les valeurs sont presque les mêmes qu'en première approximation. Les limites sont seulement deux fois plus étendues. Mais alors la précision n'était qu'apparente, ici elle est moindre mais réelle.

Telles sont les limites où est renfermée à quelques dixièmes près la seule valeur possible de l'aplatissement qui puisse satisfaire à la fois aux conditions de la précession et à celles de l'attraction, dans l'hypothèse d'une Terre dont les parties posséderaient assez de jeu pour obéir aux différentes forces perturbatrices extérieures, comme l'établissent les expériences de Potsdam, et dont les surfaces de niveau auraient la même vitesse de rotation, ce qui n'est malheureusement établi par aucune expérience ni aucune démonstration *a priori*.

Si l'inverse de l'aplatissement s'éloigne tant soit peu en plus ou en moins de ces limites étroites, comme par exemple pour les nombres 292 ou 298, il faudra recourir à d'autres hypothèses, étude qui forme l'objet du Chapitre suivant.

Remarque. — Dans la formule (109) les quatre premiers termes sont identiquement les mêmes qu'en première approximation. Les trois autres sont des termes de correction : ξ a une valeur parfaitement déterminée; la valeur des deux autres χ et $(e\eta)$ est définie par les relations de la page 83. Si l'on y porte les valeurs obtenues en première approximation pour ρ et e, avec la loi de Lipschitz, les solutions des calculs numériques (Chap. IV, § 4) deviennent, pour $n = \frac{1}{2}$, 1, 2, 3,

$$\frac{1}{e} = 297,213 \qquad 297,179 \qquad 297,183 \qquad 297,207.$$

G. H. Darwin (Ouvrage cité, p. 119), au moyen de la formule de Roche, $n = 2$, et en tenant compte aussi de e^2, avait trouvé 296,4. Ce nombre est un peu faible.

Wiechert, avec une hypothèse plus simple d'un noyau et d'une écorce, trouve 297,3.

8. *Calcul de g en seconde approximation en tenant compte de λ^4.* — J'ai négligé ici la déformation de l'ellipsoïde et par conséquent les termes en $\gamma\lambda^4$ qui sont presque de l'ordre de e^3 [1]. On a alors les mêmes formules (73) et (74) établies en première approximation avec la condition (4). La valeur de l^2 d'après (78') donne

$$\frac{X}{x} = \frac{4}{3}\pi f \int_0^1 \rho\, da^3 (1+\lambda^2)\left[1 - \frac{3}{5}\beta^2 + \frac{3}{7}\beta^4 - \frac{3}{2}(\lambda_r^2 - \beta^2)\sin^2\theta \right.$$
$$+ \frac{3}{2}(\lambda_r^4 + \lambda_r^2\beta^2 - 2\beta^4)\sin^2\theta$$
$$\left. + \frac{3}{8}(\lambda_r^4 - 10\lambda_r^2\beta^2 + 9\beta^4)\sin^4\theta\right].$$

La valeur des termes en β^2 est donnée par (102), celle des termes en β^4 par (80) en fonction de A_1. On obtient

$$g = g_0\left[1 - \left(e - \frac{5}{2}\varphi\right)\sin^2\theta + e^2\left(\frac{25}{4}\frac{\varphi^2}{e^2} + \frac{26}{7}\frac{\varphi}{e} - \frac{5}{2} - \frac{3A_1}{D_1 e^2}\right)\sin^2\theta \right.$$
$$\left. + \frac{e^2}{2}\left(7 - 15\frac{\varphi}{e} + \frac{27}{4}\frac{A_1}{D_1 e^2}\right)\sin^4\theta\right].$$

$$g_0 = f\frac{M}{a^2}\left[1 - 2e + \varphi + e^2\left(4 - \frac{8}{7}\frac{\varphi}{e} - \frac{3}{2}\frac{\varphi^2}{e^2} + \frac{3}{7}\frac{A_1}{D_1 e^2}\right)\right].$$

Mais en appelant l la latitude géographique déterminée par la verticale, on aura d'après l'équation de la normale à l'ellipsoïde

$$\operatorname{tang} l = \frac{x}{y}\frac{b^2}{a^2} = (1+\lambda^2)\cot\theta,$$

d'où

$$\sin^2\theta = (1 + \lambda^2\sin^2 l + \ldots)\cos^2 l.$$

---

(1) L'indétermination introduite est $< 0{,}06$ et pratiquement égale à 0,03 sur l'inverse de l'aplatissement.

La valeur de g pourra alors s'écrire

$$g = g_0 \left[1 - \frac{5}{2} (\varphi - e - \mu e^2) \cos^2 l \right].$$

$$\mu = \left(\frac{25}{4} \frac{\varphi^2}{e^2} - \frac{9}{7} \frac{\varphi}{e} - \frac{1}{2} - \frac{3 A_1}{D_1 e^2} \right) + \left(\frac{27}{8} \frac{A_1}{D e^2} + \frac{3}{2} - \frac{5}{2} \frac{\varphi}{e} \right) \cos^2 l.$$

En faisant $A_1 = 0$, on a pour $1 : e = 292$ et $1 : e = 297$.

$$\mu = 4{,}605 - 1{,}031 \cos^2 l \qquad \text{et} \qquad \mu = 4{,}807 - 1{,}075 \cos^2 l.$$

En donnant à A_1 sa valeur maximum d'après (84), on a

$$\mu = 1{,}944 + 1{,}963 \cos^2 l \qquad \text{et} \qquad \mu = 1{,}834 + 2{,}268 \cos^2 l.$$

Les deux termes de μ auront des valeurs comprises entre ces valeurs extrêmes, suivant la valeur réelle de A_1. On peut remarquer du moins que μ reste compris entre 2 et 5.

Les calculs numériques du Chapitre VII, paragraphe **10**, montrent comment varie A_1 avec la loi des densités. Si l'on fait $\rho_1 = 2{,}6$ dans la formule de Roche, ou $\rho_1 = 2{,}75$ avec $n = 1$, on obtient, pour $292 < \frac{1}{e} < 297$,

$$(a) \qquad \begin{cases} 3{,}633 + 0{,}062 \cos^2 l < \mu < 3{,}835 + 0{,}018 \cos^2 l, \\ 3{,}603 + 0{,}096 \cos^2 l < \mu < 3{,}805 + 0{,}052 \cos^2 l. \end{cases}$$

Le terme en $\cos^2 l$ est très petit. Il en résulte donc que *pratiquement* pour la Terre, si la loi des densités est voisine de celle de Roche, μ doit être à peu près indépendant de $\cos^2 l$ et g de $\cos^4 l$.

M. Helmert avait donné, dans *Höhere Geodäsie* (t. II, p. 77), la formule de g en seconde approximation. En l'appliquant aux expériences sur le pendule, il trouve $1 : e = 298{,}3$, nombre un peu fort, et, en outre, il constate que le terme en $\cos^4 l$ doit être fait pratiquement nul. Il en avait conclu comme explication, au grand scandale de G. H. Darwin (Ouvrage cité, p. 82), que l'ellipsoïde devait être renflé et non déprimé vers 45°. Les calculs numériques indiqués ci-dessus montrent comment la loi des densités permet d'expliquer ce fait. En même temps ils légitiment *théoriquement* la formule expérimentale simplifiée de M. Helmert.

Si l'on compare la formule de g ci-dessus avec celle de première approximation ($\mu = 0$), on voit qu'en réalité cette dernière formule donnait, non pas e, mais $e(1 + \mu e)$, de sorte qu'on obtenait

$$\frac{1}{e(1+\mu e)} = \frac{1}{e}(1 - \mu e) = \frac{1}{e} - \mu \qquad \text{au lieu de} \qquad \frac{1}{e}.$$

Il faudrait donc augmenter de 3,6 à 3,8, d'après (a), l'inverse de l'aplatissement obtenu par l'ancienne formule de Clairaut. Le chiffre de Faye deviendrait 296,7 et rentrerait ainsi dans les limites déterminées plus haut. Dans le cas du pendule la correction introduite par les termes du second ordre est donc considérable, près de 4 unités.

CHAPITRE VI.

HYPOTHÈSES AUTRES QUE CELLE DE CLAIRAUT. TERRE SOLIDE ET VITESSE INTERNE VARIABLE.

On peut faire à propos de la Terre d'autres hypothèses que celle de Clairaut et se poser pour chacune d'elles le même problème que précédemment : quel est l'aplatissement qui concilie à la fois les données de la précession et celles de l'attraction. Nous nous en tiendrons à la première approximation en négligeant λ^4 ou e^2. On peut conclure, d'après l'étude du Chapitre précédent, que la vraie valeur n'en différera que de quelques dixièmes.

1. *Terre solide et solidifiée à l'état de vitesse uniforme.* — Si la vitesse et par conséquent la valeur de φ, au moment de la solidification, était la même que la vitesse superficielle actuelle, la même équation de condition (70) donnerait la même valeur $\frac{1}{e} = 297$, en négligeant les dixièmes.

Si la vitesse n'était pas la même, cette équation de condition s'appliquerait encore au moment de la solidification en donnant à ω, φ, η leurs valeurs à ce moment-là. La valeur de J n'a pas changé.

Or nous avons trouvé (72)

$$d\frac{1}{e} = 0,2\,d\,\frac{1}{\varphi} \qquad \text{ou} \qquad d\frac{1}{\varphi} = 5\,d\,\frac{1}{e}, \qquad \varphi = \frac{3\omega^2}{4\pi f D_1}.$$

La valeur de e solution de (70) varie dans le même sens que φ et que ω^2, mais moins vite (5 fois moins). Si donc la vitesse de rotation était plus grande au moment de la solidification il en était de même de φ et de e solution ; $\frac{1}{e}$ était plus petit.

Pour que la solution $\frac{1}{e} = 297$ descende à 292 par exemple (chiffre de Clarke et de Faye), il aurait fallu que la valeur de $\frac{1}{\varphi}$ fût de 25 unités plus petite ou 263,3. Avec le chiffre de Helmert : 298, elle aurait dû être de 5 unités plus grande : 293,3.

En prenant la formule (70), où l'on fait $K = 1$ pour simplifier, on obtient des valeurs plus exactes. Elles sont consignées dans le Tableau suivant où l'on a mis aussi les rapports de φ et de ω^2 au moment de la solidification avec leurs valeurs actuelles :

$\frac{1}{e} =$	292	293	294	295	296	297	298
$\frac{1}{\varphi} =$	266	270	274	278	283	288	293
$\frac{\varphi}{\varphi_1} =$	1,084	1,068	1,052	1,037	1,022	1,000	0,984
$\frac{\omega}{\omega_1} =$	1,041	1,033	1,026	1,019	1,011	1,000	0,992

Pour réaliser en vitesse uniforme un aplatissement superficiel de $\frac{1}{292}$ satisfaisant à la précession, il aurait fallu que la vitesse au moment de la solidification fût 0,041 plus grande que la vitesse actuelle. Le jour aurait dû être moins long qu'actuellement de 57^m environ. Pour réaliser un aplatissement de $\frac{1}{298}$ il aurait fallu que la vitesse fût 0,008 plus petite qu'actuellement. Le jour aurait été plus long de 11^m environ.

Comme cause explicative du retard dans le premier cas, de l'accélération dans le second, on aurait l'action des marées et la concentration due au refroidissement.

2. *Terre solide mais solidifiée progressivement avec vitesse variable, la vitesse superficielle restant la même.* — A la surface les équations en φ et J sont toujours applicables, car (64) et (66) ne supposent pas la vitesse constante. Mais pour établir l'équation de condition entre les deux au moyen de (69), il faut dans (68) introduire l'équation de Clairaut-Radau reliant η et ζ dans le cas de ω variable, équation (48), dont nous désignerons le second membre par σ.

Finalement l'équation de condition (70) est transformée en la suivante

$$(109'') \qquad e + \frac{2}{5}\mathrm{J}\,\frac{\sqrt{1+\eta_1}}{\mathrm{K} + \dfrac{1}{10}\,\dfrac{(\sigma)}{\sqrt{1+(\eta)}}} = \mathrm{J} + \frac{\varphi}{2},$$

où (σ) et (η) sont les valeurs moyennes analogues à celles de K et χ, et définies par les relations

$$\frac{(\sigma)}{\sqrt{1+(\eta)}}\int_0^1 \mathrm{D}\,da^5 = \int_0^1 \frac{\sigma}{\sqrt{1+\eta}}\,\mathrm{D}\,da^5, \qquad \sigma = \frac{3}{8\pi f}\,\frac{r^2(\omega^2)'' + 6r(\omega^2)'}{e\mathrm{D}}.$$

Voici les valeurs qu'il faut donner à σ pour concilier différentes valeurs de l'aplatissement avec les valeurs actuelles de $\frac{1}{\varphi} = 288,38$ et de $\frac{1}{\mathrm{J}} = 305,31$:

$\frac{1}{e}$ =	292	293	294	295	296	297	298
$\frac{\sigma}{\sqrt{1+\eta}}$ =	0,24	0,19	0,14	0,10	0,06	0,01	−0,03

Cette valeur moyenne de σ pourrait être réalisée par une infinité de lois différentes de ω^2, qui reste indéterminée. Faisons $(\omega^2)'' = \text{const.}$ ou $\omega^2 = \omega_0^2(1+\gamma r^2)$, d'où $(\omega^2)'' = 2\gamma\,\omega_0^2 = \frac{2\gamma\omega_1^2}{1+\gamma}$,

$$(110) \qquad \sigma = \frac{3\omega_1^2}{4\pi f}\,\frac{14\gamma}{1+\gamma}\,\frac{r^2}{e\mathrm{D}} \qquad \text{et} \qquad \sigma < 14\frac{\varphi}{e}\,\frac{\gamma}{1+\gamma},$$

car, d'après (50), $\frac{r^2}{e\mathrm{D}}$ et par conséquent σ sont toujours croissants, ce qui fournit la limite supérieure indiquée.

Or la valeur de σ croît à mesure que $\frac{1}{e}$ descend au-dessous de la valeur 297, d'après le Tableau ci-dessus; il en sera de même de γ d'après (110).

En résumé, si la Terre s'est solidifiée avec $\frac{1}{e} < 297$ et la même vitesse de rotation superficielle, la vitesse ne pouvait pas être partout la même au moment de la solidification et la loi des aplatissements intérieurs correspondrait à une loi de vitesses croissantes du centre à la surface et d'autant plus que $\frac{1}{e}$ s'éloignera davantage de 297.

Or les aplatissements suivent les mêmes lois que les vitesses. Ils décroîtront de la surface au centre plus vite que si la solidification avait eu lieu en vitesse uniforme.

C'est ce qui ressort avec évidence d'ailleurs de la formule générale (64) qui donne e

$$\int_0^1 \rho\, da^5 e = J \int_0^1 \rho\, da^5.$$

La valeur moyenne de e donnée par cette formule est et reste égale

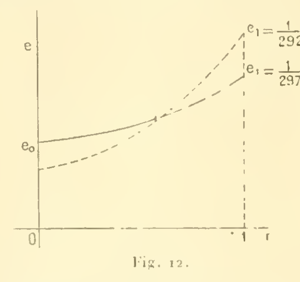


Fig. 12.

à J. Cela a lieu pour les aplatissements résultant d'une vitesse constante si $\frac{1}{e} = 297$. Si l'aplatissement est plus grand à la surface, il faut non seulement qu'ils diminuent à l'intérieur plus vite que ne l'exigerait une vitesse constante, mais encore qu'ils deviennent plus petits que ceux qui correspondent à $\frac{1}{e} = 297$ en vitesse constante (*fig.* 12).

On verra au Chapitre suivant les résultats des calculs numériques.

Pour expliquer cette répartition des aplatissements, il faudrait supposer que la solidification s'est faite progressivement du centre à la surface, en même temps que la vitesse, d'abord plus faible que la vitesse actuelle, allait elle-même en s'accélérant jusqu'à la valeur définitive. L'accélération de vitesse serait expliquée par la concentration due au refroidissement, mais la solidification débutant au centre reste peu plausible. D'autre part, en faisant commencer la solidification à la surface, on n'arriverait que très difficilement à réaliser la loi des aplatissements exigée par l'hypothèse. Il faudrait admettre une solidification brusque en vitesse variable.

5. *Masse fluide et surfaces de niveau à vitesse variable. Modification du coefficient de précession.* — Laplace (*Méc. cél.*, Livre V, nos 10-12) avait déjà démontré que les phénomènes de précession et de nutation n'étaient modifiés en rien par la fluidité de la mer. Hopkins (*Researches in physical Geology*, dans *Philosophical Transaction*, 1839, 1840, 1842), Hennessy (*idem*, 1851), Thomson (*idem*, 1863, et Mémoire *On the rigidity of the earth* et *Treatise on natural Philosophy*, no 847, 848), G. H. Darwin (*On the precession of a viscous spheroid*, dans *Phil. Trans.*, 1879), S. Oppenheim (*Rotation und Präcession eines flüssigen Sphäroid*, dans *Astron. Nachrichten*, 1885, no 2701), enfin et surtout M. Poincaré d'une façon complète dans le *Bulletin astronomique* de septembre 1910, ont démontré que le phénomène de précession du moins n'était aucunement modifié par l'hypothèse d'une Terre complètement solide ou liquide, ou bien d'un noyau liquide entouré d'une écorce solide, rigide ou élastique.

La valeur du rapport des moments d'inertie J déduit du phénomène de la précession est donc indépendant de toute hypothèse sur la fluidité, rigidité ou élasticité du globe terrestre. Mais les calculs ont toujours été faits dans l'hypothèse où la masse entière tournerait d'un seul bloc avec une vitesse de rotation uniforme. Il faut reprendre rapidement la théorie de la précession pour étudier la correction à introduire dans la valeur de J avec l'hypothèse d'une vitesse de rotation variable sur les différentes surfaces de niveau.

Le phénomène de la précession (déplacement du point γ ou

rotation de l'axe de l'équateur autour de celui de l'écliptique) est un phénomène dont la valeur est déterminée et mesurée par les termes séculaires du développement de la fonction perturbatrice U dans le mouvement de la Terre

$$U = f\int\int\frac{dm\,dm_1}{r},$$

intégrale qui doit être étendue à tous les points de la Terre et des astres perturbateurs, r étant la distance des centres de gravité respectifs, θ, φ, ψ étant les variables de signification connue, θ l'angle des deux plans (équateur et écliptique), φ et ψ les arcs comptés respectivement sur l'équateur et sur l'écliptique. On obtiendra les équations du mouvement en portant $\frac{\partial U}{\partial \theta}$, $\frac{\partial U}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial U}{\partial \psi}$ dans les équations de Lagrange. Or en développant on obtient ([1])

$$(111) \qquad U = f\left(\frac{m}{r} + \frac{A+B+C-3I}{2r^3}\right)\int dm_1 = C_0 - \frac{3}{2}f\frac{M}{r^3}I,$$

C_0 étant indépendant de θ, φ, ψ, M étant la masse de l'astre perturbateur et I le moment d'inertie de l'astre troublé, autour du rayon vecteur joignant les deux astres. Si le corps troublé est de révolution $B = C$ et l'on aura

$$(112) \qquad U = C' - \frac{3}{2}f(A - B)\frac{M}{r^3}\frac{x^2}{r^2}, \qquad I = A\frac{x^2}{r^2} + B\frac{y^2}{r^2} + C\frac{z^2}{r^2},$$

C' étant une nouvelle constante. On obtient pour le Soleil et pour la Lune, en ne conservant que les termes principaux indépendants de i^2

$$(113) \qquad \frac{x^2}{r^2} = \frac{1}{2}\sin^2\theta[1 - \cos 2(mt + \psi)],$$

$$\frac{x'^2}{r'^2} = \frac{1}{2}\sin^2\theta[1 - \cos 2(m't + \psi) + i\sin\theta\cos\theta\cos(N' + \psi)].$$

On voit que U est indépendant de φ. Les équations de Lagrange avec $B = C$ donnent $\omega = \text{const.}$ La précession n'altère pas la vitesse de rotation ([2]).

([1]) Tisserand, *Méc. cél.*, t. I, p. 61.

([2]) *Idem.*, t. II, p. 392 et 409.

En transformant les équations de Lagrange en un système canonique, on en déduit

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{A\omega \sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \psi}, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{A\omega \sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \theta};$$

si l'on ne considère dans les $\frac{x^2}{r^2}$ que les termes où le temps n'est pas périodique, les seuls dont dépende la précession, on a

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \psi}\right)_p = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)_p = 0, \qquad \theta_p = \theta_0.$$

Le phénomène de précession ne modifie pas l'obliquité moyenne de l'équateur sur l'écliptique. On aura ensuite

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \theta}\right)_p = -\frac{3}{2}f\left(\frac{M}{r^3} + \frac{M'}{r'^3}\right)(A - B)\sin\theta\cos\theta,$$

d'où

$$(114) \qquad \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)_p = \frac{3}{2}f\left(\frac{M}{r^3} + \frac{M'}{r'^3}\right)\frac{A - B}{A}\frac{\cos\theta}{\omega} = h\frac{J}{\omega}\cos\theta.$$

Cette expression représente précisément le déplacement du point γ en fonction du temps. On voit qu'il dépend du rapport des moments d'inertie J, de la vitesse de rotation ω, et de l'inclinaison θ de l'équateur.

La même formule est applicable à une *couche ellipsoïdale* quelconque. D'autre part $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ est la vitesse de déplacement autour de l'axe de l'écliptique. En première approximation, en négligeant λ^4, la quantité de mouvement correspondante sera

$$(115) \qquad dA\frac{\partial \psi}{\partial t} = h(dA - dB)\frac{\cos\theta}{\omega}.$$

On aura pour la quantité de mouvement totale, en tenant compte de l'expression (65') des moments d'inertie, et négligeant λ^4,

$$(116) \qquad \frac{8\pi}{15}\int_0^1 \rho\frac{\partial \psi}{\partial t}da^5 = \frac{4\pi}{15}h\int_0^1 \rho\frac{\cos\theta}{\omega}da^5\lambda^2.$$

Or la valeur de J a été obtenue au moyen de la formule (114) où l'on a supposé ω et θ constants. En identifiant (116) avec (114) multipliée

par A (conservation des quantités de mouvement), on a

$$\mathrm{J}\,\mathrm{A}\,\frac{\cos\theta_1}{\omega_1} = \frac{4\pi}{15}\int_0^1 \rho\,\frac{\cos\theta}{\omega}\,da^5\lambda^2 \qquad \text{ou} \qquad 2\,\mathrm{J}\,\frac{\cos\theta_1}{\omega_1}\int_0^1 \rho\,da^5 = \int_0^1 \rho\,\frac{\cos\theta}{\omega}\,da^5\lambda^2.$$

Enfin si l'on suppose que toutes les couches ont le même axe de rotation (θ constant) il vient

$$(117) \qquad 2\,\mathrm{J}\int_0^1 \rho\,da^5 = \omega_1\int_0^1 \frac{\rho}{\omega}\,da^5\lambda^2.$$

C'est la relation qui doit remplacer (66) dans l'hypothèse de surfaces de niveau animées de vitesses variables.

En représentant par (ω) la valeur moyenne de ω dans (117), on aura en combinant avec (64)

$$2\,\mathrm{J}\int_0^1 \rho\,da^5 = \frac{\omega_1}{(\omega)}\int_0^1 \rho\,da^5\lambda^2 = \frac{5}{3}\,\frac{\omega_1}{(\omega)}(\lambda^2 - \varphi)\,\mathrm{D}_1.$$

La valeur du premier membre est constante et l'on a vu que $\frac{\lambda^2}{2} = e = \frac{1}{297}$ pour $\omega = (\omega) = \omega_1 = \text{const.}$ Si nous donnons à $\frac{\lambda^2}{2}$ ou à e une valeur plus grande que $\frac{1}{297}$, il faut également donner à (ω) une valeur plus grande que celle de ω_1, et par conséquent admettre que la vitesse des couches intérieures augmente de la surface au centre. Pour $\frac{1}{e} = 298$ ce serait le contraire. On aura le Tableau suivant :

$\frac{1}{e} =$	292	293	294	295	296	297	298
$\frac{(\omega)}{\omega_1} =$	1,036	1,028	1,021	1,014	1,007	1,000	0,993

Si ω est toujours décroissant on aura $\omega_0 > (\omega) > \omega_1$.

Avec la formule de Lipschitz on trouvera au Chapitre suivant par calculs numériques pour

$$\frac{1}{e} = 292, \qquad \omega^2 = \frac{\omega_1^2}{0,857}(1 - 0,143\,r^2), \qquad \omega_0 = 1,16\,\omega_1.$$

L'équation de condition correspondant au problème de M. Poincaré sera modifiée en conséquence.

D'après (117) la valeur numérique du rapport des moments d'inertie J doit être remplacée par $J\frac{(\omega)}{\omega_1}$. D'autre part la fonction K devra être complétée, comme dans le cas précédent, par le second membre de l'équation de Clairaut-Radau avec vitesse variable. On aura finalement pour l'équation de condition (70) la nouvelle expression

$$(118) \qquad e + \frac{2}{5}J\frac{(\omega)}{\omega_1}\frac{\sqrt{1+\eta_1}}{K + \frac{1}{10}\frac{(\sigma)}{\sqrt{1+(\eta)}}} = J\frac{(\omega)}{\omega_1} + \frac{5}{2},$$

qui traduit le cas général de vitesses intérieures quelconques.

4. *Ralentissement de l'écorce dû au frottement des marées.* — La rotation moins rapide de l'écorce dans cette hypothèse s'expliquerait simplement par le frottement des marées agissant comme un frein à la surface.

D'ailleurs l'action de ralentissement due aux marées est un fait. Il s'agit de savoir de quel ordre est la grandeur du phénomène et s'il est capable de produire la différence de vitesse exigée par l'hypothèse.

Les expériences de Hagen et Poiseuille, confirmées par les déductions théoriques de Stockes, Neumann et Hagenbach [1] sur le frottement dans les tuyaux indiquent que le frottement, au voisinage d'une paroi solide et pour de faibles vitesses, est proportionnel au coefficient de viscosité du liquide, à la surface de contact et à la vitesse relative des deux couches $f = \varepsilon S\frac{dv}{dr}$.

Le rayon du tube étant pris pour unité, la loi des vitesses à l'intérieur est $v = v_0(1 - r^2)$, formule analogue à celle de $(\omega^2)'' =$ const. étudiée plus haut.

Sur les différents parallèles d'une même surface de niveau considérée comme sphérique, on aura

$$v = \omega r_1, \qquad \frac{dv}{dr} = r_1\frac{d\omega}{dr}.$$

La surface d'une zone élémentaire comprise entre deux parallèles

---

[1] Voir *Annuaire du Bureau des Longitudes : Frottement dans les liquides.*

sera $S = 2\pi r_1\,dx$ (voir *fig.* 13). La résistance totale due au frottement de deux surfaces de niveau l'une sur l'autre sera donc

$$F = 4\pi r\varepsilon\frac{d\omega}{dr}\int_0^r r_1\,dx = 2\pi^2 r^3\varepsilon\frac{d\omega}{dr} = -2\pi^2\frac{\gamma\varepsilon\omega_1}{\sqrt{1-\gamma}}r^3;$$

avec

$$\omega^2 = \omega_0^2(1-\gamma r^2),$$

on a

$$\frac{d\omega}{dr} = -\frac{\gamma\omega_1}{\sqrt{1-\gamma}}$$

vers la surface.

D'autre part, en appelant m la masse de l'écorce, x son épaisseur supposée assez petite, I son moment d'inertie, M la masse totale, on pourra écrire

$$m = 4\pi\rho_1 R^2 x, \qquad I = \frac{2}{3}mR^2 = 2MR^2\frac{\rho_1}{D_1}\frac{x}{R}.$$

Enfin l'équation du mouvement s'écrira à la surface

$$F = I\frac{d\omega}{dt}, \qquad -2\pi^2\frac{\gamma\varepsilon\omega_1}{\sqrt{1-\gamma}}R = 2M\frac{\rho_1}{D_1}\frac{x}{R}\frac{d\omega}{dt}.$$

L'accélération séculaire du mouvement de la Lune, réaction du frottement des marées, permettrait de conclure à une augmentation du jour de $0^s,000012$ par an (¹). En représentant ce nombre par α on a

$$\omega + \frac{d\omega}{dt} = \frac{2\pi}{86\,400+\alpha}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{d\omega}{dt} = -\frac{\alpha\omega_1}{86\,400}.$$

En C. G. S. on a $M = 6,5 \times 10^{27}$, $R = 6,378 \times 10^8$. En donnant à γ la valeur du paragraphe précédent dans l'hypothèse $\frac{1}{e} = 292$, on trouve $\varepsilon = 1,7 \times 10^8$ environ. Or pour la poix à 6° on a $\varepsilon = 2,2 \times 10^9$. Si donc au niveau de séparation du noyau et de l'écorce la viscosité est de l'ordre de celle de la poix, le ralentissement de l'écorce dû aux marées peut produire une variation de vitesse intérieure suffisante pour rendre possible un aplatissement descendant jusqu'à $\frac{1}{292}$ et

(¹) TISSERAND, *Méc. cél.*, t. II, p. 540. Ce chiffre est discuté, mais il pourrait être divisé par 2 ou 3 sans modifier sensiblement les conclusions.

s'accordant à la fois avec les données de l'attraction et celles de la précession, avec φ et J.

Du moins nous ne connaissons rien sur cette viscosité interne. C'est une simple possibilité. L'hypothèse n'est pas absurde.

De plus, si une différence de vitesse s'établit entre le noyau et l'écorce, elle ne peut s'éteindre que très lentement, de proche en proche par frottement et diffusion. Helmoltz avait déjà calculé qu'il faudrait des milliers d'années dans l'air pour que par simple frottement et diffusion, une différence de vitesse à la surface se transmette réduite de moitié à la limite de l'atmosphère (¹). Un calcul analogue montre qu'ici il faudrait des millions d'années pour que cette différence de vitesse se transmette au centre réduite de moitié.

D'ailleurs le ralentissement de l'écorce est continu. L'accroissement des vitesses en profondeur doit l'être aussi dans un noyau fluide sans jamais arriver à atteindre l'équilibre permanent. Mais la grandeur de l'effet dépendra de la viscosité qui est inconnue.

Pour avoir $\frac{1}{e} = 298 > 297$ à la surface, il faudrait au contraire que les vitesses intérieures soient un peu plus faibles que celle de l'écorce. Ceci pourrait s'expliquer par la contraction due au refroidissement, qui, si elle était sensible, accroîtrait la vitesse de l'écorce plus que celle des couches intérieures. Mais l'accroissement du jour, s'il est réel, et l'action de freinage des marées prouveraient que la vitesse de l'écorce doit plutôt diminuer. Il faudrait alors que la vitesse des couches intérieures diminue encore plus vite (on ne voit de cela aucun phénomène explicatif), ou bien que cette vitesse intérieure ait toujours été plus faible depuis la formation de la Terre, depuis des millions d'années, sans que le frottement ait pu encore uniformiser ces vitesses, sans que l'action des marées ait pu encore abaisser la vitesse de l'écorce au-dessous de la vitesse des couches intérieures.

5. *Précession d'un anneau fluide tournant suivant un parallèle. Zones de compression maximum de l'écorce à 35°. Une cause de tremblements de terre.* — La déviation due à la précession et à la nutation n'est pas la même sur tous les parallèles d'une même surface

(¹) *Voir* par exemple B. BRUNHES, *La dégradation de l'énergie*, p. 142.

de niveau. Il suffit d'étudier cette action sur un anneau fluide formant un parallèle quelconque, et considéré comme tournant tout d'une pièce en vertu de la rigidité gyrostatique.

Soit O′ le centre de cet anneau de rayon $O'A = r_1$, T le centre de la Terre (*fig.* 13), Tx son axe de rotation, Ty la trace du plan de

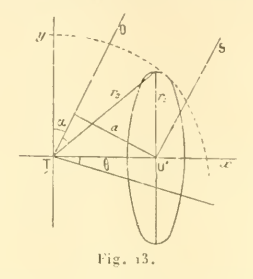


Fig. 13.

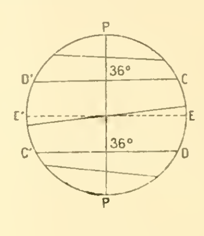


Fig. 14.

l'équateur, TO la trace du plan de l'écliptique sur xTy. En appelant I et I_1 les moments d'inertie de l'anneau autour de OT et de O′S, on a $I = I_1 + ma^2$. Or d'après (112)

$$I_1 = (A - B)\frac{x^2}{r^2} = \frac{1}{2} m r_1^2 \frac{x^2}{r^2}, \qquad a^2 = \overline{O'T}^2 \cos^2\alpha = \overline{O'T}^2\left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right),$$

d'où

$$I = m\left(\frac{3}{2} r_1^2 - r_2^2\right)\frac{x^2}{r^2} + m\overline{O'T}^2.$$

Or les formules (111), (113) et suivantes s'appliquent identiquement comme dans le cas précédent et donnent de même avec $C = mr_1^2$ et l étant la latitude

$$(114') \quad \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_p = \frac{3}{2} f\left(\frac{M}{r^3} + \frac{M'}{r'^3}\right)\left(\frac{3}{2} - \frac{r_2^2}{r_1^2}\right)\frac{\cos\theta}{\omega} = h\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{\cos^2 l}\right)\frac{\cos\theta}{\omega}.$$

On en déduit que la déviation de l'axe de rotation d'un anneau fluide, tournant suivant un parallèle, est maximum à l'équateur, puis toujours décroissante. Elle s'annule sur le parallèle de 35° où $\cos^2 l = \frac{2}{3}$ et change ensuite de sens. Si l'on désigne par ψ'_e sa valeur à l'équateur, par ψ'_m la valeur moyenne de celle de la surface de niveau supposée solidifiée ($J = e$ pour une couche élémentaire), on

aura

$$\psi' = \frac{3}{2} h \left(1 - \frac{2}{3\cos^2 l}\right) \frac{\cos\theta}{\omega} = \psi'_e \left(1 - \frac{2}{3\cos^2 l}\right).$$

$$\psi'_m = h \frac{e}{\omega} \cos\theta, \qquad \psi'_e = \frac{3}{2e} \psi'_m.$$

A la surface de la Terre la tendance à la déviation serait à l'équateur près de 450 fois plus grande que la déviation moyenne, laquelle serait sensiblement égale à la déviation de l'ensemble ou 50″ par an. Elle y produirait une accélération tangentielle, dans le sens du méridien, de 4^{cm} par seconde, pressant les couches superficielles l'une contre l'autre avec une force égale au $\frac{4}{1000}$ de leur poids environ, $\frac{4}{981} = 0,0041\ldots$ Cette pression latérale va diminuant en latitude suivant la formule (114′), jusqu'à 35°, ou elle s'annule et change de signe.

Dans le cours d'une rotation de 24 heures, les différents parallèles tendront donc à se comprimer sur celui de 35° en deux points diamétralement opposés, puis 12 heures après à s'en éloigner. Il y aura compression et dilatation successive tout le long des deux parallèles de 35° (*fig.* 14). Ces pressions latérales convergentes se traduiront aussi par une résultante dirigée suivant le rayon vecteur, comme une onde de marée diurne. Les parallèles de 35° seront ainsi des zones de fracture et de dislocation de l'écorce (exactement 35°15′52″) [1].

Il suffit de faire remarquer que ce parallèle de 35° passe par San-Francisco, le Haut-Mexique, Lisbonne, la Sicile, la Calabre, la Perse, le Japon, qui est bien une ligne privilégiée de tremblements de terre. Dans l'hémisphère sud, ce parallèle se trouve en plein océan, sauf les pointes de continent : Le Cap, Melbourne, Buenos-Ayres.

Remarque. — On peut d'ailleurs, à titre de vérification, au moyen de la formule (114′) donnant la précession d'un anneau, retrouver celles qui donnent la précession d'une couche élémentaire ou d'un solide quelconque.

En effet, multiplions les deux membres de (114) par $mr_1^2 = A$, nous

(1) Ce sont d'ailleurs les cercles où la sphère de même volume coupe l'ellipsoïde, donc aussi les lignes *fixes* ou *s'articule* l'ellipsoïde s'il se déforme.

les transformons en une expression de quantité de mouvement

$$(a) \qquad m r_1' \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{3}{2} f m \left(\frac{M}{r^3} + \frac{M'}{r'^3} \right) \left(\frac{3}{2} r_1^2 - r_2^2 \right) \frac{\cos \theta}{\omega}.$$

Mais on a ici $m = 2\pi\rho r_1 ds$. En portant cette valeur dans (a) et en intégrant de manière à sommer tous les anneaux parallèles d'une couche, situés entre le pôle et l'équateur, on obtiendra la précession de la couche entière. Le premier membre sera $A\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)_p$.

Si l'on considère une couche sphérique $x^2 + r_1^2 = r_2^2$, on trouve que l'intégrale du second membre s'annule. La précession est nulle.

Si l'on considère une couche elliptique, on a $x^2 + y^2 = a^2 + y^2\lambda^2$ ou $r_2^2 = a^2 + r_1^2\lambda^2$. On trouve, en négligeant λ^4,

$$A\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)_p = \frac{3}{2} f \left(\frac{M}{r^3} + \frac{M'}{r'^3} \right) A \frac{\lambda^2}{2} \frac{\cos \theta}{\omega} = h A \frac{J}{\omega} \cos \theta,$$

car ici

$$\frac{\lambda^2}{2} = e = \frac{A - B}{A} = J.$$

C'est précisément la formule (114).

On retrouve donc en même temps ce théorème que la précession moyenne d'une couche ellipsoïdale ou d'un ellipsoïde fluide est la même que celle d'un ellipsoïde solide, en considérant seulement chaque filet fluide comme rigide.

Mais la précession définie plus haut ne donne que la rotation moyenne de l'axe de l'équateur autour de celui de l'écliptique, indépendante des termes périodiques.

Reprenons l'expression de la fonction perturbatrice

$$U = \frac{3}{2} f (A - B) \frac{x^2}{r^2} = \frac{3}{2} f (A - B) \cos^2 l',$$

elle est proportionnelle au carré de la latitude l' de l'astre troublant. Considérons d'autre part la déviation $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ produite à un instant donné où l'astre perturbateur sera considéré comme fixe ; alors

$$\frac{\partial U}{\partial \psi} = 0, \qquad \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0,$$

et il reste

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{1}{A\omega\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\theta}.$$

Or, les expressions (113) peuvent s'écrire

$$\frac{x^2}{r^2} = \sin^2\theta\sin^2\mathcal{L}, \qquad \frac{x'^2}{r'^2} = \sin^2\theta\sin^2\mathcal{L}' + \sin^3\theta\cos\theta\cos N',$$

en désignant par $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}'$, N' les latitudes comptées à partir du point γ, du Soleil, de la Lune et du nœud descendant de la Lune. On aura, en prenant $\frac{\partial U}{\partial\theta}$,

$$(119)\quad \frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{3}{2}f\left(1 - \frac{2}{3\cos^2 l}\right)\left(\frac{M}{r^3}\sin^2\mathcal{L} + \frac{M'}{r'^3}\sin^2\mathcal{L}' + i\frac{M'}{r'^3}\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta}\cos N'\right).$$

D'après cette formule, la déviation instantanée de l'axe de rotation sera donc soumise aux mêmes variations que la nutation elle-même. On y distinguera une ondulation mensuelle due à l'action de la Lune avec maximum semi-mensuel pour $\mathcal{L}' = \pm\frac{\pi}{2}$; une ondulation annuelle due au Soleil, maximum $\mathcal{L} = \pm\frac{\pi}{2}$ aux solstices; enfin une période de 18 ans $\frac{2}{3}$ due au déplacement des nœuds.

En prenant la masse de la Terre et son rayon comme unité, on obtient pour les coefficients :

$$\frac{M}{r^3} = 2{,}67\times10^{-8}, \quad \frac{M'}{r'^3} = 6{,}03\times10^{-8}, \quad i\frac{M'}{r'^3}\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta} = 0{,}392\times10^{-8}.$$

Il y a maximum quand le Soleil et la Lune sont en opposition ou en conjonction : maximum absolu tous les 18 ans $\frac{2}{3}$; alors la somme des coefficients égale 9,10. Le maximum semi-mensuel de conjonction ou d'opposition est le plus considérable, il atteint sa plus haute valeur aux solstices (valeur moitié plus grande), et son summum quand le nœud descendant coïncide avec γ.

Ces périodes de maximum seront des périodes de compression et de décompression maximum pour les différents parallèles de l'écorce solide, ce qui doit faciliter les glissements et le jeu des différents morceaux de la mosaïque superficielle.

Ce serait là, semble-t-il, une explication intéressante de la théorie de M. de Parville, théorie appuyée sur des statistiques de plusieurs

années, relevant la coïncidence de la fréquence des tremblements de terre avec les positions critiques du Soleil et de la Lune. Une vérification scientifique serait à reprendre avec les appareils sismiques nouveaux, car ce qui importe c'est plutôt la concordance et la localisation des secousses que leur importance, car dans un terrain préparé par des dislocations successives la moindre secousse peut être un désastre, comme on a vu des arbres résister à de terribles orages et s'abattre le lendemain sans cause apparente.

CHAPITRE VII.

CALCULS NUMÉRIQUES AU MOYEN DE LA FORMULE DE LIPSCHITZ APPLIQUÉS A LA TERRE.

Nous allons dans ce Chapitre reprendre tous les problèmes et toutes les hypothèses étudiées précédemment à un point de vue purement théorique et leur appliquer des calculs pratiques.

1. *Formule de Lipschitz* [1], $\rho = \rho_0(1 - \alpha r^n)$. — Cette formule est à la fois assez simple et assez souple pour permettre d'effectuer des calculs numériques complets et de les appliquer successivement aux différentes hypothèses, en modifiant convenablement les paramètres. La loi de Roche en est un cas particulier, $n = 2$.

Cette formule donne

$$\rho_1 = \rho_0(1 - \alpha), \qquad D_1 = \rho_0\left(1 - \frac{3\alpha}{n+3}\right). \tag{120}$$

Si l'on se donne ρ_1 et D_1, deux des trois paramètres de la formule sont déterminés, ρ_0 et α par exemple. En faisant varier n, on réalisera alors différentes lois de densités.

Pour $\alpha = 0$, on a $\rho_1 = \rho_0 = D_1$; il y a homogénéité. Pour $\alpha = 1$, on a $\rho_1 = 0$.

On a encore

$$\rho' = -\alpha n \rho_0 r^{n-1}, \qquad \rho'' = -\alpha n(n-1)\rho_0 r^{n-2}. \tag{121}$$

Pour $n = 1$, la variation des densités est linéaire.

[1] *Journal de Crelle*, t. LXII, 1863.

Pour $n > 1$, $\rho'' < 0$, la courbe des densités tourne sa concavité vers le bas. On a alors $\rho'_0 = 0$, la densité tend vers une limite au centre. Cette limite tend vers D_1 si n augmente indéfiniment.

Pour $n < 1$, $\rho'' > 0$, la courbe tourne sa concavité vers le haut, $\rho'_0 = \infty$. L'accroissement des densités est de plus en plus rapide vers le centre. Il y a concentration d'autant plus prononcée que n est plus voisin de 0.

On obtient facilement les formules

$$(122) \qquad \alpha = 1 - \frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{\zeta}{3}\frac{n+3}{n+\zeta} \qquad \text{où} \qquad \zeta = 3\left(1 - \frac{\rho_1}{D_1}\right),$$

$$(123) \qquad \frac{\rho_0}{D_1} = 1 + \frac{\zeta}{n}, \qquad \frac{F_1}{D_1} = \frac{1}{D_1}\int_0^1 \rho\, dr^5 = 1 - \frac{2}{3}\frac{\zeta}{n+5},$$

qui donnent α, ρ_0, F_1, en fonction de ζ et de n. Pour chaque valeur de n on donnera à ζ une série de valeurs telles que $2 < \rho_1 < 3$ ou réciproquement; la valeur de ρ sera parfaitement définie et l'on pourra l'introduire dans les différentes formules étudiées précédemment pour en faire l'application pratique.

Tous les calculs numériques ont été faits avec la valeur $D_1 = 5{,}56$; en adoptant la nouvelle valeur donnée par l'*Annuaire*, $D_1 = 5{,}5$, il suffira de corriger les valeurs de ρ_1 en les multipliant par $\frac{5{,}56}{5{,}5} = 1{,}0109$. D'ailleurs les valeurs de α, ρ_0, F_1, et toutes celles qu'on en déduira, ne dépendent que de ζ, c'est-à-dire du seul rapport $\frac{\rho_1}{D_1}$ et non de la valeur absolue de ρ_1 ou D_1.

2. *Limites de e_0, ρ_0, n.* — La formule (66)

$$\int_0^1 \rho\, dr^5 e = J \int_0^1 \rho\, dr^5$$

donne, puisque e est croissant,

$$e_0 < J < e_1, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{1}{e_0} > 305{,}31.$$

La formule (51′) devient au centre

$$(124) \qquad e_0 = \frac{5}{4}\varphi\frac{D_1}{\rho_0} + \frac{3J}{2\rho_0}\int_0^1 \rho\, de,$$

or $de > 0$, d'où [1]

(124') $$e_0 > \frac{5}{4}\varphi\frac{D_1}{\rho_0}, \qquad \rho_0 > \frac{5}{4}\frac{\varphi}{e_0}D_1.$$

Comme on a aussi

(a) $$\rho_1(e_1 - e_0) < \int_0^1 \rho\, de < \rho_0(e_1 - e_0),$$

on en déduit en portant la première inégalité dans (124) ,

(125) $$\rho_0 > \frac{5}{4}\frac{\varphi}{e_1}D_1\frac{e_1}{e_0} + \frac{3}{2}\rho_1\left(\frac{e_1}{e_0} - 1\right).$$

En faisant $e_0 = e_1$, on obtient (124') indiquée par Stieljes, et la limite $\rho_0 > 7,07$.

En faisant $e_0 = J$, on obtient plus simplement une limite plus resserrée

(126) $$\rho_0 > \frac{5}{4}\frac{\varphi}{J}D_1 + \frac{3}{2}\rho_1\left(\frac{e}{J} - 1\right).$$

En dehors de toute hypothèse sur ρ_1 et e, c'est-à-dire en ne tenant compte que du premier terme, on a $\rho_0 > 7,358$. Le minimum déterminé par Stieljes et basé sur les valeurs de F_1, formule (123), et de ρ_1, donnait seulement $\rho_0 > 7,3$ pour $n = 2$.

J'ai calculé, d'après cette formule (126), les minimums et les maximums qu'on en déduit pour n, d'après (123), dans les deux cas : $\frac{1}{e} = 297$ et $\frac{1}{e} = 292$.

	ρ_1.	2,0.	2,2.	2,4.	2,6.	2,8.	3,0.
$\frac{1}{e} = 297$	$\rho_0 >$	7,442	7,450	7,459	7,463	7,467	7,476
	$n <$	5,95	5,33	4,99	4,66	4,33	3,99
$\frac{1}{e} = 292$	$\rho_0 >$	7,496	7,510	7,524	7,537	7,551	7,565
	$n <$	5,52	5,17	4,84	4,49	4,16	3,83

Il suffira donc de considérer $0 < n < 6$ pour la Terre.

[1] On vérifie ici en même temps, en faisant $de = 0$, un des résultats du Chapitre II, à savoir que l'aplatissement central en vitesse constante est plus grand que dans le cas des surfaces homothétiques, si la vitesse centrale ou la valeur de φ est la même.

La seconde inégalité (a) donne encore avec (124)

(127) $$\rho_0 < \frac{5}{2}\frac{\varphi}{e_1}D_1\frac{e_1}{e_0}\frac{1}{5-3\frac{e_1}{e_0}}$$

En donnant au rapport $\frac{e_1}{e_0}$ différentes valeurs, ρ_0 sera compris entre les limites suivantes, déterminées par (125) et (127) :

$\frac{e_1}{e_0}$.	1.	1,1.	1,2.	1,3.	1,4.	1,5.	1,6.	1,6666.
$\rho_0 \leqq$	7,05	9,12	12,06	17,56	24,70	42,30	112,8	∞
$\rho_0 \geqq$	7,05	8,07	9,10	10,12	11,14	12,16	13,18	18,80

Les formules (125) et (127) sont d'ailleurs, parmi beaucoup d'autres, les combinaisons qui donnent les limites les plus étroites.

La formule (67) donne encore, d'après (123),

$$\frac{5}{3}\left(e-\frac{\varphi}{2}\right) = \mathrm{J}\frac{\mathrm{F}_1}{\mathrm{D}_1} = \mathrm{J}\left(1-\frac{2}{3}\frac{\zeta}{n+5}\right) \quad \text{ou} \quad 1-\frac{2}{3}\frac{\zeta}{n+5} = \frac{e}{\mathrm{J}}\left(1-\frac{\eta_1}{3}\right).$$

Les valeurs de n et ρ_0 sont alors complètement déterminées par celles de e et de ζ dans l'hypothèse de la vitesse constante et de l'application de la loi du Lipschitz. On a le Tableau suivant :

	ρ_1.	2,0.	2,2.	2,4.	2,6.	2,8.	3,0.
$\frac{1}{e} = 297$	ρ_0.....	9,70	10,25	11,07	12,39	15,08	22,62
	n.....	2,58	2,15	1,72	1,30	0,87	0,45
$\frac{1}{e} = 292$	ρ_0.....	8,11	8,32	8,57	8,92	9,46	10,33
	n.....	4,19	3,67	3,15	2,64	2,12	1,61

On aura donc en résumé dans l'hypothèse de Clairaut

$$8,11 < \rho_0 < 22,62, \qquad 0,45 < n < 4,19.$$

3. *Application au problème de Clairaut, cas d'une vitesse uniforme.* — Nous avons vu (61) qu'avec $\rho = \rho_0(1-\alpha r^n)$, la loi des aplatissements dans le cas de vitesse constante prend la forme

$$e = e_0(1+\beta_1 r^n + \beta_2 r^{2n}+\ldots), \qquad e_1 = e_0(1+\beta_1+\beta_2+\ldots) = e_0(1+\beta).$$

La formule (37) reliant ω, ρ, e, r s'écrit

(128) $$\frac{3\omega^2}{8\pi f} = \frac{e}{r^3}\int_0^r \rho\, dr^3 - \frac{3}{5}\frac{1}{r^5}\int_0^r \rho\, dr^5 e - \frac{3}{5}\int_r^1 \rho\, de.$$

En y portant les valeurs de e, ρ et intégrant, on obtient

$$(128') \qquad \omega^2 = \frac{8}{3}\pi f e_0 \rho_0 (k_0 + k_1 r^n + k_2 r^{2n} + \ldots),$$

où l'on doit faire $k_1 = k_2 = k_3 = \ldots = 0$, dans le cas de vitesse constante. On obtient facilement comme terme général, en supposant $\beta_0 = 1$,

$$k_i = \beta_i - 3\alpha\beta_{i-1}\left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{i}\frac{1}{in+5}\right), \qquad \beta_i = \beta_{i-1}\left(1 - \frac{1}{i}\frac{n+3}{in+5}\right)\frac{\zeta}{n+\zeta}.$$

En posant

$$\frac{\zeta}{n+\zeta} r^n = x, \qquad ab = \frac{2}{n}, \qquad a + b = \frac{5}{n} + 2, \qquad c = \frac{5}{n} + 1,$$

on obtient pour l'expression de e ci-dessus une série hypergéométrique

$$e = e_0 \mathrm{H}(a, b, c, x) = e_1 \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{H}_1}.$$

On en déduit

$$(129) \qquad \eta = \frac{re'}{e} = \frac{r\mathrm{H}'}{\mathrm{H}} = \frac{2n}{n+5}\,\frac{\mathrm{H}(a+1, b+1, c+1, x)}{\mathrm{H}(a, b, c, x)}\,\frac{\zeta}{n+\zeta} r^n.$$

En tenant compte de la valeur de η_1 à la surface, les formules (64), (66) et (67) s'écriront

$$(130) \qquad \frac{1}{e_\varphi} = \frac{2}{\varphi}\frac{\eta_1+2}{5}, \qquad \frac{1}{e_J} = \frac{1}{J}\frac{D_1}{F_1}\frac{3-\eta_1}{3}, \qquad e_{\varphi J} = \frac{\varphi}{2} + \frac{3}{5} J \frac{F_1}{D_1}.$$

Ce sont les trois formules qui ont servi pour les calculs numériques. Mais on a donné à η_1 une autre forme plus pratique que (129). En effet, l'intégrale contenue dans (64) et (66) peut s'écrire

$$(131) \qquad \int_0^1 \rho\, dr^5 e = e_1\rho_1 - \int_0^1 \rho' e r^5\, dr = e_1 \rho_1 m,$$

où

$$m = 1 + \frac{n+3}{n+5}\,\frac{\zeta}{3-\zeta}\,\frac{1+(n+5)\beta'}{1+\beta'}; \qquad \beta' = \frac{\beta_1}{2n+5} + \frac{\beta_2}{3n+5} + \ldots.$$

Or (64) devient

$$\frac{1}{e_\varphi} = \frac{2}{\varphi}\left(1 - \frac{3-\zeta}{5} m\right) = \frac{2}{\varphi}\,\frac{\eta_1+2}{5},$$

d'où

$$(132) \qquad \frac{\eta_1}{\zeta} = 1 - \frac{n+3}{n+5}\,\frac{1+(n+5)\beta'}{1+\beta'},$$

où

$$1 + (n+5)\beta' = \mathrm{H}(a, b, c+1 .. r_1)$$

est encore une série hypergéométrique ([1]).

En faisant les calculs pour $0 < \rho_1 < D_1$ et $\frac{1}{2} < n < 7$, on obtient pour les valeurs de e_φ, e_ψ, $e_{\varphi\psi}$ les trois Tableaux suivants :

1° *Valeurs de* $1 : e_\varphi$.

ρ_1.	0.	1.	2.	3	4.	5.	5,56.
$n = \frac{1}{2}$.			325,04	296,08			230,70
1.	373,04	344,11	316,34	290,12	265,51	242,66	"
2.	350,19	325,95	302,83	280,90	260,23	240,91	"
3.	333,33	312,65	292,90	274,12	256,34	239,61	"
4.	320,43	302,53	285,29	268,96			"
5.	310,38	294,58	279,25	264,87			"
6.	302,31	288,21	274,63	261,56			"
7.	295,69	282,96	270,66	258,83			"

2° *Valeurs de* $1 : e_\psi$.

$n = \frac{1}{2}$.			289,49	297,44			305,31
1.	269,61	282,48	292,11	298,74	302,94	305,04	"
2.	279,86	289,01	295,79	300,57	303,61	305,09	"
3.	286,36	293,12	298,17	301,75	304,02	305,15	"
4.	290,74	295,88	299,82	302,53			"
5.	293,76	297,81	301,02	303,09			"
6.	295,95	299,20	301,69	303,52			"
7.	297,57	300,25	302.33	303,82			"

([1]) Cette série est beaucoup plus rapidement convergente que la précédente donnée par Lipschitz et Tisserand (*Méc. cél.*, t. II, p. 239). En effet, dans la première (129), η à la surface devient $\eta_1 = \dfrac{n\theta}{1+\beta}$, où $\theta = \beta_1 + 2\beta_2 + 3\beta_3 + \ldots$ et voici les valeurs comparées de θ et β' pour $n = 2$ et $\rho_1 = 2$. C'est ce fait de la convergence rapide de β' qui a rendu possible tous ces calculs numériques, appliqués à une variation continue de la densité.

θ.	β'.
0,13997	0,01555
0,09904	0,00450
0,06168	0,00158
0,03648	0,00061
0,02085	0,00025
0,01170	0,00010
....	....

3° *Valeurs de* $1 : e_{\varphi J}$.

$n = 0$.	343,30	327,41	312,92	299,74	287,48	276,26	270,34
$\frac{1}{2}$.	335,09	321,24	308,50	296,74	285,84	275,70	"
1.	328,52	316,28	304,91	294,34	284,48	275.25	"
2.	318,73	308,79	299,44	290.65	282,36	274,54	"
3.	311,75	303,39	295,47	287,95	280,80	274,01	"
4.	306,53	299,33	292,45	285,89			"
5.	302,48	296,15	290,07	284,25			"
6.	299,25	293,60	288,17	282,93			"
7.	296,61	291,51	286,59	281,83			"

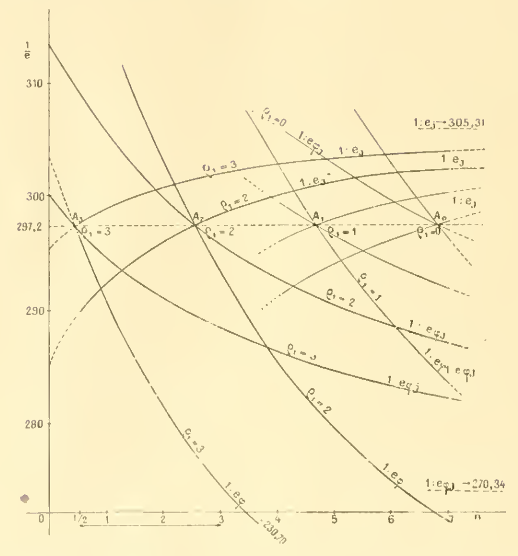


Fig. 15. — Courbes de $\frac{1}{e_\varphi}$, $\frac{1}{e_J}$, $\frac{1}{e_{\varphi J}}$ dans l'hypothèse de Clairaut, pour une même valeur de ρ_1. A_0, A_1, A_2, A_3, ligne des valeurs d'accord pour les différentes valeurs de ρ_1.

En faisant passer des paraboles par trois points voisins, on en déduit avec cinq chiffres exacts les valeurs d'accord où l'on a $e_\varphi = e_J = e_{\varphi J}$. Elles sont consignées dans le Tableau suivant :

$n =$	$\frac{1}{2}$.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	6,25.	7.
$\frac{1}{e}$	297,18	297,17	297,18	297,18	297,19	297,20	297,21	207,21	297,22
ρ_1	2,96	2,72	2,25	1,78	1,30	0,83	0,36	0,0	− 0,12

Enfin ces résultats sont traduits aux yeux par les deux graphiques

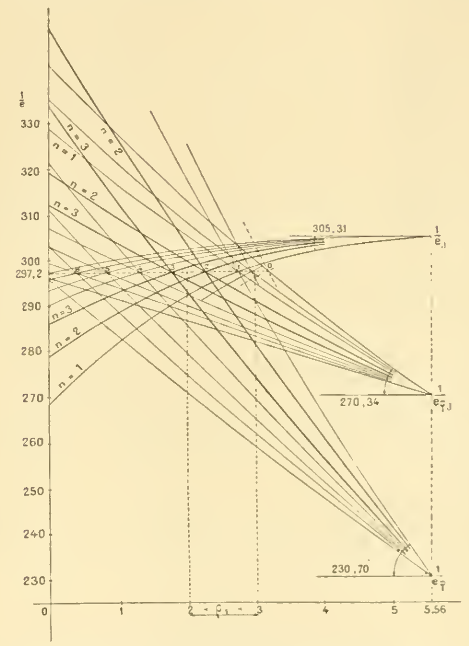


Fig. 16 — Graphique général des valeurs de $\frac{1}{e_\varphi}$, $\frac{1}{e_1}$, $\frac{1}{e_{\varphi_1}}$ dans l'hypothèse de Clairaut, pour toutes les valeurs de ρ_1, de 0 à D_1.
297,2 - - 6 - - - - - est la ligne des valeurs d'accord, pour les différentes valeurs de n.

15 et 16 qui donnent les courbes de $\frac{1}{e}$ en fonction de n et de ρ_1. On a *en résumé :* $297,17 < \frac{1}{e} < 297,22$ et $0 < \rho_1 < 3$ [1].

---

[1] Par interpolation pour $n = 0$, on aurait $1 : e_1 = 297,20$ et $\rho_1 = 3,17$.

On voit d'après le Tableau précédent que pour $2 < \rho_1 < 3$ on a $\frac{1}{2} < n < 3$. On a repris les calculs avec les logarithmes à 7 décimales et 6 chiffres exacts pour $n = \frac{1}{2}$, 1, 2, 3. On obtient les valeurs suivantes :

$n = \frac{1}{2}$.	ρ_1. 2,0.	2,2.	2,4.	2,6.	2,8.	3,0.
$1 : e_{\text{♀}}$	325,043	319,115	313,256	307,454	301,726	296,077
$1 : e_{\text{♃}}$	289,486	291,336	293,048	294,643	296,106	297,440
$1 : e_{\text{♀♃}}$	308,502	306,074	303,685	301,333	299,016	296,736
$n = 1$.						
$1 : e_{\text{♀}}$	316,339	310,970	305,666	300,425	295,244	290,121
$1 : e_{\text{♃}}$	292,108	293,647	295,078	296,403	297,624	298,745
$1 : e_{\text{♀♃}}$	304,915	302,740	300,596	298,482	296,397	294,341
$n = 2$.						
$1 : e_{\text{♀}}$	302,829	298,346	293,911	289,524	285,186	280,897
$1 : e_{\text{♃}}$	295,795	296,902	297,930	298,883	299,764	300,574
$1 : e_{\text{♀♃}}$	299.444	297,644	295,865	294,108	292,371	290,655

$n = 3$.	ρ_1. 1,4.	1,6.	1,8.	2,0.	2,2.	2,4.
$1 : e_{\text{♀}}$	304,638	300,689	296,775	292,901	289,068	285,273
$1 : e_{\text{♃}}$	295,328	296,336	297,284	298,171	298,996	299,764
$1 : e_{\text{♀♃}}$	300,171	298,587	297,019	295,468	293.934	292,415

Les valeurs calculées pour η_1 et qui conduisent aux résultats ci-dessus ont pu être résumées dans les formules suivantes : pour $n = 1$, on a

$$\eta_1 = 0,211916\frac{\zeta^2}{3^2} + 1,021984\frac{\zeta}{3} + 0,0176\frac{\zeta}{3}\left(1 - \frac{\zeta}{3}\right)\left(2\frac{\zeta}{3} - 1\right),$$

qui donne les valeurs de $\frac{1}{e}$ à 0,003 près pour $2 < \rho_1 < 3$, et à 0,09 près pour $0 < \rho_1 < D_1$. Cette formule contient donc et résume d'une façon très précise tous les résultats et calculs numériques ci-dessus pour $n = 1$, dans l'hypothèse de Clairaut. Les deux premiers termes représentent une parabole passant par les trois points $\frac{\zeta}{3} = 0, \frac{1}{2}$, 1. Le troisième est un terme de correction nul pour ces trois points.

Cette formule montre que, pour $n = 1$, on a $\eta_1 < 1,23$, ce qui rend

impossible l'explication de l'aplatissement de Jupiter et de Saturne par cette formule. D'ailleurs on démontre facilement que, si n tend vers 0, la condensation tend vers une limite, et la formule de Lipschitz n'est dans aucun cas applicable à Jupiter et Saturne, l'aplatissement qui en résulte étant trop faible.

Pour $n = 2$ et $n = 3$, on a les formules

$$\eta_1 = 0,16738\,\frac{\zeta^2}{3^2} + 0,86842\,\frac{\zeta}{3} + 0.0092\,\frac{\zeta}{3}\left(1 - \frac{\zeta}{3}\right)\left(2\,\frac{\zeta}{3} - 1\right),$$

$$\eta_1 = 0,75622\,\frac{\zeta^2}{3^2} + 0,13338\,\frac{\zeta}{3} + 0,005\,\frac{\zeta}{3}\left(1 - \frac{\zeta}{3}\right)\left(2\,\frac{\zeta}{3} - 1\right),$$

qui donnent η_1 avec plus de précision encore : 0,002 et 0,001.

Enfin on déduit des Tableaux ci-dessus pour chaque valeur de n, les valeurs d'accord de e_1, e_0, ρ_1, l'équation de la densité ρ, celles de e_φ et e_J en fonction de ρ_1 :

$n = 1:2$; $\quad 1 : e_1 = 297,187$; $\quad 1 : e_0 = 496,00$; $\quad \rho_1 = 2,9606$; $\quad \rho = 21,1564 - 18,1958\sqrt{r}$.
$1 : e_\varphi = 388,327 - 33,4125\rho_1 + 0,8875\rho_1^2$; $\quad 1 : e_J = 264,031 + 15,9175\rho_1 - 1,5938\rho_1^2$.

$n = 1$; $\quad 1 : e_1 = 297,171$; $\quad 1 : e_0 = 412,90$; $\quad \rho_1 = 2,7252$; $\quad \rho = 14,0642 - 11,3390\,r$.
$1 : e_\varphi = 373,277 - 29,9775\rho_1 + 0,7531\rho_1^2$; $\quad 1 : e_J = 271,089 + 13,100\rho_1 - 1,2938\rho_1^2$.

$n = 2$; $\quad 1 : e_1 = 297,177$; $\quad 1 : e_0 = 359,60$; $\quad \rho_1 = 2,2525$; $\quad \rho = 10,5212 - 8,2687\,r^2$.
$1 : e_\varphi = 350,323 - 24,957\rho_1 + 0,605\rho_1^2$; $\quad 1 : e_J = 280,651 + 9,434\rho_1 - 0,931\rho_1^2$.

$n = 3$; $\quad 1 : e_1 = 297,184$; $\quad 1 : e_0 = 340,32$; $\quad \rho_1 = 1,7790$; $\quad \rho = 9,341 - 7,562\,r^3$.
$1 : e_\varphi = 333,413 - 21,242\rho_1 + 0,493\rho_1^2$; $\quad 1 : e_J = 286,728 + 7,147\rho_1 - 0,714\rho_1^2$.

Les formules de densité données ci-dessus sont les seules qui permettent de retrouver le même aplatissement en tenant compte à la fois de l'attraction et de la précession. On obtient $\frac{1}{e}$ à 0,01 près, en prenant trois décimales dans l'expression de ρ. La formule de Roche donnée par l'*Annuaire* devra donc s'écrire

$$\rho = 10,521 - 8,269\,r^2 \qquad \text{pour} \qquad D_1 = 5,56$$

ou

$$\rho = 10,41 - 8,18\,r^2 \qquad \text{pour} \qquad D_1 = 5,50.$$

La formule actuelle $\rho = 10,0 - 7,5\,r^2$ conduit aux aplatis-

sements $1 : e_\varphi = 291,14$ et $1 : e_J = 298,53$ qui ne sont guère concordants. Elle donne en effet $\rho_1 = 2,5$ qui correspond à 2,527 du Tableau.

4. *Hypothèse des surfaces homothétiques.* — La formule (64) qui donne e_φ devient

$$(133) \qquad \frac{1}{e_\varphi} = \frac{2}{\varphi}\left(1 - \frac{3}{5}\frac{F_1}{D_1}\right) = \frac{2}{5}\frac{2}{\varphi}\left(1 + \frac{\zeta}{n+5}\right), \qquad \eta = \frac{2\zeta}{n+5}.$$

(128) fournit ensuite

$$\omega^2 = \omega_0^2(1 - \gamma r^n) \qquad \text{avec} \qquad \gamma = \frac{5}{n+5}\frac{\zeta}{n+\zeta}.$$

L'équation de précession (117) dans le cas de vitesse variable donne

$$(134) \qquad JF_1 = e_1\omega_1\int_0^1 \frac{\rho\, dr^5}{\omega} = eD_1 m', \qquad \frac{1}{e_J} = \frac{1}{J}\frac{D_1}{F_1}m'$$

avec

$$m' = \frac{n+\zeta}{n}\sqrt{1-\gamma}\left(h_1 - \frac{5\alpha}{n+5}h_2\right) = 5\frac{n+\zeta}{n}\sqrt{1-\gamma}\,(h'_1 - \alpha h'_2)$$

et

$$h_1 = 1 + \frac{1}{2}\;\frac{5}{n+5}\,\gamma + \frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\;\frac{5}{2n+5}\gamma^2 + \ldots,$$

$$h_2 = 1 + \frac{1}{2}\,\frac{n+5}{2n+5}\gamma + \frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\,\frac{n+5}{3n+5}\gamma^2 + \ldots.$$

On voit que h_1 et h_2 sont encore des séries hypergéométriques, en posant

$$a = \frac{1}{2}, \qquad b = \frac{5}{n}, \qquad c = \frac{5}{n} + 1,$$

$$h_1 = 1 + 5h'_1 = h(a, b, c, \gamma), \qquad h_2 = 1 + 5h'_2 = h(a, b+1, c+1, \gamma).$$

Les valeurs de $\frac{1}{e_\varphi}$ sont linéaires en ζ et facilement calculables. Les valeurs de $\frac{1}{e_J}$ sont données dans le Tableau suivant et figure 17 :

n.	ρ_1. 0.	1.	2.	3.	4.	5.	5,56
1......	254,10	263,61	272,08	280,63	289,53	299,21	305,31
2......	265,81	272,92	279,58	286,34	293,27	300,75	"
3......	274,04	279,61	284,96	290,36	295,91	301,97	"
4......	280,01	284,50	288,80	293,33	297,91	303,63	"
5......	284,45	288,14	291,76	295,45	299,25	303,16	"
6......	287,90	290,94	294,00	297,17	300,54	304,12	"

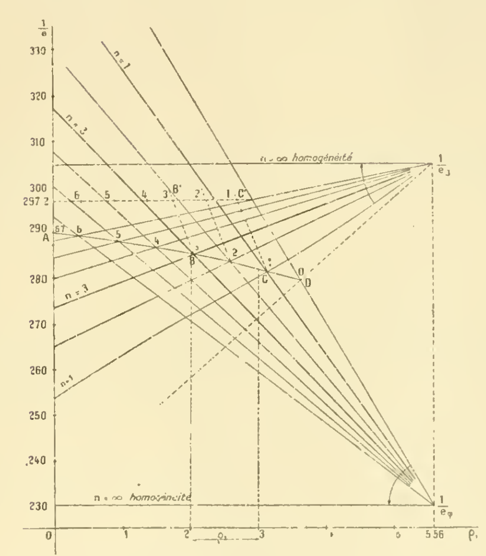


Fig. 17. — Graphique général dans le cas des surfaces homothétiques.
BB', CC',..., lignes des valeurs d'accord dans le cas général de vitesse variable.

On en déduit pour les valeurs d'accord :

$n =$	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	6,70
$1 : e_1 =$	(278,97)	281,56	283,54	285,26	286,70	287,98	289,11	289,84
$\rho_1 =$	(3,621)	3,109	2,589	2,054	1,512	0,958	0,399	0,00
$\omega_0 : \omega_1 =$		1,380	1,211	1,148	1,115	1,095	1,081	1,073

Ces valeurs d'accord sont comprises dans les formules :

$$\rho_1 = 3,621 - 0,507\,n - 0,00501\,n^2, \qquad \zeta = 1,0462 + 0,2735\,n + 0,0027\,n^2.$$

ζ porté dans l'expression de e_φ donne e_1 à 0,03 près.

On voit dans le Tableau des valeurs d'accord que ρ_1 conserve à peu près la même valeur que dans l'hypothèse précédente, pour les mêmes valeurs de n, et que $\frac{1}{e_1}$ reste compris aussi dans des limites assez étroites : 279 à 290. Si l'on veut réaliser un aplatissement intermédiaire entre ces valeurs et celle qui est donnée par l'hypothèse de Clairaut : 297,17, il faudra étudier une hypothèse intermédiaire où les vitesses croîtront vers le centre, mais moins vite que dans le cas des surfaces homothétiques.

3. *Hypothèse générale des surfaces à aplatissement variable et vitesse variable.* — Je relie ce cas général aux deux hypothèses particulières précédentes : vitesse uniforme et surfaces homothétiques, en posant

$$(135) \qquad e = e_0(1 + \varepsilon\beta_1 r^n + \varepsilon\beta_2 r^{2n} + \ldots), \qquad e_1 = e_0(1 + \varepsilon\beta).$$

Pour $\varepsilon = 0$, on aura des surfaces homothétiques; pour $\varepsilon = 1$, une vitesse constante. Pour $0 < \varepsilon < 1$, cas intermédiaire, la vitesse croîtra de la surface au centre, mais moins vite que pour les surfaces homothétiques. Pour $\varepsilon > 1$, les aplatissements décroissent de la surface au centre, mais plus vite que dans le cas d'une vitesse uniforme; la vitesse des couches décroîtra de la surface au centre.

En portant cette valeur de e dans l'intégrale de (64) et opérant comme dans l'hypothèse de Clairaut (les β étant les mêmes), on a les mêmes formules où tous les β sont multipliés par ε :

$$(136) \qquad \frac{1}{e_\varphi} - \frac{2}{\varphi}\left(1 - \frac{3-\zeta}{5} m_\varepsilon\right) = \frac{2}{\varphi}\,\frac{\eta_\varepsilon + 2}{5},$$

$$(137) \quad m_\varepsilon = 1 + \frac{n+3}{n+5}\,\frac{\zeta}{3-\zeta}\,\frac{1+\varepsilon(n+5)\beta'}{1+\varepsilon\beta}, \qquad \frac{\eta_\varepsilon}{\zeta} = 1 - \frac{n+3}{n+5}\,\frac{1+\varepsilon(n+5)\beta'}{1+\varepsilon\beta}.$$

Portée dans (128) cette valeur de e donne : $k_2 = k_3 = \ldots k_i = 0$ et

$$(138) \qquad \omega^2 = \frac{8}{3}\pi f e_0 \rho_0 (k_0 + k_1 r^n) = \omega_0^2(1 - \gamma r^n), \qquad \gamma = -\frac{k_1}{k_0}.$$

Or on a

$$-k_1 = \beta_1(1-\varepsilon) = \frac{1-\varepsilon}{n+5}\frac{2\zeta}{n+\zeta} \quad \text{et} \quad k_0 = \frac{2}{5}(1-\varepsilon) + \varepsilon k'_0,$$

en désignant par k'_0 la valeur de k_0 en vitesse constante (¹). En transformant cette valeur en φ, e_1, η_1, on pourra l'écrire

$$k'_0 = \frac{3\omega^2}{8\pi f e_0 \rho_0} = \frac{\varphi}{2e_1}(1+\beta)\frac{n}{n+\zeta} = \frac{n}{n+\zeta}\frac{\eta_1+2}{5}(1+\beta).$$

On en tire

$$\gamma = \frac{\gamma_0}{1+\dfrac{5}{2}\dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon}k'_0}, \quad \text{où} \quad \gamma_0 = \frac{5}{n+5}\frac{\zeta}{n+\zeta};$$

γ_0 est la valeur de γ pour $\varepsilon = 0$ (surfaces homothétiques).

La condition (117) donnée par la précession devient, en développant et intégrant,

$$\mathrm{JF}_1 = \omega_1\int_0^1 \frac{\rho\, dr^5 e}{\omega} = \frac{e_1\rho_1\sqrt{1-\gamma}}{(1+\varepsilon\beta)(1-\alpha)}\left[\left(h_1 - \alpha\frac{5}{n+5}h_2\right)\right.$$
$$\left. + \varepsilon\beta_1\left(h_2 - \alpha\frac{n+5}{2n+5}h_3\right) + \varepsilon\beta_2\left(\quad\right)\ldots\right];$$

$h_1, h_2, \ldots$ sont les mêmes séries hypergéométriques que dans le cas des surfaces homothétiques. En les transformant en h' et représentant la parenthèse par m'', on obtiendra

$$m'' = m_\varepsilon + m'_\varepsilon,$$

$$(1+\varepsilon\beta)(1-\alpha)m'_\varepsilon = 5(h'_1 - \alpha h'_2)$$
$$+\varepsilon[(n+5)(h'_2 - \alpha h'_3)\beta_1 + (2n+5)(h'_3 - \alpha h'_4)\beta_2\ldots],$$

(139)
$$\frac{1}{e_J} = \frac{1}{J}\frac{D_1}{F_1}\frac{3-\zeta}{3}\sqrt{1-\gamma}\,(m_\varepsilon + m'_\varepsilon)$$
$$= \frac{1}{J}\frac{D_1}{F_1}\sqrt{1-\gamma}\,\frac{3-\eta_\varepsilon+(3-\zeta)m_\varepsilon}{3} - \frac{1}{J}\frac{D_1}{F_1}\frac{3-\eta_1}{3}.$$

(¹) On aurait aussi en faisant $r = 1$ dans l'expression de ω^2

$$k_0 + k_1 = \frac{1}{3}\frac{\varphi}{2e}\frac{n}{n+\zeta}(1+\varepsilon\beta) = \frac{1}{3}\frac{n}{n+\zeta}\frac{\eta_\varepsilon+2}{5}(1+\varepsilon\beta),$$

puis on remplacerait η_ε par η_1.

On a calculé alors pour $n=2$ les Tableaux suivants de $\frac{1}{e_\varphi}$ et $\frac{1}{e_J}$:

ε.	ρ. 0.	1.	2,0	2,2.	2,4.	2,6.	2,8.	3,0.	4.	5.
1,2.....	353,13	328,05	304,21	299,61	295,04	290,53	286,08	281,69	260,55	240,96
1,0.....	350,19	325,95	302,83	298,35	293,91	289,52	285,19	280,90	260,23	240,91
0,8	346,94	323,64	301,34	297,00	292,71	288,46	284,24	280,08	259,90	240,86
0,6.....	343,31	321,10	299,73	295,55	291,41	287,30	283,23	279,20	259,56	240,81
0,4.....	339,28	318,31	297,99	293,98	290,02	286,09	282,17	278,27	259,20	240,76
0,2.....	334,73	315,22	296,08	292,29	288,52	284,76	281,02	277,28	258,83	240,71
0,0.....	329,58	311,80	294,01	290,45	286,90	283,34	279,78	276,23	258,45	240,66

ε.	0.	1.	2,0	2,2.	2,4.	2,6.	2,8.	3,0.	4.	5.
1,2.....	»	»	298,74	299,82	300,80	301,68	302,49	303,21	»	»
1,0.....	279,86	289,01	295,79	296,90	297,93	298,88	[illegible]9,76	300,57	303,61	305,09
0,8.....	»	»	292,80	293,93	295,01	296,03	96,98	297,89	»	»
0,6.....	274,68	283,04	289,68	290,86	292,00	293,09	294,13	295,12	299,57	303,35
0,4.....	»	»	286,45	287,66	288,88	290,04	291,18	292,29	»	»
0,2.....	»	»	283,09	284,38	285,65	286,91	288,14	289,24	»	»
0,0. ...	265,81	272,92	279,58	280,94	282,26	283,62	284,98	286,34	293,27	300,75

En calculant les valeurs de e_1, ρ_1, δT_0 (accroissement du temps de rotation au centre) pour les points où $e_\varphi = e_J$, on a

$\varepsilon =$	0,0.	0,2.	0,4.	0,6.	0,8.	1,0.	1,2.	etc.
$1 : e_1$......	283,54	286,36	289,14	291,87	294,55	297,18	299,76	....
ρ_1.........	2,589	2,515	2,445	2,378	2,314	2,252	2,194	....
γ.........	0,318	0,267	0,210	0,147	0,077	0,00	−0,086	....
δT_0.......	$-4^h 10^m$	$-3^h 26^m$	$-2^h 40^m$	$-1^h 50^m$	-57^m	0,0	$+1^h 1^m$	....

Telles sont pour $n=2$ les valeurs qui s'accordent à la fois avec les données de l'attraction et de la précession. On voit qu'on peut faire varier facilement $1 : e_1$ de 283 à 300 et au delà, en faisant varier la loi des vitesses. De ρ_1 on déduit facilement ρ_0 et la loi générale de ρ.

Comme dans l'hypothèse de Clairaut, j'ai condensé toutes ces valeurs dans des formules qui permettent de les trouver rapidement ou de les déterminer dans les intervalles non calculés. Ces formules, exactes pour $\varepsilon = 0$ et 1, le sont à 0,02 près pour les autres cas. Les voici pour $n = 1, 2, 3$:

$$1 : e = 297,171 - 15,611(1-\varepsilon) + 2,612\,\varepsilon(1-\varepsilon), \qquad \rho_1 = 2,7252 + 0,384(1-\varepsilon) - 0,110\,\varepsilon(1-\varepsilon),$$

$$1 : e = 297,177 - 13,637(1-\varepsilon) + 0,616\,\varepsilon(1-\varepsilon), \qquad \rho_1 = 2,2525 + 0,336(1-\varepsilon) - 0,039\,\varepsilon(1-\varepsilon),$$

$$1 : e = 297,184 - 11,924(1-\varepsilon) + 0,315\,\varepsilon(1-\varepsilon), \qquad \rho_1 = 1,779 + 0,275(1-\varepsilon) - 0,021\,\varepsilon(1-\varepsilon),$$

et

$$(140)\qquad \begin{aligned} 1:e_1 = 297{,}18 - (0{,}13\,n^2 - 2{,}36\,n + 17{,}85)(1-\varepsilon) \\ + (0{,}85\,n^2 - 4{,}54\,n + 6{,}30)\,\varepsilon(1-\varepsilon). \end{aligned}$$

Cette formule générale donne $1 : e_1$ compatible avec l'attraction et la précession pour $1 < n < 3$ et $0 < \varepsilon < 1{,}2$, à $0{,}01$ près.

En appelant η_1 la valeur de η_ε pour $\varepsilon = 1$ (vitesse uniforme), on a

$$\eta_\varepsilon = \varepsilon\eta_1 + (1-\varepsilon)\frac{2\zeta}{n+5} + \varepsilon(1-\varepsilon)\frac{\beta}{1+\varepsilon\beta}\left(\eta_1 - \frac{2\zeta}{n+5}\right).$$

On pourra poser

$$(141)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\eta = \varepsilon\eta_1 + (1-\varepsilon)\frac{2\zeta}{n+5}, \\ &\frac{1}{e_\varphi} = \frac{2}{\rho}\,\frac{\eta+2}{5} + \varepsilon(1-\varepsilon)\,\delta\frac{1}{e_\varphi}, \\ &\frac{1}{e_J} = \frac{1}{J}\,\frac{D_1}{F_1}\,\frac{3-\eta}{3} + \varepsilon(1-\varepsilon)\,\delta\frac{1}{e_J}; \end{aligned} \right.$$

et les termes de correction seront donnés par les formules suivantes pour $n = 1, 2, 3$:

$$\delta\frac{1}{e_\varphi} = \left(17{,}50\,\frac{\zeta}{3} - 4{,}17\right)\frac{\zeta}{3}, \qquad \delta\frac{1}{e_J} = \left(\eta_1 - \frac{2\zeta}{n+5}\right)\left(0{,}417\,\frac{\zeta}{3} - 0{,}016\right),$$

$$\delta\frac{1}{e_\varphi} = \left(7{,}92\,\frac{\zeta}{3} - 2{,}04\right)\frac{\zeta}{3}, \qquad \delta\frac{1}{e_J} = (\zeta - 0{,}33),$$

$$\delta\frac{1}{e_\varphi} = \left(4\,\frac{\zeta}{3} - 1\right)\frac{\zeta}{3}, \qquad \delta\frac{1}{e_J} = (\zeta - 0{,}25).$$

Les résultats pour $2 < \rho_1 < 3$ et $n = 2$ sont consignés dans le graphique 18, où la ligne des valeurs d'accord A_0A_1 est représentée en pointillé. Pour avoir la représentation générale de ce cas de vitesse variable, il suffit de se reporter au graphique 17 des surfaces homothétiques, où A, B, C, D est la ligne des valeurs d'accord pour les différentes valeurs de n, de 0 à 6. On a ajouté, la ligne correspondante A′, B′, C′ pour le cas de vitesse uniforme, $\varepsilon = 1$. Donc BB′ sera la ligne des valeurs d'accord pour $n = 3$, quand ε varie de 0 à 1 ; CC′ celle de $n = 1$, etc. Toutes les valeurs correspondant à $1 < n < 3$ et $2 < \rho_1 < 3$ sont à peu près renfermées dans le quadrilatère BCB′C′.

Remarque. — Pour Jupiter et Saturne, en négligeant le terme de correction, on pourra de η donné par (141) tirer la valeur de ε qui permettrait de réaliser les valeurs observées $\eta = 1,64$ et $1,59$. On obtient $\varepsilon > 2,8$ pour $n \geqq 1$ et $\gamma > 1$, ce qui est impossible. La loi de Lipschitz ne peut donc pas expliquer l'aplatissement de Jupiter et

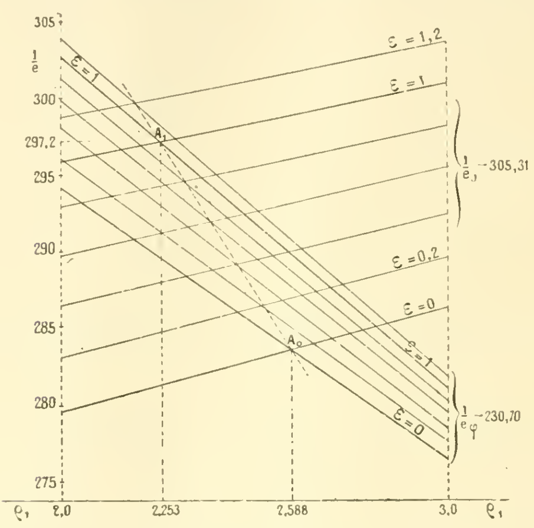


Fig. 18. — Cas général des vitesses variables. Courbes de $\frac{1}{e_{\varphi}}$ et $\frac{1}{e_J}$ pour $2 < \rho_1 \leq 3$ et $n = 2$. $A_0 A_1$, ligne des valeurs d'accord quand ε varie de 0 à 1,2.

de Saturne, même en admettant une loi de vitesse quelconque avec la loi de e ci-dessus.

6. *Hypothèse d'une Terre solide.* — Comme dans ce cas la vitesse est naturellement la même sur toutes les surfaces de niveau, e_{φ}, e_J, $e_{\varphi J}$ sont donnés encore par les formules (130), comme dans l'hypothèse de Clairaut. De plus $e_{\varphi J}$ ne dépend que de la loi des densités et conserve les mêmes valeurs calculées déjà dans cette hypothèse. Au contraire e_{φ} et e_J dépendent de η et de la loi des

aplatissements. J'ai suivi alors deux méthodes : la première en rattachant cette loi des aplatissements à celle qui a été déjà déterminée dans le cas d'une rotation uniforme ; la deuxième en lui donnant une forme indépendante et plus simple, analogue à celle des densités de Lipschitz.

Première méthode. — Prenons pour e la même forme (135) que dans le cas précédent, alors γ_1 aura la valeur donnée par $\gamma_{1\varepsilon}$ dans (137). On en déduit aussi au moyen de (138) la valeur de ω^2 qui correspond à telle loi des aplatissements (¹).

Pour $n = 2$, j'ai fait les calculs depuis $\varepsilon = -0,35$, limite minimum où pour $\rho_1 = 0$ on a $e_\varphi = e_J = e_{\varphi J}$ (au delà il n'y a plus d'accord possible) jusqu'à $\varepsilon = \infty$. Pour $\varepsilon = 0$, on retrouve le cas de surfaces homothétiques et pour $\varepsilon = 1$ celui de l'équilibre d'un fluide à vitesse constante.

Le premier Tableau donne les valeurs de $1 : e_\varphi$, le second celles de $1 : e_J$, la dernière ligne celle de $1 : e_{\varphi J}$.

ρ_1.	0.	1.	2,0.	2,2.	2,4.	2,6.	2,8.	3.	4.	5.	5,56.
$\varepsilon = \infty$..	412,41	376,42	341,67					308,34	276,53	246,58	230,70
1 : 0,2.	381,22	349,51	319,35	313,50	307,79	302,10	296,50	290,99	264,83	241,68	»
1 : 0,4.	367,10	338,41	311,27	306,03	300,87	295,78	290,76	285,82	262,32	241,22	»
1 : 0,6.	359,04	332,38	307,10	302,22	297,40	292,64	287,95	283,33	261,23	240,99	»
1 : 0,8.	353,83	328,28	304,55	299,90	295,31	290,78	286,29	281,86	260,62	240,96	»
1.....	350,19	325,95	302,83	298,35	293,91	289,52	285,19	280,90	260,23	240,91	»
0,8...	346,94	323,64	301,34	297,00	292,71	288,46	284,24	280,08	259,90	240,85	»
0,6...	343,31	321,10	299,73	295,55	291,41	287,30	283,25	279,20	259,56	240,81	»
0,4...	339,28	318,31	297,99					278,27	259,20	240,76	»
0,2...	334,73	315,22	296,08					277,28	258,83	240,71	»
0.....	329,58	311,80	294,01	290,45	286,90	283,34	279,78	276,24	258,45	240,66	»
−0,2.	323,47	307,96	291,75					275,09	258,05	240,62	»
−0,35	318,73	304,76	289,86					274,19	257,74	240,59	»

(¹) Mais on peut admettre aussi que la solidification ne s'est pas faite d'un seul coup, avec une seule et même loi des vitesses. Du moins ω^2 serait la loi des vitesses qui donnerait les mêmes aplatissements dans l'hypothèse de la fluidité.

ρ_1.	0.	1.	2.0.	2.2.	2.4.	2.6.	2.8.	3.	4.	5.	5.56.
$\varepsilon = \infty$..	203,01	230,86	253,86					272,70	287,97	299,94	305,31
1 : 0,2.	241,52	261,87	277,96	280,72	283,33	285,80	288,13	290,32	299,20	304,39	»
1 : 0,4.	258,97	274,65	286,68	288,71	290,61	292,38	294,04	295,58	301,61	304,81	»
1 : 0,6.	268,93	281,60	291,19	292,78	294,26	295,64	296,93	298,11	302,65	305,02	»
1 : 0,8.	275,36	286,33	293,94	295,24	296,45	297,58	298,63	299,59	303,24	305,05	»
1.....	279,86	289,01	295,79	296,90	297,93	298,88	299,76	300,57	303,61	305,09	»
0,8...	283,88	291,68	297,41	298,33	299,21	300,00	300,73	301,41	303,93	305,15	»
0,6...	288,36	294,60	299,15	299,89	300,57	301,20	301,77	302,30	304,26	305,19	»
0,4...	293,35	297,82	301,03					303,25	304,59	305,23	»
0,2...	298,96	301,37	303,09					304,26	304,95	305,25	»
0.....	305,31	305,31	305,31	305,31	305,31	305,31	305,31	305,31	305,31	305,31	»
—0,2.	312,89	309,74	307,77					306,49	305,70	305,36	»
—0,35	318,73	313,37	310,25					307,39	306,01	305,39	»
1 : $e_{\varphi J}$.	318,73	308,79	299,44	297,64	295,86	294,11	292,37	290,65	282,36	274,54	270,34

On obtient ensuite pour chaque valeur de ε les valeurs d'accord pour lesquelles on a $e_\varphi = e_J = e_{\varphi J}$:

ε.	∞.	1 : 0,2.	1 : 0,4.	1 : 0,6.	1 : 0,8.	1.	0,8.
ρ_1.....	3,757	3,020	2,702	2,502	2,361	2,253	2,149
1 : e_1...	284,41	290,48	293,22	294,95	296,21	297,17	298,10
1 : e_0...	∞	674,72	430,75	392,82	372,80	360,48	351,85
$\omega_0 : \omega_1$..	0,0	0,490	0,758	0,878	0,950	1,000	1,043

ε.	0,6.	0,4.	0,2.	0.	— 0,2.	— 0,35.
ρ_1......	2,023	1,866	1,656	1,365	0,856	0,00
1 : e_1.....	299,24	300,68	302,62	305,31	310,19	318,73
1 : e_0.....	339,96	328,16	316,60	305,31	292,35	281,75
$\omega_0 : \omega_1$...	1,089	1,137	1,190	1,269	1,397	1,461

On voit que $1 : e_1$ peut varier de 284,41 à 318,73, quand ρ_1 varie de 3,757 à 0 avec $n = 2$. Pour $2 < \rho_1 < 3$, on a $290,65 < \frac{1}{e} < 299,44$.

L'ensemble est représenté par le graphique 19. La courbe des valeurs d'accord se confond avec celle de $e_{\varphi J}$.

Pour quelques autres valeurs de n, il suffira d'indiquer les limites et les valeurs principales de $1 : e_1$.

	$\rho_1 = 0$.	$\rho_1 = 2$.	$\rho_1 = 3$.	$\varepsilon = \infty$.	
$n = 0$....	343,30	312,92	299,74		
$n = 1$.....	328,52	304,91	294,34	288,41	$\rho_1 = 3,612$
$n = 3$.....	311,75	295,47	287,95	281,90	$\rho_1 = 3,846$
$n = 5$.....	302,48	290,07	284,25		

Pour $\rho_1 = 2$,

$$290,07 < \frac{1}{e} < 312,92;$$

pour $\rho_1 = 3$,

$$284,25 < \frac{1}{e} < 299,74.$$

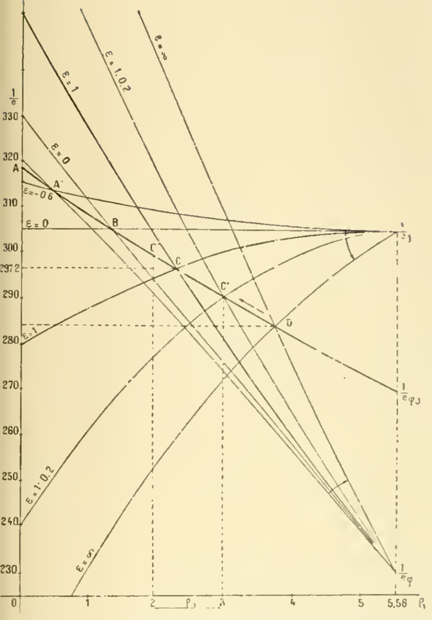


Fig. 19. — Hypothèse d'une Terre solide. Graphique pour $n = 2$. ABCD, ligne des valeurs d'accord. Pour $\varepsilon = 0$ on a des lignes droites.

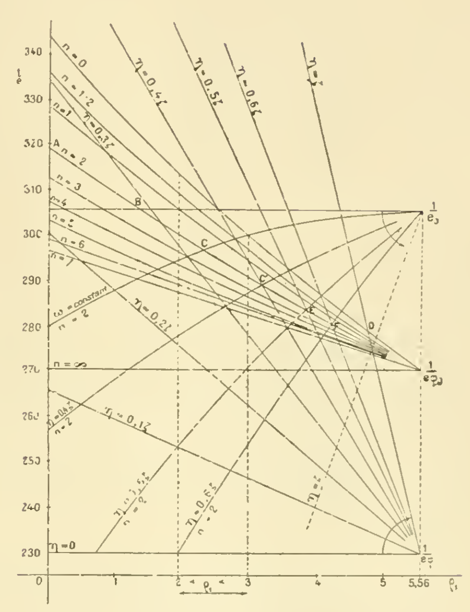


Fig. 20. — Graphique général dans le cas d'une Terre solide avec $e = e_1(1 + \beta r^{n'})$. ABCEFD, ligne des valeurs d'accord pour $n = 2$.

Deuxième méthode. — Posons

$$e = e_0(1 + \beta r^{n'})$$

avec $\beta > -1$ et $n' > 0$. La formule (131) donnera à la place de (132)

$$\frac{\eta}{\zeta} = 1 - \frac{n+3}{n+5}\,\frac{1+\theta\beta}{1+\beta}, \qquad \theta = \frac{n+5}{n'+n+5}.$$

La solution est ici très simple.

La loi des densités étant supposée donnée, la série des valeurs de $e_{\varphi J}$ est parfaitement déterminée et la même que dans l'hypothèse de Clairaut.

Si de plus on se donne la loi des aplatissements, β et n' sont alors également déterminés, $\eta : \zeta$ est constant et $1 : e_\varphi$ varie linéairement avec ζ. On a comme représentation (*fig.* 20), des lignes droites qui coupent les $e_{\varphi J}$ aux points extrêmes D pour $\eta = \zeta$, puis en des points de plus en plus à gauche et de plus en plus élevés pour $\eta < \zeta$. On a représenté le faisceau de droites de e_φ; le faisceau de courbes de $e_{\varphi J}$ pour $0 < n < 7$, et quelques courbes de e_J pour $n = 2$.

Pour $2 < \rho_1 < 3$, on a, suivant les valeurs de n,

$n =$	0.	1:2.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
$\frac{1}{e_1}\cdots$	$<$ 312,92	308,50	304,91	299,44	295,47	292,45	290,07	288,17	286,59
	$>$ 299,74	296,74	294,34	290,65	287,95	285,89	284,25	282,93	281.83

On aurait comme limites extrêmes $1 : e_1 = 343,30$ pour $n = 0$, $\rho_1 = 0$ et $1 : e_1 = 270,30$ pour $\rho_1 = 4,972$. Dans cette hypothèse, on peut faire varier $1 : e$ de 73 unités. C'est la plus grande variation obtenue.

Enfin cette loi permet de réaliser pour Jupiter et Saturne les aplatissements observés en faisant $\frac{n'\beta}{n'+5} = 0,25$. La loi des vitesses correspondantes s'en déduirait en portant la valeur de e dans l'expression (128'). La vitesse superficielle serait plus grande que les vitesses intérieures, qui décroîtraient jusqu'au centre.

7. *Lois des densités* $\rho = \rho_0(1 - \alpha r^2)^2$ et $\rho = \rho_0(1 - \alpha r^2)^3$, *ou* $\rho = \rho_0(1 - \alpha r^n)^m$. — Ces lois admettent un point d'inflexion où la variation de la densité est maximum. On aura donc comme un noyau central à forte densité et une écorce superficielle à densité plus faible. Elles permettent de réaliser une condensation plus considérable et un inverse de l'aplatissement e_φ, correspondant à l'attraction, plus grand qu'avec la loi de Lipschitz. Je ne les ai appliquées que dans l'hypothèse d'une vitesse uniforme. Elles permettent dans ce cas d'expliquer l'aplatissement observé pour Jupiter et Saturne.

Première loi. — On obtient successivement comme dans l'hypothèse

de Clairaut, avec l'exposant n,

$$D_1 = \int_0^1 \rho\, dr^3 = \rho_0 \left(1 - \frac{6\alpha}{n+3} + \frac{3\alpha^2}{2n+3}\right),$$

$$F_1 = \int_0^1 \rho\, dr^5 = \rho_0 \left(1 - \frac{10\alpha}{n+5} + \frac{5\alpha^2}{2n+5}\right),$$

$$\beta_i = \frac{6\alpha}{n+3}\beta_{i-1}\left(1 - \frac{1}{i}\,\frac{n+3}{in+5}\right) - \frac{3\alpha^2}{2n+3}\beta_{i-2}\left(1 - \frac{2}{i}\,\frac{2n+3}{in+5}\right),$$

$$\beta'' = \frac{\beta_1}{3n+5} + \frac{\beta_2}{4n+5} + \ldots, \qquad \int_0^1 \rho\, de\, r^5 = e_1 \rho_0 m.$$

$$m = (1-\alpha)^2 + \frac{2\alpha n}{1+\beta}\left[\frac{1+(n+5)\beta'}{n+5} - \alpha\,\frac{1+(2n+5)\beta''}{2n+5}\right],$$

$$\frac{1}{e_\varphi} = \frac{2}{\varphi}\left(1 - \frac{3}{5}\,\frac{\rho_0}{D_1}\,m\right), \qquad \frac{1}{e_J} = \frac{1}{J}\,\frac{\rho_0}{F_1}\,m. \qquad e_{\varphi J} = \frac{\varphi}{2} + \frac{3}{5}J\,\frac{F_1}{D_1}.$$

Les calculs numériques donnent alors les résultats suivants avec $n = 2$:

$\alpha =$	1.	0,9.	0,8.	0,7.	0,6.	0,54.	0,52	0,50.	0,4.	0,2.	0.
$1 : e_\varphi$..	428,88	398,68	366,32	339,70	315,08	302,04	297,97	294,06	276,48	256,84	230,70
$1 : e_J$..	234,83	255,49	274,33	284,96	292,44	295,99	297,00	297,91	301,34	304,76	305,31
$1 : e_{\varphi J}$.	353,89	339,86	326,38	314,49	304,39	299,12	297,50	295,93	288,88	278,06	270,34

Pour les valeurs d'accord, on a $1 : e_1 = 297,183$, $1 : e_0 = 372,55$,

$$\rho_1 = 2,632, \qquad \rho = 11,234(1 - 0,516\, r^2)^2.$$

Remarque. — Les valeurs correspondantes pour Jupiter et Saturne s'en déduisent en multipliant ρ_1 par le rapport des densités moyennes et $1 : e_\varphi$ par le rapport des valeurs de φ. On trouve

	Pour Jupiter.				Pour Saturne.			
α	1	0,9	0,8	...	1	0,9	0,8	...
ρ_1	0	0,05	0,10		0	0,03	0,06	
$1 : e_1$...	17,5	16,7	15,0		10,3	9,8	8,9	

Les valeurs observées $1 : e = 17,11$ et $9,18$ correspondent aux densités superficielles 0,025 et 0,05, c'est-à-dire 9 et 17 fois celle de l'air.

Deuxième loi. — On obtient de même

$$D_1 = \rho_0\left(1 - \frac{9\alpha}{n+3} + \frac{9\alpha^2}{2n+3} - \frac{3\alpha^3}{3n+3}\right),$$

$$F_1 = \rho_0\left(1 - \frac{15\alpha}{n+5} + \frac{15\alpha^2}{2n+5} - \frac{5\alpha^3}{3n+5}\right),$$

$$\beta_i = \frac{9\alpha}{n+3}\beta_{i-1}\left(1 - \frac{1}{i}\frac{n+3}{in+5}\right)$$
$$- \frac{9\alpha^2}{2n+3}\beta_{i-2}\left(1 - \frac{2}{i}\frac{2n+3}{in+5}\right) + \frac{3\alpha^2}{3n+3}\beta_{i-3}\left(1 - \frac{3}{i}\frac{3n+3}{in+5}\right),$$

$$m = (1-\alpha)^3 + \frac{3\alpha n}{1+\beta}\left[\frac{1+(n+5)\beta'}{n+5} - 2\alpha\frac{1+(2n+5)\beta''}{2n+5} + \alpha^2\frac{1+(3n+5)\beta'''}{3n+5}\right],$$

$$\beta''' = \frac{\beta_1}{4n+5} + \frac{\beta_2}{5n+5} + \ldots \quad (^1).$$

Le calcul donne alors les résultats suivants pour $n = 2$:

α.	1.	0,9.	0,8.	0,6.		0,40.	0,38.	0,36.	
$1:e_\varphi$..	477,35	459,60	422,75	357,28	...	301,72	296,92	292,16	...
$1:e_J$..	192,88	204,68	240,89	278,14	...	296,26	297,20	298,30	...
$1:e_{\varphi J}$.	380,60	366,80	351,76	322,37	...	299,09	297,05	295,16	...

Accord $1 : e_1 = 297,15$; $\rho_1 = 2,734$; $\rho = 11,527\,(1 - 0,381\,r^2)^3$.

Pour Jupiter et Saturne, les aplatissements observés exigeraient, dans ce cas, $\rho_1 = 0,03$ et $0,17$, c'est-à-dire des densités 10 et 60 fois plus grandes que celle de l'air.

8. *Étude de la loi limite* $\eta = \eta_1 =$ const. — Si η est constant, on a

$$\frac{re'}{e} = \eta_1, \qquad \frac{de}{e} = \eta_1\frac{dr}{r}, \qquad e = e_1 r^{\eta_1}.$$

On a aussi $\eta' = 0$, et l'équation Clairaut-Radau devient

$$(145) \qquad \eta(5+\eta) = 2\zeta(1+\eta).$$

Comme $\eta = \eta_1$, on a aussi

$$\zeta = \zeta_1 = \frac{\eta_1}{2}\frac{5+\eta_1}{1+\eta_1} = \text{const.},$$

(1) $1+(2n+5)\beta''$ et $1+(3n+5)\beta'''$ sont encore des séries hypergéométriques. On voit de plus immédiatement la forme des expressions β_i et m pour la loi générale $\rho = \rho_0\,(1 - \alpha\,r^n)^m$.

équation qui donne η_1 en fonction de ζ_1 et réciproquement. On a ensuite

$$-\frac{r\,D'}{D}=\zeta_1, \qquad \frac{dD}{D}=-\zeta_1\frac{dr}{r}, \qquad D=D_1 r^{-\zeta_1}.$$

Puis $3\left(1-\frac{\rho}{D}\right)=\zeta_1$, d'où

$$\rho=D\left(1-\frac{\zeta_1}{3}\right)=D_1 r^{-\zeta_1}\left(1-\frac{\zeta_1}{3}\right)=\rho_1 r^{-\zeta_1}.$$

L'équation de Clairaut (128) en y portant ces valeurs de e et ρ donne

$$(146)\qquad \frac{3\omega^2}{8\pi f}=e_1\rho_1\left(\frac{3}{3-\zeta_1}-\frac{3}{5}\,\frac{5+\eta_1}{5+\eta_1-\zeta_1}-\frac{3}{5}\,\frac{\eta_1}{\zeta_1-\eta_1}\right)r^{\eta_1-\zeta_1}+\frac{3}{5}e_1\rho_1\frac{\eta_1}{\zeta_1-\eta_1}.$$

En tenant compte de (145), la parenthèse est nulle et (146) donne finalement

$$(147)\qquad \eta_1=\frac{5}{2}\,\frac{\varphi}{e}-2 \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{e_\varphi}=\frac{2}{\varphi}\,\frac{\eta_1+2}{5}.$$

Les équations qui donnent e_J et $e_{\varphi J}$ deviennent à leur tour

$$(148)\qquad 2e_1\rho_1\frac{1+\eta_1}{2+\eta_1}=J\,\frac{5}{5-\zeta_1} \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{e_J}=\frac{1}{J}\left(1-\frac{\eta_1^2}{10+5\eta_1}\right),$$

$$(149)\qquad e_{\varphi J}=\frac{\varphi}{2}+J\,\frac{\rho_1}{D_1}\,\frac{3}{5-\zeta_1}=\frac{\varphi}{2}+J\,\frac{3-\zeta_1}{5-\zeta_1}.$$

Pour $\frac{1}{e}=297$, on a $\eta_1=0{,}5747$ et (145) donne $\zeta_1=1{,}0170$ et $\rho_1=3{,}675$. J'ai donc fait les calculs pour $3{,}5<\rho_1<3{,}8$, on obtient

ρ_1.	3,5.	3,6.	3,7.	3,8.
$1:e_\varphi$	305,59	300,62	295,82	291,16
$1:e_J$	295,60	296,71	297,72	298,67
$1:e_{\varphi J}$	300,80	298,73	296,74	294,83

L'accord a lieu pour $\frac{1}{e}=297{,}39$ et $\rho_1=3{,}667$. La valeur de $\frac{1}{e}$ est précisément la limite supérieure trouvée, en première approximation, dans le problème de M. Poincaré, quand on suppose $\eta=\eta_1$, comme on l'a vu [Chap. IV, formule (71)].

Remarque. — En seconde approximation, dans l'hypothèse $\eta'=0$, la valeur de e_φ serait donnée par l'expression (108) de η_1, qui

s'écrira

$$\frac{1}{e_\varphi} = \frac{2}{\varphi}\,\frac{\eta_1 + 2}{5} + \left(\frac{69}{70} - \frac{\eta_1}{7}\right).$$

Pour déterminer la valeur de η_1, on aura d'abord, en faisant $D_1(1 + \lambda_1^2) = \Delta_1 = 5,56$ dans (93'),

$$3\rho_1 = 5,56\,(3 - \zeta_1)\left(1 - \tfrac{2}{3}\,e\eta_1\right).$$

On donne à $e\eta_1$ sa valeur en première approximation et l'on déduit de cette expression ζ_1 en fonction de ρ_1. Cette valeur de ζ_1, portée dans l'équation de Clairaut-Radau, complète (93), donne finalement η_1, qui permet de calculer e_φ.

La valeur de e_3 s'obtiendra au moyen de (104). Pour cela, il faut calculer λ^2 et ρ.

On a d'abord, comme en première approximation,

$$\eta' = 0, \qquad \frac{r}{\lambda^2}\,\frac{d\lambda^2}{dr} = 0, \qquad \lambda^2 = \lambda_1^2\, r^{\eta_1}.$$

Puis (93) s'écrira

$$\zeta = -\frac{r\,D'}{D} = \frac{\eta_1}{2}\,\frac{5 + \eta_1}{1 + \eta_1} - \frac{1}{2}\,\frac{\chi}{1 + \eta_1},$$

où ζ est légèrement variable avec χ. On en déduit l'expression de D, puis celle de ρ, d'après (92'). Elles contiendront un terme de correction dérivé de χ.

9. *Formules pour calculs numériques en tenant compte de e^2.* — ω^2 est déterminé par la formule (90) qui devient, en remplaçant λ^2 par $2e + 3e^2$,

$$\begin{aligned}\frac{3\omega^2}{8\pi f} = {} & \frac{e}{r^3}\int_0^r \rho\, dr^3 - \frac{3}{5}\,\frac{1}{r^5}\int_0^r \rho\, dr^5 e - \frac{3}{5}\int_r^1 \rho\, de \\ & - \frac{31}{14}\,\frac{e^2}{r^3}\int_0^r \rho\, dr^3 + \frac{78}{35}\,\frac{e}{r^5}\int_0^r \rho\, dr^5 e + \frac{4}{5}\,e\int_r^1 \rho\, de \\ & + \frac{2e}{r^3}\int_0^r \rho\, dr^3 e - \frac{21}{10}\,\frac{1}{r^5}\int_0^r \rho\, dr^5 e^2 - \frac{27}{70}\int_r^1 \rho\, de^2.\end{aligned}$$

En posant

$$e = e_0(1 + \beta_1 r^n + \beta_2 r^{2n} + \ldots) + e_0^2(\beta'_1 r^n + \beta'_2 r^{2n} + \ldots),$$

la valeur des termes de correction β'_1, ... sera déterminée par celle des termes en e^2 dans ω^2.

Les formules (102) et (104) donneront ensuite e_φ et e_J. Les quantités nouvelles à calculer seront données ou définies comme il suit :

$$J\int_0^1 \rho\, dr^5(1+2\lambda^2) = J\int_0^1 \rho\, dr^5 + 4J\int_0^1 \rho\, dr^5 e = JF_1 + \frac{10}{3}(2e-\varphi)D_1,$$

$$\int_0^1 \rho\, dr^3(1+\lambda^2) = D_1(1+\lambda_1^2), \qquad \int_0^1 \rho\, dr^5 e = e_1\rho_1(m+e_1 m'),$$

$$\int_0^1 \rho\, dr^5 e^2 = e_1^2\rho_1 m_2,$$

où F_1, D_1, m sont les valeurs calculées en première approximation et où m_1, m', m_2 sont des termes de correction.

En éliminant l'intégrale commune à (102) et (104), on a d'abord

$$(\lambda^2-\varphi)(1+\lambda^2)D_1 - \left(\frac{6}{7}\lambda^2 - \frac{3}{2}\varphi\right)\varphi D_1 = \frac{6}{5}JF_1 + 4J(\lambda^2-\varphi)D_1,$$

puis

$$e = \frac{\varphi}{2} + \frac{3}{5}J\frac{F_1}{D_1} + \mu e^2, \qquad e(1-e\mu) = e_{\varphi J}, \qquad \frac{1}{e} = \frac{1}{e_{\varphi J}} - \mu,$$

où

$$\mu = -\frac{3}{2} + \frac{2}{5}(3-\eta)\left(2\frac{J}{e} - 1\right) + \frac{3}{5}\,\frac{6-7\eta}{35}(\eta+2).$$

De même les formules (102) et (104) s'écriront à leur tour

$$\frac{1}{e} = \frac{2}{\varphi}\left(1 - \frac{3-\zeta}{5}m - e\mu_\varphi\right) = \frac{1}{e_\varphi} - \frac{5\mu_\varphi}{\eta+2}, \qquad \mu_\varphi = \mu - \frac{3-\zeta}{5}\mu_J,$$

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{J}\,\frac{\rho_1}{F_1}(m - e\mu_J) = \frac{1}{e_J} - \frac{\mu_1}{m}, \qquad \mu_J = 4\frac{J}{e}\,\frac{3-\eta}{3-\zeta} - m' - \frac{7}{2}m_2;$$

μ, μ_φ, μ_J détermineront les corrections à faire subir aux valeurs e_φ, e_J, $e_{\varphi J}$ calculées en première approximation dans les Tableaux donnés. Ces corrections ne sont applicables qu'à l'hypothèse de Clairaut. Elles auraient d'ailleurs peu d'intérêt dans les autres cas où l'aplatissement, qui s'accorde avec l'attraction et la précession, peut varier dans de larges limites. De plus, dans l'hypothèse de Clairaut, ces termes de

correction ne peuvent influer que de quelques dixièmes sur la valeur de l'inverse de l'aplatissement, comme on l'a vu à la fin du Chapitre V.

D'ailleurs la valeur d'accord ayant été alors calculée directement, ces calculs de correction, longs et pénibles sur les trois valeurs e_φ, e_J, $e_{\varphi J}$, perdent toute leur importance.

10. *Calcul de* A, γ, δr, *valeurs de seconde approximation.* — On a successivement

$$A = \frac{1}{r^3}\int_0^r - \rho' a^3 (\lambda_r^2 - \beta^2)^2 \, da,$$

$$\left(\lambda_r^2 - \frac{a^2}{r^2}\lambda^2\right)^2 = 4\left(e_r - \frac{a^2}{r^2}e\right)^2 = 4\left(e_r^2 - 2\frac{a^2}{r^2}ee_r + \frac{a^4}{r^4}e^2\right),$$

$$e^2 = e_0^2[1 + 2\beta_1 r^n + (2\beta_2 + \beta_1^2)r^{2n} + 2(\beta_3 + \beta_1\beta_2)r^{3n} + \ldots],$$

$$A = 4\alpha n e_0^2 \rho_0 r^n \left[\frac{1}{n+3}\frac{e^2}{e_0^2} - 2\frac{e}{e_0}\left(\frac{1}{n+5} + \frac{\beta_1}{2n+5}r^n + \frac{\beta_2}{3n+5}r^{2n} + \ldots\right)\right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{n+7} + \frac{2\beta_1}{2n+7}r^n + \frac{2\beta_2 + \beta_1}{3n+7}r^{2n} + \ldots\right)\right].$$

A la surface $r = 1$, en représentant par β'_1 et β''_1 la valeur des parenthèses en $n + 5$ et $n + 7$, on aura

$$A_1 = 4\frac{\alpha n}{1-\alpha}\rho_1 \frac{e_1^2}{(1+\beta)^2}\left[\frac{(1+\beta)^2}{n+3} - 2\beta'_1(1+\beta) + \beta''_1\right], \qquad e_1 = e_0(1+\beta).$$

Or β et β'_1 ont déjà été calculés. La valeur de β''_1 se déduit de celle de β_1. On obtient ainsi celle de A_1. Pour les trois cas principaux $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, on a calculé la valeur de $\frac{A}{D\lambda^4}$, et les valeurs maximums et minimums de γ et de δr à 45°, où $\delta r = \frac{1}{4}a\gamma\lambda^4 = \gamma r e^2$; les limites de γ étant définies par (99). On obtient le Tableau suivant [1] :

---

[1] Dans l'hypothèse de Roche, $n = 2$, on a vu que l'accord des trois valeurs de e avait lieu pour $\rho_1 = 2{,}25$. On voit facilement, d'après le Tableau, que l'on a dans ce cas

$$2{,}86 < \delta r < 3{,}71, \qquad \delta r = 3^{\mathrm{m}},28 \pm 0^{\mathrm{m}},42.$$

La valeur moyenne probable serait pour le maximum de dépression de $3^{\mathrm{m}},28$. G. H. Darwin, dans la même hypothèse, trouve $3^{\mathrm{m}},26$ (*On the figure of the earth*, p. 107). L'accord est remarquable.

			$\rho_1 =$ 2,0.	2,2.	2,4.	2,6.	2,8.	3,0.
$\frac{A}{D\lambda^n}$	$n=0$	....	0,146	138	130	122	113	105
	1	....	0,105	100	94	88	82	76
	2	....	0,099	93	87	81	74	68
	3	....	0,076	72	67	63	58	53
$n=1$	$-\gamma$	$<$	0,0591	566	530	495	464	429
		$>$	447	433	413	391	371	349
	δr	$<$	$4^m,27$	4,09	3,83	3,58	3,35	3,10
		$>$	3 ,24	3,13	2,98	2,83	2,68	2,52
$n=2$	$-\gamma$	$<$	0,0559	522	489	453	417	380
		$>$	423	400	381	358	334	309
	δr	$<$	$4^m,04$	3,77	3,53	3,28	3,02	2,75
		$>$	3 ,06	2,89	2,75	2,59	2,41	2,23
$n=3$	$-\gamma$	$<$	0,0429	404	377	352	326	300
		$>$	0,0325	309	294	278	261	244
	δr	$<$	$3^m,10$	2,92	2,73	2,55	2,35	2,17
		$>$	2 ,35	2,23	2,12	2,01	1,89	1,76

On aurait en résumé pour limites de δr dans les trois cas

$$2,52 < \delta r < 4,27, \qquad 2,23 < \delta r < 4,04, \qquad 1,76 < \delta r < 3,10,$$

et finalement pour limites pratiques de la dépression maximum

$$2 < \rho_1 < 3, \qquad 1^m,26 < \delta r < 4^m,27.$$

NOTE.

Dans le n° 3 du Chapitre I, p. 343, remplaçons C par X, l'équation (13) devra s'écrire

$$(13) \qquad \frac{1}{2\pi f}\frac{\partial\omega^2}{\partial a_n} = \frac{a_n^2}{b_n^2}\frac{\partial E}{\partial a_n} - \frac{\partial D}{\partial a_n} + \frac{1}{2\pi f}\frac{X}{a_n}\frac{d}{da_n}\left(\frac{a_n^2}{b_n^2}\right).$$

En outre, on aurait de fait sur l'axe polaire

$$a^2 + \mu = a_n^2 = x_n^2, \qquad \frac{\partial\mu}{\partial x_n^2} = 1, \qquad \frac{\partial\mu}{\partial a_n} = 2a_n,$$

$$\frac{\partial D}{\partial a_n} - \frac{a_n^2}{b_n^2}\frac{\partial E}{\partial a_n} = \frac{2a_n}{b_n^2}\int_0^{x_n}\left(\frac{b_n^2}{b^2+\mu} - \frac{a_n^2}{a^2+\mu}\right)\frac{-\rho'\,da}{\Delta\mu},$$

et finalement l'équation (14) devient en posant

$$1 + l^2 = \frac{b^2 - \mu}{a^2 - \mu} = \frac{b^2 - \mu}{a_n^2}, \qquad l^2 = \frac{a^2}{a_n^2}\lambda^2,$$

$$(14) \quad a_n(1+\lambda^2)\frac{\partial\omega^2}{\partial a_n} + \frac{X}{1+\lambda^2}\frac{d\lambda^2}{da_n} = 4\pi f \int_0^{a_n} \frac{\lambda_n^2 - l^2}{1+l^2}\frac{l^3}{\lambda^3}\sqrt{\frac{1+\lambda^2}{1+l^2}\frac{1+\lambda'^2}{1+l'^2}}\,\rho'\,da.$$

λ' et l' représentent les valeurs de λ et l où b est remplacé par c. On obtiendrait une nouvelle relation en remplaçant dans (14), λ et l par λ' et l' et réciproquement.

Conclusions. — 1° Si nous supposons l'équilibre permanent réalisé, $\frac{\partial\omega^2}{\partial a_n}$ et $\frac{\partial\omega^2}{\partial x_n^2} = 0$. Cette dernière relation exige, comme on l'a vu, ou bien $\rho' = 0$, (ellipsoïde homogène), ou bien $\frac{b_n^2}{b^2 - \mu} = \frac{a_n^2}{a^2 - \mu}$, c'est-à-dire ici $\lambda_n^2 = l^2$, ellipsoïdes homofocaux. Dans ce dernier cas (14) se réduirait à $d\lambda^2 = 0$, c'est-à-dire qu'on devrait avoir des ellipsoïdes homothétiques. Il y a incompatibilité. Le premier cas reste seul possible. *Une masse fluide, tournant tout d'une pièce, ne peut prendre la forme ellipsoïdale que si elle est homogène.*

2° Si les surfaces de niveau sont des ellipsoïdes *homofocaux*, alors $\lambda_n^2 = l^2$ et (14) donne

$$a_n(1+\lambda^2)\frac{\partial\omega^2}{\partial a_n} = -\frac{X}{1+\lambda^2}\frac{d\lambda^2}{da_n} = \frac{X}{a_n}\frac{2\lambda^2}{1+\lambda^2} < 0,$$

car, dans ce cas, $\lambda^2 = \frac{\lambda_1^2}{a^2}$ et $\frac{d\lambda^2}{da} = -\frac{2\lambda_1^2}{a^3} = -\frac{2\lambda^2}{a}$. La vitesse de rotation varie donc en sens inverse du rayon et décroît du centre à la surface. Au centre $\partial\omega^2 = 0$.

3° Si les surfaces de niveau sont *homothétiques*, $d\lambda^2 = 0$ et le second membre de (14) est encore négatif, car $\rho' < 0$ et $\lambda_n^2 - l^2 > 0$. En effet, ici

$$\lambda^2 = \lambda_n^2 = \text{const.}$$

et $l^2 = \frac{a^2}{a_n^2}\lambda_n^2 < \lambda_n^2$. On a donc encore $\partial\omega^2 < 0$ et la vitesse de rotation décroît du centre à la surface. Elle est maximum au centre.

4° Enfin, si la vitesse de rotation est *uniforme* (au moins sur l'axe de rotation), $\frac{\partial\omega^2}{\partial a_n} = 0$, on a

$$\frac{X}{1+\lambda^2}\frac{d\lambda^2}{da_n} = 4\pi f \int_0^{a_n} \frac{\lambda_n^2 - l^2}{1+l^2}\frac{l^3}{\lambda^3}\sqrt{\frac{1+\lambda^2}{1+l^2}\frac{1+\lambda'^2}{1+l'^2}}\,\rho'\,da$$

X et ρ' sont négatifs. Cette relation peut être vérifiée en général de deux façons

différentes : ou bien $l < \lambda_n$ et $d\lambda^2 > 0$, ou bien $l > \lambda_n$ et $d\lambda^2 < 0$. Or, $l^2 = \frac{a^2}{a_n^2}\lambda^2$; de plus, sur la surface S_n, on a $l = \lambda_n$ et l'intégration est prise de o à a_n. Si $a^2\lambda^2$ reste constant, alors $l = \lambda_n$ (ellipsoïdes homofocaux). Si $a^2\lambda^2$, à partir de S_n jusqu'au centre, devient plus petit que λ_n^2, c'est-à-dire si l'aplatissement devient plus petit que l'aplatissement homofocal correspondant (lequel tend vers 1), alors on a $l < \lambda_n$ et $d\lambda^2 > 0$. Les aplatissements croissent du centre à la surface. C'est *l'extension du théorème de Clairaut*, a l'ellipsoïde à trois axes, la vitesse de rotation étant quelconque, dans le cas où les ellipsoïdes ne se réduisent pas à des disques aplatis. Les conclusions de la page 346 demeurent.

Mais on aurait un *second cas d'équilibre*, en vitesse uniforme, probablement *instable*, avec des aplatissements croissants à partir de la surface, et très grands, plus grands que les aplatissements homofocaux correspondants, puisqu'on doit avoir $l > \lambda_n$ ou $\lambda > \frac{a_n}{a}\lambda_n$ (courbe 3, *fig.* 1, p. 350). On voit par les discussions du Chapitre II que ce cas ne peut être réalisé que pour des aplatissements considérables, tendant vers l'unité. Ce serait *le cas inverse de celui de Clairaut*, les surfaces de niveau au lieu d'être voisines de la sphère, seraient voisines du *disque aplati*, et les vitesses de rotation également faibles.

ADDITION AU MÉMOIRE DE M. BOUSSINESQ (p. 227).

16. Le cas, dont il est fait abstraction ici, où $\alpha' = -\alpha$, $\beta' = -\beta$, $\gamma' = -\gamma$, est visiblement celui où la racine ρ obtenue rend négative la somme $1 + \rho$; et alors, d'après (27), ∂ devient $-(2 + \rho)$. Mais le plus simple consiste à y regarder la fibre principale comme une ligne purement géométrique ou idéale, et à assimiler son renversement de direction à une contraction supérieure à 1, qu'elle aurait éprouvée à partir du centre de la particule censé fixe, sa longueur devenant ainsi négative ou son extrémité mobile reculant en deçà du centre. On aurait donc toujours $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$, $\gamma' = \gamma$, $\partial = \rho$; seulement, les dilatations principales ∂ pourraient s'abaisser au-dessous de -1.

A ce point de vue purement géométrique et non physique, où il n'est plus question de rotations de la particule, mais seulement d'avance ou de recul (sans déviation) de la seconde extrémité de lignes géométriques ayant leur première extrémité commune et fixe, c'est-à-dire encore, si l'on aime mieux, d'une matière fictive, pénétrable et retournable (comme un gant) dans toutes ses parties, rien n'empêche évidemment qu'il y ait ou une, ou trois racines ρ ainsi inférieures à -1; et les dilatations principales ∂_1, ∂_2, ∂_3 pourront, toutes les trois, recevoir des valeurs quelconques entre $-\infty$ et ∞.

TABLE DES MATIÈRES.

SIXIÈME SÉRIE. — TOME VIII.

Les indications qui précèdent le titre de chaque Mémoire de cette Table sont celles adoptées par le Congrès international de Bibliographie des Sciences mathématiques en 1889.
(*Note de la Rédaction.*)

FIN DU TOME VIII DE LA SIXIÈME SÉRIE.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
48311 Quai des Grands-Augustins, 55.

